Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15*** (1989), 1-14

S. CALAFIORE e P. SANTORO (*)

# Flussi polinomiali in campo complesso

Alla memoria di ANTONIO MAMBRIANI

## 0 - Premesse

Indichiamo con $\mathfrak{R}$ l'insieme dei numeri reali;

$\mathfrak{R}^n$ lo spazio euclideo di dimensione $n$;

$\mathfrak{C}$ l'insieme dei numeri complessi, se $z \varepsilon \mathfrak{C}$ è $z = \mathfrak{R}(z) + i\mathfrak{I}(z)$, $\mathfrak{R}(z)$, $\mathfrak{I}(z) \in \mathfrak{R}$; $|z|$ modulo di $z$;

$\bar{z}$ coniugato di $z$, se $f$: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, $f = f(z)$, indichiamo con $\bar{f}(z)$ la funzione coniugata;

$\overline{\mathfrak{C}}$ l'insieme dei numeri complessi completato con $\infty$;

$C^1(\mathfrak{R})$ l'insieme delle funzioni $z$: $I \subseteq \mathfrak{R} \to \mathfrak{C}$, con derivata continua in $I$.

In 3 di questa nota è lo studio globale delle soluzioni dell'equazione

$$\text{(P)} \qquad \dot{z} = P(z) \qquad z \in C^1(\mathfrak{R}) \qquad \dot{z} = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$$

$P(z)$ è un polinomio di grado $n \geqslant 1$.

Indichiamo con $\mathfrak{N}(P)$ l'insieme degli zeri di $P(z)$ e diremo che $a$ è un *punto critico* per (P) se $a \in \mathfrak{N}(P)$. Con $z(t, z_0)$ si indica la soluzione massimale di (P) tale che $z(0) = z_0$.

Con la trasformazione $z = 1/\overline{w}$ l'equazione (P) diviene $\dot{w} = g(w)$ (dove

(*) Indirizzo degli AA.: S. CALAFIORE, Dipartimento di Matematica «Ulisse Dini», viale Morgagni 67/A, I-50134 Firenze; P. SANTORO, Dipartimento di Energetica, Facoltà di Ingegneria, via S. Marta 3, I-50139 Firenze.

$g(w) = -w^2 \cdot \overline{P}(1/\overline{w})$). Quindi è possibile definire un *flusso globale* $\phi$: $\mathfrak{R} \times \overline{\mathfrak{C}} \to \overline{\mathfrak{C}}$ dove $\phi(t, z_0)$ è la soluzione passante per $z_0 \in \overline{\mathfrak{C}}$ al tempo 0.

Come è di uso, chiameremo *orbita* la proiezione di una soluzione sullo *spazio delle fasi* $\overline{\mathfrak{C}}$ (localmente coincidente con $\mathfrak{R}^2$), se l'orbita è chiusa si dirà che essa è un *ciclo*; indichiamo con $\gamma_z$ l'orbita passante per $z$.

Particolare rilievo è stato dato ai polinomi di quarto e quinto grado.

In 2 sono raggruppate, a premessa, proposizioni note anche se esposte in forma opportuna per questo studio specifico. Da dette proposizioni risulta tra l'altro che i punti critici per l'equazione (P) sono solo centri, fuochi oppure nodi semplici o multipli. Particolare rilievo è dato anche allo studio dei centri.

Chiudono questa nota alcuni grafici sul comportamento delle orbite di alcune equazioni di quarto grado. Essi sono stati elaborati su un programma di calcolo di M. Furi che ha messo a disposizione e lo ringraziamo.

## 1 - Studio locale

Nel caso dell'equazione

$$\text{(E)} \qquad \dot{z} = f(z)$$

esistono varie dimostrazioni delle seguenti Proposizioni 1 e 2. Esse possono essere dimostrate con la teoria dei sistemi autonomi in $\mathfrak{R}^2$ (cfr. ad es. Sansone e Conti [8] cap. II). Uno studio dell'equazione (E), nel caso che il secondo membro sia una funzione razionale è in M. Hukuhara, T. Kimura, T. Matuda (1961) [4] (cap. V). L. Brickman ed E. S. Thomas (1977) [1] dimostrano le proposizioni utilizzando le proprietà delle rappresentazioni conformi; H. Th. Jongen, P. Jonker, F. Twilt (1979) [5] le dimostrano nel caso di un flusso newtoniano cioè nel caso in cui il secondo membro di (E) sia $-g(z)/g'(z)$, $g(z)$ analitica e altre opportune ipotesi. Per uno studio completo di (E) nel caso di $f$ razionale cfr. anche gli AA. [2].

