Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989), 175-190

EDMONDO BEDOCCHI (*)

Sul secondo minimo di una forma quadratica e sue applicazioni (**)

1 - Introduzione

Nello studio dei campi quadratici reali e nella teoria, ad essi strettamente collegata, delle forme quadratiche binarie indefinite, ha grande importanza il problema della determinazione dei cosiddetti minimi successivi di una forma. Ricordo qui brevemente di che cosa si tratti (si veda, ad esempio, [2] per maggiori particolari).

Sia $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ una forma quadratica reale con $D = b^2 - 4ac > 0$; se $P = (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si pone

$$M(f, P) = \inf \{ |f(x' + z, y' + w)| \mid (z, w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \}$$

$$M(f) = \sup \{ M(f, P) \mid P \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \} .$$

Il numero reale $M(f)$ si chiama (*primo*) *minimo* (*non omogeneo*) della forma quadratica f. Siano poi

$$C = \{ P \mid P \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \& \ M(f, P) = M(f) \} \quad M_2(f) = \sup \{ M(f, P) \mid P \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus C \} .$$

Evidentemente $M_2(f) \leq M(f)$: quando la disuguaglianza è stretta $M_2(f)$ si chiama *secondo minimo* della forma quadratica f. In modo analogo si definiscono poi i minimi successivi.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta S. Donato 5, I-40127 Bologna.

(**) Lavoro eseguito con fondi del M.P.I. – Ricevuto: 24-V-1989.

La determinazione effettiva dei minimi delle forme presenta spesso notevoli difficoltà e richiede l'uso di tecniche svariate a seconda del valore del discriminante D (si vedano [2] e [5]).

Scopo principale di questa nota è quello di calcolare il secondo minimo della forma $x^2 - 14y^2$. Nel paragrafo finale si mostrano poi le conseguenze di alcuni dei risultati utilizzati a tal fine, sull'ipotesi con la quale, in [3], ho provato che $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ è euclideo (naturalmente per una funzione diversa dalla norma).

Da ultimo osservo che la tecnica qui usata ha buone possibilità di essere estesa alle forme quadratiche $x^2 - my^2$ con m intero del tipo $t^2 - 2$.

2 - Risultati preliminari

Nel seguito alcune dimostrazioni semplici e dirette sono state omesse per non appesantire l'esposizione. Ciò premesso sia $[a_0, a_1, a_2, \dots] = [3, \overline{1,2,1,6}]$ lo sviluppo in frazione continua di $\sqrt{14}$ e p_n, q_n, α_{n+1} siano, rispettivamente, numeratore, denominatore e resto della sua n-esima ridotta. Si ha allora

Lemma 2.1.

(2.1.1) $(q_{4n+2}/q_{4n+1})_{n\in\mathrm{N}}$ *tende, decrescendo, a* $\alpha_2 = (\sqrt{14}+2)/2$

(2.1.2) $(p_{4n+2}/p_{4n+1})_{n\in\mathrm{N}}$ *tende, crescendo, a* $\alpha_2 = (\sqrt{14}+2)/2$

(2.1.3) $(q_{4n+1}/q_{4n})_{n\in\mathrm{N}}$ *tende, crescendo, a* $\alpha_3 = (\sqrt{14}+2)/5$

(2.1.4) $(p_{4n+1}/p_{4n})_{n\in\mathrm{N}}$ *tende, decrescendo, a* $\alpha_3 = (\sqrt{14}+2)/5$.

Lemma 2.2. *Per ogni* $t \in \mathrm{R}^+$ *e* $n \in \mathrm{N}$ *tali che* $t \leqslant q_{4n+1}$ *risulta*

$$\sqrt{14} < p_{4n+1}/q_{4n+1} < [(14t^2+1)/14t^2]\sqrt{14}.$$

Lemma 2.3. *Per ogni* w, t, $\varepsilon \in \mathrm{R}$ *tali che* $3/2 \leqslant t \leqslant w$ *e* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *si ha*

$$\sqrt{w} + \frac{4t}{4t+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{w}} < \sqrt{w+\varepsilon} < \sqrt{w} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{w}} \tag{2.3.1}$$

$$\sqrt{w}-\frac{2t+1}{2t}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{w}}<\sqrt{w-\varepsilon}<\sqrt{w}-\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{w}}\cdot \tag{2.3.2}$$

Def. 2.4. Per ogni $a,\ b,\ \varepsilon\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1$, siano:

$$S(a,\ b,\ \varepsilon)=\{(x,\ y)\,|\,(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \&\ |(x-a)^2-14(y-b)^2|<\varepsilon\}$$

$$H(a,\ b,\ \varepsilon)=S(a,\ b,\ \varepsilon)\cap([0,\ \tfrac{1}{2}]\times]-\infty,\ b])\qquad \text{se}\quad a\geqslant 0$$

$$H(a,\ b,\ \varepsilon)=S(a,\ b,\ \varepsilon)\cap([0,\ \tfrac{1}{2}]\times[b,\ +\infty[)\qquad \text{se}\quad a<0$$

$$G(a,\ b,\ \varepsilon)=S(a,\ b,\ \varepsilon)\cap([0,\ \tfrac{1}{2}]\times[b,\ +\infty[)\qquad \text{se}\quad a\geqslant 0$$

$$G(a,\ b,\ \varepsilon)=S(a,\ b,\ \varepsilon)\cap([0,\ \tfrac{1}{2}]\times]-\infty,\ b])\qquad \text{se}\quad a<0$$

e siano poi $h^+(a,\ b,\ \varepsilon)(\cdot)$, $h^-(a,\ b,\ \varepsilon)(\cdot)$, $g^+(a,\ b,\ \varepsilon)(\cdot)$, $g^-(a,\ b,\ \varepsilon)(\cdot)$ le funzioni che hanno come grafico i bordi, superiore ed inferiore, di $H(a,\ b,\ \varepsilon)$ e $G(a,\ b,\ \varepsilon)$.

Def. 2.5. Siano $(u_n,\ v_n)_{n\geq 1}$, $(\bar{u}_n,\ \bar{v}_n)_{n\geq 1}$ e $(\bar{\bar{u}}_n,\ \bar{\bar{v}}_n)_{n\geq 1}$ le successioni di elementi di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ così definite: per ogni $k\in\mathbb{N}$

$$(u_{5k+1},\ v_{5k+1})=(p_{4k+1},\ -q_{4k+1})$$

$$(u_{5k+2},\ v_{5k+2})=(3p_{4k+3}-2p_{4k+5}-2p_{4k+7},\ -3q_{4k+3}+2q_{4k+5}+2q_{4k+7})$$

$$(u_{5k+3},\ v_{5k+3})=(2p_{4k+7},\ -2q_{4k+7})$$

$$(u_{5k+4},\ v_{5k+4})=(u_{5k+5},\ v_{5k+5})=(p_{4k+5},\ -q_{4k+5})$$

$$(\bar{u}_{4k+1},\ \bar{v}_{4k+1})=(p_{8k+5}+4p_{8k+7}-p_{8k+9},\ -q_{8k+5}-4q_{8k+7}+q_{8k+9})$$

$$(\bar{u}_{4k+2},\ \bar{v}_{4k+2})=(\bar{u}_{4k+3},\ \bar{v}_{4k+3})=(p_{8k+9},\ -q_{8k+9})$$

$$(\bar{u}_{4k+4},\ \bar{v}_{4k+4})=(2p_{8k+11},\ -2q_{8k+11})$$

$$(\bar{\bar{u}}_{4k+1},\ \bar{\bar{v}}_{4k+1}) = (p_{8k+5},\ -q_{8k+5})$$

$$(\bar{\bar{u}}_{4k+2},\ \bar{\bar{v}}_{4k+2}) = (2p_{8k+7},\ -2q_{8k+7})$$

$$(\bar{\bar{u}}_{4k+3},\ \bar{\bar{v}}_{4k+3}) = (2p_{8k+9} - 4p_{8k+11},\ -2q_{8k+9} + 4q_{8k+11})$$