Proposizione 1. *Sia in* (E) $f$ *analitica,* $a \in \mathfrak{N}(f)$, *semplice, posto* $c = f'(a)$, *ovvero data l'equazione*

$$\dot{z} = (z - a)(c + g(z)) \qquad g(z) \textit{ analitica in un intorno di } a$$

*allora:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (i) | *se* $\Im(c) = 0$ | $\Re(c) < 0$ | $a$ | *è un nodo attrattivo;* |
| | | $\Re(c) > 0$ | $a$ | *è un nodo repulsivo;* |
| (ii) | *se* $\Im(c) \neq 0$ | $\Re(c) < 0$ | $a$ | *è un fuoco attrattivo;* |
| | | $\Re(c) > 0$ | $a$ | *è un fuoco repulsivo;* |
| (iii) | *se* $\Re(c) = 0$ | | $a$ | *è un centro;* |

(iv) *inoltre nei casi* (ii) *ed* (iii) *le rotazioni sono in senso antiorario se* $\Im(c) > 0$.

Proposizione 2. *Data l'equazione*

$$\dot{z} = (z-a)^k (c + g(z)) \qquad k \textit{ intero} \geqslant 2 \qquad |c| \neq 0 \qquad g(z) \textit{ analitica}$$

*in un opportuno intorno* $\Delta$ *di* $a$ *esistono* $2(k-1)$ *settori ellittici. In seguito, diremo che* $a$ *è un nodo multiplo di ordine* $k$*, oppure un* $k$*-nodo.*

È facile verificare che la natura di un punto critico non è alterata da una trasformazione $z = aw + b$.

In forza di un'inversione $z = 1/\overline{w}$ si ha la seguente (cfr. [2])

Proposizione 3. *Sia* $n =$ *grado di* $P(z)$*, se nell'equazione* (P):

$n = 1$ *il punto* $\infty$ *è un centro, un fuoco o un nodo secondo che lo* 0 *è rispettivamente un centro, un fuoco o un nodo;*

$n = 2$*, cioè nel caso dell'equazione di Riccati* $\dot{z} = c_0 z^2 + c_1 z + c_2$*, il punto* $\infty$ *è regolare;*

$n > 2$ *il punto* $\infty$ *è un punto iperbolico per l'equazione* (P)*; più precisamente esistono* $2(n-1)$ *settori iperbolici di ampiezza* $\pi/(n-1)$*, le separatrici sono orbite percorse in un tempo* $t < t_1$ *oppure in un tempo* $t > t_2$.

Diamo un'altra dimostrazione della Proposizione 1 (iii) con la seguente

Proposizione 4. *Sia* 0 *uno zero semplice, e sia* $\Re(P'(0)) = 0$*, allora:*

(i) *l'origine è un centro;*

(ii) *ciascun ciclo è percorso in un periodo* $\omega = 2\pi/|P'(0)|$ *(isocronismo);*

(iii) *esiste in un intorno* $\Delta$ *di* 0 *un integrale primo* $I\colon \Delta \to \Re$*, analitico reale con un minimo isolato in* 0 [7].

Dim. Poniamo

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{cz} + h(z) \qquad c = P'(0) \neq 0 \qquad h(z) \text{ analitica}$$

e poniamo inoltre

(1) $$\zeta = F(z) = z \cdot \exp\left(c \cdot \int_0^z h(v)\, \mathrm{d}v\right).$$

Poiché $F'(0) = 1$, $F$ è un diffeomorfismo di un intorno $\Delta$ di 0 in $F(\Delta)$. Ogni orbita $\gamma_z$ di (P) è trasformata in un'orbita $\gamma$ dell'equazione $\dot{\zeta} = c \cdot \zeta$, che è curva chiusa.

La seconda tesi (ii) segue da

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{cz} + h(z)\right) \mathrm{d}z = \int_0^\tau 1\, \mathrm{d}t \qquad |\tau| = \omega .$$

essendo $\gamma_1 \subseteq \gamma_z$ curva chiusa con $\mathrm{Ind}(\gamma_1,\ 0) = (1/2\pi \mathrm{i}) \int_{\gamma_1} 1/z\, \mathrm{d}z = 1$.

Infine, $|F(z)|^2$ è una funzione che soddisfa la condizione (iii).

Osservazione 1. La funzione $F(z)$ definita da (1) è tale che

$$\dot{z} = c \frac{F(z)}{F'(z)} = P(z) \qquad \Re(c) = 0 .$$

Quindi, se in 0 vi è un centro, al flusso definito dall'equazione (P) è abbinato localmente un flusso newtoniano $\dot{v} = -\dfrac{F(v)}{F'(v)}$, ortogonale al precedente.