$$(\bar{\bar{u}}_{4k+4},\ \bar{\bar{v}}_{4k+4}) = (p_{8k+13},\ -q_{8k+13}).$$

Lemma 2.6. *Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, si ha:*

$$\sum_{j=m}^{n} \sum_{i=1}^{5} u_{5j+i} + v_{5j+i}\sqrt{14} = \frac{1}{2}(p_{4n+4} - p_{4m}) - \frac{1}{2}(q_{4n+4} - q_{4m})\sqrt{14} \tag{2.6.1}$$

$$\sum_{j=m}^{n} \sum_{i=1}^{4} \bar{u}_{4j+i} + \bar{v}_{4j+i}\sqrt{14} = \frac{1}{2}(p_{8n+12} - p_{8m+4}) - \frac{1}{8}(p_{8n+13} - p_{8m+5}) - [\frac{1}{2}(q_{8n+12} - q_{8m+4}) - \frac{1}{8}(q_{8n+13} - q_{8m+5})]\sqrt{14} \tag{2.6.2}$$

$$\sum_{j=m}^{n} \sum_{i=1}^{4} \bar{\bar{u}}_{4j+i} + \bar{\bar{v}}_{4j+i}\sqrt{14} = \frac{1}{2}(p_{8n+12} - p_{8m+4}) - \frac{1}{8}(p_{8n+13} - p_{8m+5}) - [\frac{1}{2}(q_{8n+12} - q_{8m+4}) + \frac{1}{8}(q_{8n+13} - q_{8m+5})]\sqrt{14}. \tag{2.6.3}$$

Lemma 2.7. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, risulta*

$$(8 \cdot \frac{333}{116} + 7)\, p_{4n+1} \leqslant p_{4n+5} \leqslant (8\alpha_2 + 7)\, p_{4n+1} \tag{2.7.1}$$

$$(240 \cdot \frac{299037}{104164} + 209)\, p_{8n+5} \leqslant p_{8n+13} \leqslant (240\alpha_2 + 209)\, p_{8n+5}. \tag{2.7.2}$$

Lemma 2.8. *Siano $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $2584/2889 \leqslant \varepsilon < 1$, e supponiamo che esista $h \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 1$, tale che $(41/116)\,p_{4h+1} \leqslant a \leqslant (51/116)\,p_{4h+1}$. Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo*

$$(x_n,\ y_n) = \begin{cases} (a,\ b) & se \quad n = 0 \\ (x_{n-1},\ y_{n-1}) + (u_{5h+n},\ v_{5h+n}) & se \quad n \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.8.1}$$

allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $x \in [0, \frac{1}{2}]$, *si ha*

$$g^{-}(x_{n+1},\ y_{n+1},\ \varepsilon)(x) < g^{+}(x_n,\ y_n,\ \varepsilon)(x).$$

Dim. Innanzi tutto, utilizzando i Lemmi 2.1 e 2.7 e procedendo per induzione su k, si vede che per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta

$$\frac{41}{116} p_{4(h+k)+1} \leqslant x_{5k} \leqslant \frac{51}{116} p_{4(h+k)+1}. \tag{2.8.2}$$

Con un semplice calcolo si trova poi che per ogni $k \in \mathbb{N}$, x_{5k}, $x_{5k+1} > 0$ e x_{5k+2}, x_{5k+3}, $x_{5k+4} < 0$.

Veniamo ora alla dimostrazione vera e propria; essa consisterà in un gran numero di maggiorazioni ottenute utilizzando (2.8.2) e i Lemmi, 2.1, 2.2, 2.3 e il Lemma 2.6 di [3]. Distinguiamo 5 casi:

(I) $n = 5k$, $k \in \mathbb{N}$.

$$g^{-}(x_{n+1},\ y_{n+1},\ \varepsilon)(x) = y_{5k} - q_{4(h+k)+1} + \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{(x - x_{5k} - p_{4(h+k)+1})^2 - \varepsilon}$$

$$< y_{5k} + \frac{1}{\sqrt{14}}(x_{5k} - x) + \frac{1}{\sqrt{14}}\Big(p_{4(h+k)+1} - q_{4(h+k)+1}\sqrt{14}$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{2584}{2889}\cdot\frac{1}{(51/116)+1}\cdot\frac{1}{p_{4(h+k)+1}}\Big)$$