Inoltre, data l'equazione (P), se $G(z)$ è una primitiva di $-1/P(z)$, posto $g(z) = \exp(G(z))$, si ha

$$\dot{z} = P(z) = -\frac{g(z)}{g'(z)} .$$

## 2 - Studio globale

Teorema. *Per l'equazione* (P) *non esistono cicli limiti.*

Il teorema è enunciato per un caso più generale in [11]. In [4] si dimostra:

*Se l'equazione* (E), *con secondo membro razionale, ammette un ciclo, allora esiste una famiglia di cicli che riempie un aperto (cioè esiste un centro).*

Proposizione 5. *Sia $P(z)$ un polinomio di grado $n > 1$, con tutti zeri semplici, e sia (senza perdere di generalità)*

$$\dot{z} = P(z) = z \prod_{j=1}^{n-1} (z - a_j) . \tag{2}$$

*Indichiamo con $n_c$ il numero di centri, $n_f$ il numero di fuochi, $n_n$ il numero di nodi, si ha:*

(i) $n_c + n_f + n_n = n$;

(ii) *la presenza di $n_c$ centri ($\Re P'(a_j) = 0$), $n_f$ fuochi ($\Re P'(a_j) \cdot \Im P'(a_j) \neq 0$) ed $n_n$ nodi ($\Im P'(a_j) = 0$) equivale alla possibile coesistenza di $n_c$ numeri $b_k$ con $\Re b_k = 0$, $n_f$ numeri $b_h$ con $\Re b_h \cdot \Im(b_h) \neq 0$, $n_n$ numeri $b_r$ con $\Im P'(b_r) = 0$, e tali che*

$$\sum_{k=1}^{n_c} \frac{1}{b_k} + \sum_{h=1}^{n_f} \frac{1}{b_h} + \sum_{r=1}^{n_n} \frac{1}{b_r} = 0 . \tag{3}$$

Dim. La (i) è evidente, poiché, per ipotesi, esistono solo $n$ zeri semplici che, per la Proposizione 1, non possono essere che o centri o fuochi o nodi.

La (ii) segue da

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{P'(0) z} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(a_j)(z - a_j)} \qquad \text{con}$$

$$\frac{1}{P'(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{P'(a_j)} = \operatorname{Res}\left\{\frac{1}{P(z)}, 0\right\} + \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Res}\left\{\frac{1}{P(z)}, a_j\right\} = 0 . \tag{4}$$

Dal confronto tra (3) e (4) si ha che il risultato è possibile se

$$\frac{1}{b_j} = \mathrm{Res}\{\frac{1}{P(z)}, a_j\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad \frac{1}{b_n} = \mathrm{Res}\{\frac{1}{P(z)}, 0\}$$

ovvero se

$$(5)_1 \quad P'(a_j) = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (5)_2 \quad P'(0) = b_n .$$

Il sistema $(5)_1$, $(5)_2$ è composto da $n$ equazioni, ciascuna omogenea di grado $n-1$, nelle $n-1$ incognite $a_j$, legate funzionalmente dalla identità (4).

In definitiva, quindi, la possibile coesistenza di $n_c$ numeri $b_k$, $n_f$ numeri $b_h$, $n_n$ numeri $b_r$ che soddisfano la (3) ed (i) è rinviata alla risoluzione di un sistema di $n-1$ equazioni di grado $n-1$, in $n-1$ incognite, la cui soluzione è teoricamente possibile mediante processi di eliminazione successiva delle incognite (cfr. B. L. Van der Waerden [10], T. 2, cap. 11).

Proposizione 6. *Nell'ipotesi della Proposizione* 5 *ed* $n \geqslant 3$, *il numero totale di casi possibili è* $(n \cdot (n+3)/2) - 3$.

Dim. Dalla Proposizione 5 discende che possono esistere $n-k$ centri (oppure nodi) con $k = 0, 2, 3, \ldots, n$; non possono cioè esistere $n-1$ centri ed un nodo oppure un fuoco, nè esistere $n-1$ nodi ed un fuoco oppure un centro.

Se esistono $n-k$ centri, possono, poi esistere, $h$ fuochi e $k-h$ nodi con $h = 0, 1, \ldots, k$ (è evidente che se $k = n-1$ è $h \neq 0$).

Quindi i possibili casi, in cui si presenta almeno un centro (esiste il caso $k = h = 0$) sono $\sum_{s=2}^{n-1}(s+1)$. Inoltre i casi in cui non esistono centri ma solo nodi e fuochi sono $n$ e quindi l'enunciato.

Osservazione 2. Supponiamo che in (2) sia $\Re(P'(0)) = \Re(P'(a_j)) = 0$ (si può anche ipotizzare che i punti critici di (2) siano tutti fuochi o tutti nodi). Data una successione non crescente di interi non negativi $r_1, r_2, \ldots, r_s$, $r_1 \leqslant n-1$, $\sum_j r_j = n$, può avvenire che $P'(a_1) = P'(a_2) = \ldots = P'(a_{r_1})$; $P'(a_{r_1+1}) = \ldots = P'(a_{r_2})$; $P'(a_{r_2+1}) = \ldots = P'(a_{r_3})$; ecc.