$$< y_{5k} + \frac{1}{\sqrt{14}}(x_{5k} - x) + \frac{1}{\sqrt{14}}\Big(\frac{1}{\alpha_2 + (1/\alpha_3)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2584}{2889}$$

$$\cdot\frac{1}{(51/116)+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{13454}{13455}\Big)\cdot\frac{1}{q_{4(h+k)+1}}$$

$$g^{+}(x_n,\ y_n,\ \varepsilon)(x) = y_{5k} + \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(x - x_{5k})^2 + \varepsilon}$$

$$> y_{5k} + \frac{1}{\sqrt{14}}(x_{5k} - x) + \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{6724}{6725}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2584}{2889}\cdot\frac{116}{51}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{13454}{13455}\cdot\frac{1}{q_{4(h+k)+1}}$$

e confrontando i coefficienti di $1/q_{4(h+k)+1}$ si ha quanto voluto.

I casi restanti, $n=5k+1$, $n=5k+2$, $n=5k+3$ e $n=5k+4$, si trattano in modo simile al primo, ottenendo la medesima conclusione.

Lemma 2.9. *Siano* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *e* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $2584/2889 \leqslant \varepsilon < 1$, *e supponiamo che esista* $h \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 2$, *tale che* $(-51/116)p_{4h+1} \leqslant a \leqslant (-41/116)p_{4h+1}$.

Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, *poniamo*

$$(2.9.1) \qquad (\mathring{x}_n, \mathring{y}_n) = \begin{cases} (a, b) & se \quad n=0 \\ (\mathring{x}_{n-1}, \mathring{y}_{n-1}) - (u_{5h+n}, v_{5h+n}) & se \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $x \in [0, \frac{1}{2}]$, *si ha*

$$g^-(\mathring{x}_n, \mathring{y}_n, \varepsilon)(x) < g^+(\mathring{x}_{n+1}, \mathring{y}_{n+1}, \varepsilon)(x).$$

Dim. Si procede come per il Lemma 2.8.

Lemma 2.10. *Siano* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *e* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $2584/2889 \leqslant \varepsilon < 1$, *e supponiamo che esista* $h \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 1$, *tale che* $(-19/61)p_{8h+5} \leqslant a \leqslant (-17/55)p_{8h+5}$.

Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, *poniamo*

$$(2.10.1) \qquad (\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \begin{cases} (a, b) & se \quad n=0 \\ (\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}) - (\bar{u}_{4h+n}, \bar{v}_{4h+n}) & se \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

allora si ha:

(2.10.2) *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $n \not\equiv 0 \pmod 4$, *e per ogni* $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$g^-(\bar{x}_n, \bar{y}_n, \varepsilon)(x) < g^+(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \varepsilon)(x);$$

(2.10.3) *per ogni* $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{41}{116} p_{8(h+k)+9} \leqslant \bar{x}_{4k+1} \leqslant \frac{51}{116} p_{8(h+k)+9};$$

(2.10.4) *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$g^-(\bar{x}_{4k}, \bar{y}_{4k}, \varepsilon)(x) < \bar{y}_{4k+1} + \frac{1}{2} q_{8(h+k)+8} - \frac{1}{\sqrt{14}} (x - \bar{x}_{4k+1} + \frac{1}{2} p_{8(h+k)+8}).$$

Dim. Per quel che riguarda (2.10.2), si prova, per induzione su k, che per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta

$$-\frac{19}{61} p_{8(h+k)+5} \leqslant \bar{x}_{4k} \leqslant -\frac{17}{55} p_{8(h+k)+5} \tag{2.10.5}$$

e poi si procede come nella dimostrazione del Lemma 2.8. Vediamo allora (2.10.3); a causa di (2.10.1) e della Def. 2.5 si ha

$$\bar{x}_{4k+1} = \bar{x}_{4k} - \bar{u}_{4(h+k)+1} = \bar{x}_{4k} - 5p_{8(h+k)+5} - 4p_{8(h+k)+6} + p_{8(h+k)+9}\,.$$

Ora tenuto conto di (2.1.2), (2.7.1) e (2.10.5) si ottiene

$$\bar{x}_{4k+1} \leqslant \left(\left(-\frac{17}{55} - 5 - 4\cdot\frac{299037}{104164}\right)\frac{1}{8\alpha_2+7} + 1\right) p_{8(h+k)+9} \leqslant \frac{51}{116} p_{8(h+k)+9}$$

$$\bar{x}_{4k+1} \geqslant \left(\left(-\frac{19}{61} - 5 - 4\alpha_2\right)\frac{1}{8(333/116)+7} + 1\right) p_{8(h+k)+9} \geqslant \frac{41}{116} p_{8(h+k)+9}$$

come desiderato.

Non resta da dimostrare che la (2.10.4); da (2.10.5) segue

$$32196 \leqslant (17/55)\, p_{8(h+k)+5} \leqslant x - \bar{x}_{4k} \leqslant 1/2 + (19/61)\, p_{8(h+k)+5} \qquad \text{e dunque}$$

$$g^-(\bar{x}_{4k},\ \bar{y}_{4k},\ \varepsilon)(x) = \bar{y}_{4k} - \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(x-\bar{x}_{4k})^2+\varepsilon}$$

$$< \bar{y}_{4k} - \frac{1}{\sqrt{14}}(x-\bar{x}_{4k}) + \frac{4146329664}{4146329665}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\,(1/(x-x_{4k}))$$

$$< \bar{y}_{4k} - \frac{1}{\sqrt{14}}(x-\bar{x}_{4k}) - \frac{1}{\sqrt{14}}\,\frac{4146329664}{4146329665}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2584}{2889}$$

$$\cdot\frac{64392}{64393}\cdot\frac{61}{19}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{9999999998}{9999999999}\cdot\frac{1}{q_{8(h+k)+5}}$$

$$\bar{y}_{4k+1}+\frac{1}{2}q_{8(h+k)+8}-\frac{1}{\sqrt{14}}(x-\bar{x}_{4k+1}+\frac{1}{2}p_{8(h+k)+8})$$

$$=\bar{y}_{4k}-\bar{v}_{4(h+k)+1}+\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{14}\cdot q_{8(h+k)+8}-p_{8(h+k)+8})-\frac{1}{\sqrt{14}}(x-\bar{x}_{4k}+\bar{u}_{4(h+k)+1})$$

$$=\bar{y}_{4k}-2q_{8(h+k)+5}-4q_{8(h+k)+6}+\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha_{8(h+k)+9}\,q_{8(h+k)+8}+q_{8(h+k)+7}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{14}}(x-\bar{x}_{4k})+\frac{1}{\sqrt{14}}(2p_{8(h+k)+5}+4p_{8(h+k)+6})$$

$$>\bar{y}_{4k}-\frac{1}{\sqrt{14}}(x-\bar{x}_{4k})-\frac{1}{\sqrt{14}}(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(7\alpha_1+1)(79921/27839)+6\alpha_1+1}$$

$$-\frac{2}{\alpha_2+(24243/27839)}+\frac{4}{\alpha_3\alpha_2+1})\frac{1}{q_{8(h+5)+5}}$$

e confrontando i coefficienti di $1/q_{8(h+k)+5}$ si ha quanto voluto.

Lemma 2.11. *Siano* $(a,\ b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *e* $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $2584/2889\leqslant\varepsilon<1$, *e supponiamo che esista* $h\in\mathbb{N}$, $h\geqslant 1$, *tale che* $(1/2)p_{8h+5}\leqslant a\leqslant(13/22)p_{8h+5}$.

Se, per ogni $n\in\mathbb{N}$, *poniamo*

$$(\bar{\bar{x}}_n,\ \bar{\bar{y}}_n)=\begin{cases}(a,\ b) & se\quad n=0\\ (\bar{\bar{x}}_{n-1},\ \bar{\bar{y}}_{n-1})+(\bar{\bar{u}}_{4h+n},\ \bar{\bar{v}}_{4h+n}) & se\quad n\geqslant 1\end{cases}\tag{2.11.1}$$

allora si ha:

(2.11.2) *per ogni* $n\in\mathbb{N}$, $n\not\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)$, *e per ogni* $x\in[0,\ \frac{1}{2}]$

$$g^-(\bar{\bar{x}}_{n+1},\ \bar{\bar{y}}_{n+1},\ \varepsilon)(x)<g^+(\bar{\bar{x}}_n,\ \bar{\bar{y}}_n,\ \varepsilon)(x);$$