Si *noti*, però, che i numeri $P'(a_j)$ non possono essere del tutto arbitrari: infatti l'ipotesi che gli zeri di $P(z)$ siano semplici e l'identità (4) sono condizioni limitanti.

Così ad esempio se $n = 2m > 2$ non possono esserci $m$ degli $n$ numeri $P'(a_j) = c$ e gli altri $m$ numeri $P'(a_j) = -c$ con tutti $a_j$ distinti.

Corollario 1. *Se in* (2) $a_j = \alpha_j \exp(i\phi)$, $\alpha_j \in \Re^+$, $(n-1)\phi = 2h\pi + \pi/2$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ *per* $j \neq k$, $\prod \alpha_j = |P'(0)|$, *allora:*

($\alpha$) 0 *e tutti i punti* $a_j$ *sono centri;*

($\beta$) *è possibile determinare* $a_j$ *in modo che* $P'(a_j) \neq P'(a_r)$ *se* $j \neq r$;

($\gamma$) *per ciascun centro si hanno i periodi* $\omega_j = 2\pi/|P'(a_j)|$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $\omega_n = 2\pi/|P'(0)|$;

($\delta$) *un integrale primo, con minimo nell'origine, è*

$$I(z) = |z|^2 \prod |z - a_j|^{2k_j} \qquad k_j = \operatorname{Res}\{(P'(0)z - P(z))/zP(z);\ a_j\} \in \Re. \tag{6}$$

Dim. Nelle ipotesi poste è $\Re(P'(a_j)) = \Re(P'(0)) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ e quindi ($\alpha$).

Per verificare ($\beta$) basta prendere, nel caso di $n$ pari, $\alpha_j = j$ e, nel caso di $n$ dispari, $\alpha_1 = 1/2$ ed $\alpha_j = j-1$ per $j > 1$.

($\gamma$) Segue dalla Proposizione 4.

($\delta$) Dalla Proposizione 4 e da (1) si ha che un integrale primo è dato da

$$I(z) = |F(z)|^2 = |z|^2 \exp\Big(2\Re \int_0^z \frac{P'(0)v - P(v)}{vP(v)}\, dv\Big)$$

e quindi la (6).

Da calcoli, si ha che i numeri $k_j$ sono reali e che

$$-\sum k_j = \operatorname{Res}\Big\{\frac{P'(0)z - P(z)}{zP(z)};\ \infty\Big\} = 1.$$

Osservazione 3. È anche

$$I(z) = \rho^2 \prod_j (\rho^2 - 2\alpha_j \rho \cos(\theta - \phi) + \alpha_j^2)^{k_j}$$

cioè $I(z) = \sum_s Q_s(\theta)\rho^s$, essendo $Q_s(\theta)$ polinomi in $\sin\theta$ e $\cos\theta$ {cfr. condizioni di Poincaré necessarie e sufficienti per l'esistenza di un centro, ad es. in [8]}.

Corollario 2. *Consideriamo le equazioni* ($\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2 \in \Re$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ *non nulli*)

$$\dot{z} = z(z^{n-1} - \alpha i) \tag{7}$$

$$\dot{z} = z\{z^{m-1} - \alpha_1(1+i)\}\{z^{m-1} - \alpha_2(1+i)\} \qquad (n = 2m-1) \tag{8}$$

(i) *i punti critici di ciascuna di esse sono centri;*

(ii)$_1$ *se* $z_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) *sono le* $n-1$ *radici di* $\alpha i$ *è*

$$P'(z_1) = P'(z_2) = \ldots = P'(z_{n-1}) \neq P'(0);$$

(ii)$_2$ *se* $z'_k$ *sono le* $m-1$ *radici di* $\alpha_1(1+i)$, *e* $z''_k$ *sono le* $m-1$ *radici di* $\alpha_2(1+i)$ ($k = 1, 2, \ldots, m-1$) *è* $P'(z'_1) = P'(z'_2) = \ldots = P'(z'_{m-1})$; $P'(z''_1) = P'(z''_2) = \ldots = P'(z''_{m-1})$, $P'(0) \neq P'(z'_j) \neq P'(z''_k)$;

(iii)$_1$ *per il centro in 0 di (7), le orbite sono percorse nel tempo* $|2\pi/\alpha|$ *e per gli altri centri nel tempo* $2\pi/|(n-1)\alpha|$;

(iii)$_2$ *per il centro in 0 di (8), le orbite sono percorse nel tempo* $|\pi/\alpha_1\alpha_2|$, *e per gli altri centri rispettivamente nei tempi* $|\pi/(m-1)(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_1|$ *e* $|\pi/(m-1)(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_2|$;

(iv) *per ciascuna di esse integrali primi, con minimo nell'origine, sono rispettivamente*

$$I(z) = K\frac{|z|^{2(n-1)}}{|z^{n-1} - \alpha_i|^2} \tag{9}$$

$$I(z) = K\frac{|z^{m-1} - \alpha_1(1+i)|^{2p}}{|z^{m-1} - \alpha_2(1+i)|^{2q}}|z|^{2(m-1)} \qquad p = \alpha_2/(\alpha_1-\alpha_2) \qquad q = \alpha_1/(\alpha_1-\alpha_2). \tag{10}$$

Dim. Se $\eta$ è uno zero del polinomio a secondo membro, allora per dimostrare (i), basta osservare che, per ogni radice $\eta$, è $\Re P'(\eta) = 0$. Le (ii) seguono da calcoli diretti. Le (iii) seguono dalla Proposizione 4.