(2.11.3) *per ogni* $k\in\mathbb{N}$

$$-\frac{51}{116}p_{8(h+k)+13}\leqslant\bar{\bar{x}}_{4k+3}\leqslant-\frac{41}{116}p_{8(h+k)+13};$$

(2.11.4) *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$g^+(\bar{\bar{x}}_{4k+2}, \bar{\bar{y}}_{4k+2}, \varepsilon)(x) > \bar{\bar{y}}_{4k+3} - \frac{1}{2} q_{8(h+k)+12} - \frac{1}{\sqrt{14}}(x - \bar{\bar{x}}_{4k+3} - \frac{1}{2} p_{8(h+k)+12}) .$$

Dim. Analoga a quella del Lemma 2.10.

3 - Determinazione di $M_2(f_{14})$

Sia $f_{14}(x, y) = x^2 - 14y^2$; in questo paragrafo voglio mostrare che $M_2(f_{14}) = 31/32$. Ricordo che sono noti i seguenti fatti:

(3.0.1) $$M(f_{14}) = \frac{5}{4} \qquad \text{(si veda [5] pag. 683)}$$

(3.0.2) $$C = \{P \mid P \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) (\mathrm{mod}\, 1)\} \qquad \text{(si veda [5] e [3])}$$

(3.0.3) $$M_2(f_{14}) \leqslant 1 \qquad \text{(si veda [3] pag. 210).}$$

Ciò detto si ha

Proposizione 3.1. *Siano* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *e* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $2584/2889 \leqslant \varepsilon < 1$, *e supponiamo che esista* $h \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 1$, *tale che* $(41/116)p_{4h+1} \leqslant a \leqslant (51/116)p_{4h+1}$.
Se $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soddisfa le condizioni*

(3.1.1)
$$\xi_1 \in [0, \frac{1}{2}]$$
$$b + \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{(\xi_1 - a)^2 - \varepsilon} < \xi_2 < b + \frac{1}{\sqrt{14}}(a - \xi_1) + \frac{1}{2}(q_{4h} - \frac{1}{\sqrt{14}} p_{4h})$$

allora esiste $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *per cui* $|(\xi_1 + p)^2 - 14(\xi_2 + q)^2| < \varepsilon$.

Dim. Sia $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita secondo (2.8.1); con un calcolo semplice si vede che, per ogni $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\lim_{n \to \infty} g^-(x_n, y_n, \varepsilon)(x) = b + \frac{1}{\sqrt{14}}(a - x) + \frac{1}{2}(q_{4h} - \frac{1}{\sqrt{14}} p_{4h}) .$$

Da ciò e da (3.1.1) segue che esistono degli $n \in \mathbb{N}$ per i quali risulta $g^-(x_n, y_n, \varepsilon)(\xi_1) \geqslant \xi_2$: a questo punto, procedendo come a p. 206 ($2^{\text{ème}}$ $P' \in H_2$) di [3], si ottiene quanto voluto.

Proposizione 3.2. *Siano* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *e* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $2584/2889 \leqslant \varepsilon < 1$, *e supponiamo che esista* $h \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 2$, *tale che* $(-51/116)p_{4h+1} \leqslant a \leqslant (-41/116)p_{4h+1}$.
Se $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soddisfa le condizioni*

$$\xi_1 \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

(3.2.1)

$$b - \frac{1}{\sqrt{14}}(\xi_1 - a) - \frac{1}{2}(q_{4h} - \frac{1}{\sqrt{14}} p_{4h}) < \xi_2 < b - \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{(\xi_1 - a)^2 - \varepsilon}$$

allora esiste $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *per cui* $|(\xi_1 + p)^2 - 14(\xi_2 + q)^2| < \varepsilon$.

Dim. Analoga a quella precedente.

Proposizione 3.3. *Siano* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *e* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $2584/2889 \leqslant \varepsilon < 1$, *e supponiamo che esista* $h \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 1$, *tale che* $(-19/61)p_{8h+5} \leqslant a \leqslant (-17/55)p_{8h+5}$.
Se $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soddisfa le condizioni*

$$(3.3.1)_1 \qquad \xi_1 \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

$$(3.3.1)_2 \qquad b - \frac{1}{\sqrt{14}}(\xi_1 - a) - \frac{1}{2}(q_{8h+4} - \frac{1}{\sqrt{14}} p_{8h+4}) + \frac{1}{8}(q_{8h+5} - \frac{1}{\sqrt{14}} p_{8h+5}) < \xi_2$$

$$(3.3.1)_3 \qquad \xi_2 < b - \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{(\xi_1 - a)^2 - \varepsilon}$$

allora esiste $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *per cui* $|(\xi_1 + p)^2 - 14(\xi_2 + q)^2| < \varepsilon$.

Dim. Sia $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita secondo (2.10.1); ragionando come per la Proposizione 3.1, si vede che esistono degli $n \in \mathbb{N}$ per cui $g^+(\bar{x}_n, \bar{y}_n, \varepsilon)(\xi_1) \leqslant \xi_2$. Sia t il più piccolo di tali n; poiché la seconda disuguaglianza di (3.3.1) si può riscrivere nella forma $g^+(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \varepsilon)(\xi_1) > \xi_2$, risulta $t \geqslant 1$ e

$$(3.3.2) \qquad g^+(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}, \varepsilon)(\xi_1) > \xi_2 .$$

Distinguiamo ora 2 casi:

(I) $t-1 \not\equiv 0 \pmod 4$. Non può essere allora $g^-(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}, \varepsilon)(\xi_1) \geqslant \xi_2$, poiché, a causa di (2.10.2), si avrebbe $g^+(\bar{x}_t, \bar{y}_t, \varepsilon)(\xi_1) > g^-(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}, \varepsilon)(\xi_1) \geqslant \xi_2$ contro la definizione di t. Ne consegue $g^-(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}, \varepsilon)(\xi_1) < \xi_2$ che, assieme a (3.3.2), assicura che $(\xi_1, \xi_2) \in G(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}, \varepsilon)$ come desiderato.

(II) $t-1 \equiv 0 \pmod 4$, vale a dire $t-1=4k$ per un certo $k \in \mathbb{N}$. Se $g^-(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}, \varepsilon)(\xi_1) < \xi_2$ si ha subito quanto voluto; supponiamo al contrario che sia $g^-(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}, \varepsilon)(\xi_1) \geqslant \xi_2$. Da (2.10.4) segue

(3.3.3) $$\xi_2 < \bar{y}_t + \frac{1}{\sqrt{14}}(\bar{x}_t - \xi_1) + \frac{1}{2}\Big(q_{4(2(h+k)+2)} - \frac{1}{\sqrt{14}}(q_{4(2(h+k)+2)}\Big)$$

e dalla definizione di t,

(3.3.4) $$g^-(\bar{x}_t, \bar{y}_t, \varepsilon)(\xi_1) = \bar{y}_t + \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 - \bar{x}_t)^2 - \varepsilon} < \xi_2$$

ed infine da (2.10.3) segue

(3.3.5) $$\frac{41}{116} p_{4(2(h+k)+2)+1} \leqslant \bar{x}_t \leqslant \frac{51}{116} p_{4(2(h+k)+2)+1}\,.$$

Le condizioni (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) assicurano che per $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ e (ξ_1, ξ_2) valgono le condizioni della Proposizione 3.1 e ciò basta per concludere.

Proposizione 3.4. *Siano* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *e* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $2584/2889 \leqslant \varepsilon < 1$, *e supponiamo che esista* $h \in \mathbb{N}$, $h \geqslant 1$, *tale che* $(1/2)p_{8h+5} \leqslant a \leqslant (13/22)p_{8h+5}$. *Se* $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soddisfa le condizioni*

(3.4.1) $$\xi_1 \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

(3.4.2) $$b + \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 - a)^2 - \varepsilon} < \xi_2$$

(3.4.3) $$\xi_2 < b + \frac{1}{\sqrt{14}}(a - \xi_1) + \frac{1}{2}\Big(q_{8h+4} - \frac{1}{\sqrt{14}} p_{8h+4}\Big) + \frac{1}{8}\Big(q_{8h+5} - \frac{1}{\sqrt{14}} p_{8h+5}\Big)$$

allora esiste $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *per cui* $|(\xi_1 + p)^2 - 14(\xi_2 + q)^2| < \varepsilon$.