Dimostriamo (iv) solo per l'equazione (8): basta per ciò calcolare, in forza della Proposizione 4,

$$F(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{P'(0)v - P(v)}{vP(v)}dv\right)$$

e porre
$$I(z) = |F(z)|^{2(n-1)}.$$

Si osservi che nel caso di (10) se $p$ e $q$ sono razionali, allora esiste un integrale primo $H \circ I(z)$ razionale ($H$: $\Re \to \Re$, $H(0) = 0$, strettamente crescente).

Corollario 3. (i) *Per un'equazione*

$$\dot{z} = z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3$$

*è possibile uno dei seguenti dieci casi:* (1) *tre centri;* (2) *tre nodi;* (3) *un centro e due fuochi;* (4) *un nodo e due fuochi;* (5) *un centro, un fuoco ed un nodo;* (6) *tre fuochi;* (7) *un* 2-*nodo ed un centro;* (8) *un* 2-*nodo ed un nodo;* (9) *un* 2-*nodo ed un fuoco;* (10) *un* 3-*nodo.*

(ii) *Per un'equazione*

$$\dot{z} = z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4$$

*è possibile uno dei seguenti casi:* (1) *quattro centri;* (2) *quattro nodi;* (3) *quattro fuochi;* (4) *tre fuochi ed un nodo;* (5) *tre fuochi ed un centro;* (6) *due centri e due nodi;* (7) *due centri e due fuochi;* (8) *due nodi e due fuochi;* (9) *due centri, un nodo ed un fuoco;* (10) *due nodi, un centro ed un fuoco;* (11) *due fuochi, un centro ed un nodo;* (12) *un* 2-*nodo e due centri;* (13) *un* 2-*nodo e due nodi;* (14) *un* 2-*nodo e due fuochi;* (15) *un* 2-*nodo, un centro ed un fuoco;* (16) *un* 2-*nodo, un centro ed un nodo;* (17) *un* 2-*nodo, un nodo ed un fuoco;* (18) *un* 3-*nodo ed un centro;* (19) *un* 3-*nodo ed un fuoco;* (20) *un* 3-*nodo ed un nodo;* (21) *un* 4-*nodo. Infine il punto all'$\infty$ è un punto iperbolico.*

(iii) *Data l'equazione*

$$\dot{z} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_5 z^5 = P(z)\,,$$

*se $P(z)$ ha tutti zeri semplici sono possibili i seguenti casi (in parentesi* [ ] *sono riportati, nell'ordine, i numeri $n_c$, $n_f$, $n_n$):* (1) *cinque centri* [5, 0, 0]; (2) *cinque fuochi* [0, 5, 0]; (3) *cinque nodi* [0, 0, 5]; (4) *tre centri e due fuochi* [3, 2, 0]; (5) *tre centri, un fuoco ed un nodo* [3, 1, 1]; (6) *tre centri e due nodi* [3, 0, 2]; (7) *due centri e tre fuochi* [2, 3, 0]; (8) *due centri, due fuochi ed un nodo* [2, 2, 1]; (9) *due centri, un fuoco e due nodi* [2, 1, 2]; (10) *due centri e tre nodi* [2, 0, 3]; (11) *un centro e quattro fuochi* [1, 4, 0]; (12) *un centro, tre fuochi ed un nodo* [1, 3, 1]; (13) *un centro, due fuochi e due nodi* [1, 2, 2]; (14) *un centro, un fuoco e tre nodi* [1, 1, 3]; (15) *quattro fuochi ed un nodo* [0, 4, 1]; (16) *tre fuochi e due nodi* [0, 3, 2]; (17) *due fuochi e tre nodi* [0, 2, 3].

Dim. Dagli enunciati delle precedenti proposizioni, e con un poco di pazienza, si ricavano le precedenti classificazioni.

Forse vale la pena osservare che nel caso (i) se si hanno tre centri, i tre punti critici sono allineati. Nel caso di (ii), è riportato in Fig. 1 l'andamento nello spazio delle fasi delle orbite di

$$\dot{z} = z(z^3 - \alpha i) \tag{11}$$

ed in Fig. 3 l'andamento nello spazio delle fasi delle orbite di

$$\dot{z} = z(z - \mathrm{i})(z - 2\mathrm{i})(z - 3i)\,. \tag{12}$$

Data l'equazione (E) ricordiamo che se $a$ è un centro, il bacino $\mathfrak{B}(a)$ di $a$

(1) è l'insieme dei punti $w \in \mathfrak{C}$ tali che le orbite $\gamma_w$ sono cicli ed $|\mathrm{Ind}(\gamma_w, a)| = 1$,

(2) non esistono altri punti critici $b \in \mathfrak{B}(a)$.

Proposizione 9. *Sia il grado di $P > 2$ e sia $a \in \mathfrak{R}(P)$ un centro, allora*

(i) *$\mathfrak{B}(a)$ è aperto e connesso;*

(ii) *la frontiera $\delta\mathfrak{B}(a)$ è unione di un numero finito di orbite illimitate e di* $\infty$.

Dim. La dimostrazione di (i) è classica e per essa si rinvia ad es. a [3] oppure a [8].

Per (ii) R. Conti [3] esamina le proprietà di $\delta\mathfrak{B}(a)$ nel caso di un sistema polinomiale in $\mathfrak{R}^2$ (e l'estensione del sistema stesso alla sfera di Poincaré) e tra l'altro conclude che $\delta\mathfrak{B}(a)$ è un insieme invariante, unione di un numero finito di orbite e punti iperbolici. Le stesse conclusioni sono in [4] per l'equazione (E) nel caso che $f$ sia una funzione razionale (in $\overline{\mathfrak{C}}$). Poiché l'unico punto iperbolico è $\infty$ ne segue l'enunciato.

Osservazioni. Si noti che se è $\dot{z} = z^2 - \alpha i z$ (equazione di Riccati) zero e $\alpha i$ sono centri ed il punto $\infty$ è regolare.

Nel caso di (7), con polinomio di grado $n+1$, posto $w = e^{i\pi/2n}/z$, si ha

$$\dot{w} = -i(1 - w^n)/w^{n-1} \qquad (\alpha = 1)$$

e perciò il complesso di equazioni delle orbite, in un intorno opportuno di $\infty$, è espresso dalle lemniscate [6]

$$|1 - w^n| = \text{costante}\,.$$

In particolare la lemniscata $|1 - w^n| = 1$ è separatrice dei centri e quindi ogni $\partial\mathfrak{B}(\eta_i)$ è unione di un'orbita (un ramo della lemniscata) e $\infty$, e $\partial\mathfrak{B}(0) = \cup\partial\mathfrak{B}(\eta_i)$.

Nel caso di (8) si ha, in un opportuno intorno di $\infty$ e con opportuna trasformazione

$$\dot{w} = -2i\frac{(1-\alpha_1 w^{m-1})(1-\alpha_2 w^{m-1})}{w^{2m-1}}$$

ed il complesso delle equazioni delle orbite è dato da

$$\frac{|1-\alpha_2 w^n|^2}{|1-\alpha_1 w^n|^2} = \text{costante}\,.$$

In Fig. 2 ed in Fig. 4 sono rispettivamente riportati il comportamento nello spazio delle fasi nell'intorno di $\infty$ delle orbite delle equazioni (11) e (12). In Fig. 5 è riportato il comportamento delle orbite dell'equazione (12) dopo la trasformazione $z = v + i$ e l'inversione $w = 1/\bar{v}$.

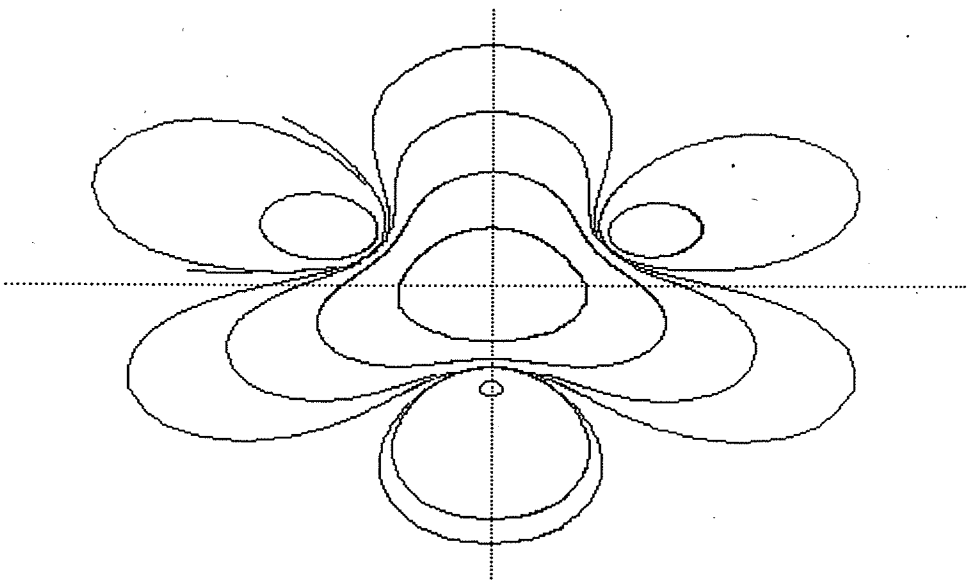

Fig. 1

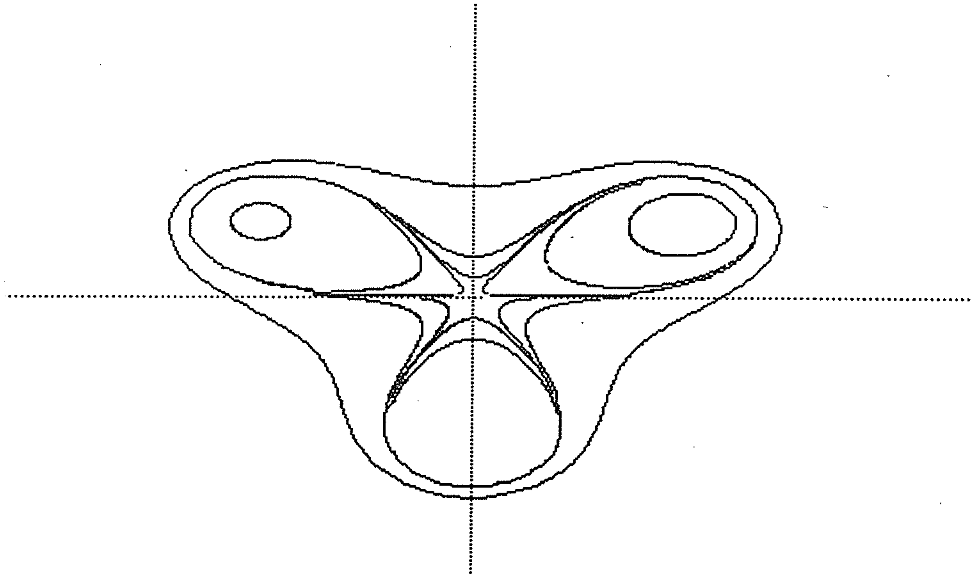

Fig. 2

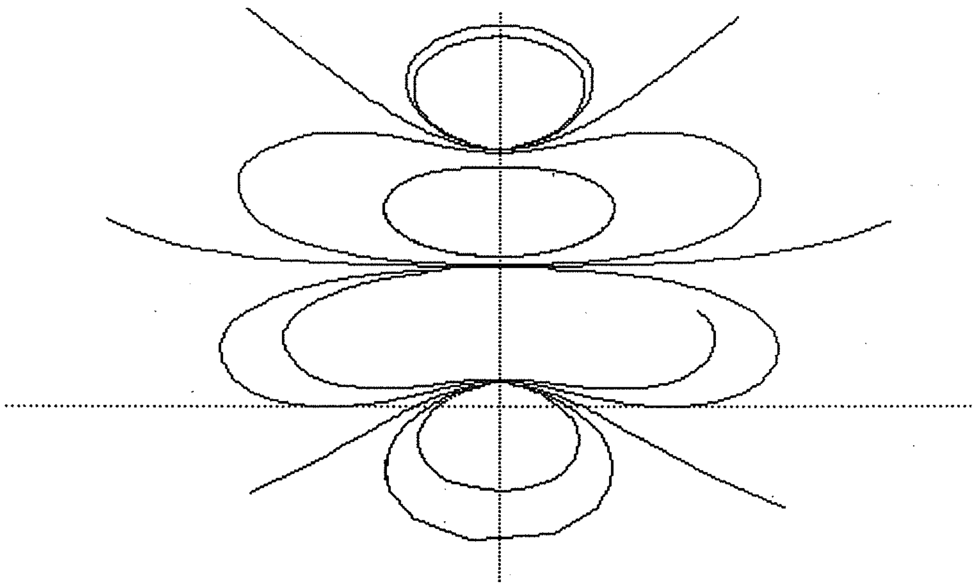

Fig. 3

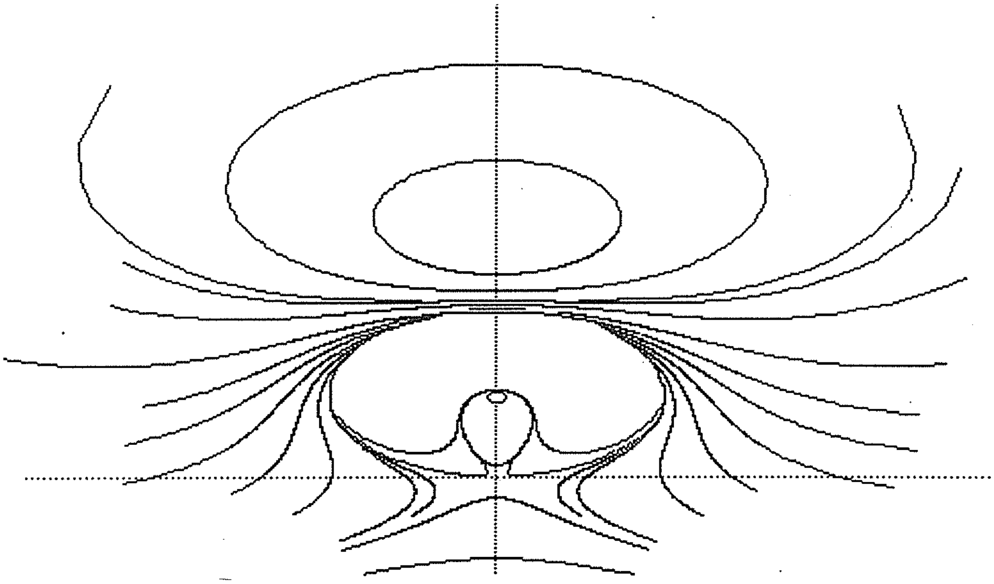

Fig. 4

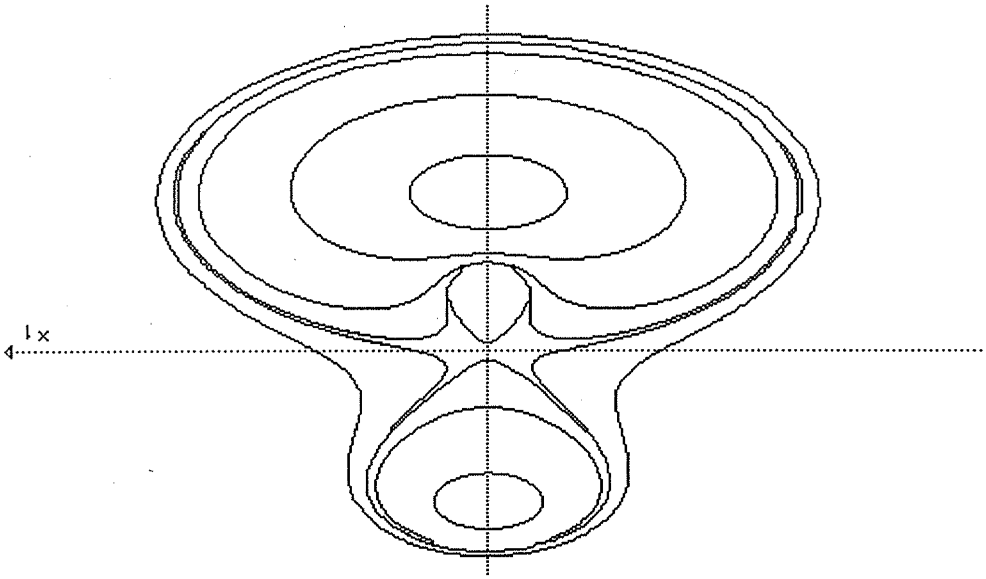


Fig. 5

## Bibliografia


[1] L. BRICKMAN and E. S. THOMAS, *Conformal equivalence of analytic flows*, Journal of Diff. Eq. 25 (1977), 310-324.

[2] S. CALAFIORE e P. SANTORO, *Flussi continui in campo complesso*, to appear.

[3] R. CONTI, *Centers of polynomial system in $R^2$*, Dipartimento di Matematica Applicata «G. Sansone», Marzo 1990.

[4] M. HUKUHARA, T. KIMURA and T. MATUDÁ, *Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Publ. Math. Soc. of Japan 1961.

[5] H. TH. JONGEN, P. JONKER and F. TWILT, *The continuous Newton-method for meromorphic functions. Geometrical approaches to differential equations*, pp. 181-239, Lecture Notes in Mathematics, **810**, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[6] A. I. MARKUSHEVICH, *Theory of functions of a complex variable* (I), Prentice Hall 1975.

[7] L. MAZZI and M. SABATINI, *A characterization of centres via first integrals*, J. Differential Equation **76** (1988), 222-237.

[8] G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Cremonese, Roma, 1956 (oppure engl. trans.: *Non-linear differential equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964).

[9] G. SANSONE and J. GERRETSEN, *Lectures on the theory of functions of a complex variable*, Nordhoff, Groningen 1960.

[10] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*, Springer Verlag, Berlin, 1955.

[11] Y. YAN-QIAN, *Theory of limit cycles*, Translations of Mathematical Monographs **66**, Providence, 1984.



## Summary

*In this paper the authors are concerned with the qualitative globale study of solutions of the differential equation*

$$\dot{z} = P(z) \qquad z\colon \mathfrak{R} \to \overline{\mathfrak{C}}$$

*with* $\overline{\mathfrak{C}}$ *extended complex plane,* $P(z)$ *polynomial.*


***