Dim. Analoga alla precedente.

Proposizione 3.5. *Per ogni* $(\xi_1, \xi_2) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ *che soddisfi le condizioni*

$$(3.5.1) \qquad (\xi_1, \xi_2) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \qquad \xi_2 \neq \frac{3}{8} - \frac{1}{\sqrt{14}}\xi_1$$

esiste $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *per cui* $|(\xi_1 + p)^2 - 14(\xi_2 + q)^2| < \frac{2584}{2889}$.

Dim. Sia $A = \{(0, 0), (1, 0), (9, -2), (-2, 1), (2, 0), (6, -1), (-1079, 289), (-181, 49), (-65, 18)\}$; sono possibili 3 casi:

(I) $(\xi_1, \xi_2) \in H(-1, 0, \frac{2584}{2889})$ oppure $(\xi_1, \xi_2) \in G(a, b, \frac{2584}{2889})$ per qualche $(a, b) \in A$.

(II) $$\xi_2 \geq 18 - \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 + 65)^2 - \frac{2584}{2889}}$$

(III) $$0 \leq \xi_1 \leq \frac{1}{22}\left(88 - 5 \cdot \frac{2584}{2889} - \sqrt{6776 + 14\left(\frac{2584}{2889}\right)^2}\ \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 + 1)^2 + \frac{2584}{2889}} \leq \xi_2 \leq -2 + \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 - 9)^2 - \frac{2584}{2889}}.$$

Esaminiamoli separatamente.

(I) caso: la conclusione è immediata.

(II) caso: con un semplice calcolo si vede che per $(51, -13)$ e (ξ_1, ξ_2) valgono le condizioni della Proposizione 3.1 con $\varepsilon = 2584/2889$, dunque quanto richiesto.

(III) caso: Sia $B = \{(-51, 14), (65, -17), (181, -48), (1079, -288), (-149953, 40077), (-45789, 12238), (-5424, 1450), (-1948, 521), (1528, -408), (5004, -1337), (-969361, 259073), (-162959, 43553),$

$(-58795, 15714)$, $(-36, 10)$, $(-6, 2)\}$. Ci sono 2 possibilità:

(a) $(\xi_1, \xi_2) \in G(a, b, \frac{2584}{2889})$ per qualche $(a, b) \in B$.

(b) $12238 - \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 + 45789)^2 - \frac{2584}{2889}} \leq \xi_2 \leq 1450 - \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 + 5424)^2 + \frac{2584}{2889}}$.

Se si verifica (a) la conclusione è immediata. Se vale (b) con un semplice calcolo si ottiene

$$-15601 + \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 - 58375)^2 - \frac{2584}{2889}} < \xi_2 \tag{3.5.2}$$

$$\xi_2 < 8642 - \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(\xi_1 + 32334)^2 - \frac{2584}{2889}}. \tag{3.5.3}$$

D'altra parte, la seconda di (3.5.1) equivale all'alternativa

$$\xi_2 < \frac{3}{8} - \frac{1}{\sqrt{14}}\xi_1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{3}{8} - \frac{1}{\sqrt{14}}\xi_1 < \xi_2. \tag{3.5.4}$$

Ora da (3.5.2) e dalla prima di (3.5.4) si deduce che per $(58375, -15601)$ e (ξ_1, ξ_2) valgono le condizioni della Proposizione 3.4 con $\varepsilon = 2584/2889$. Viceversa da (3.5.3) e dalla seconda di (3.5.4) segue che $(-32334, 8642)$ e (ξ_1, ξ_2) soddisfano le condizioni della Proposizione 3.3 con $\varepsilon = 2584/2889$ e dunque quanto si voleva.

Proposizione 3.6. *Per ogni* $(\xi_1, \xi_2) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ *tale che*

$$\xi_1 > 0 \qquad \xi_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{\sqrt{14}}\xi_1 \tag{3.6.1}$$

esiste $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *per cui* $|(\xi_1 + p)^2 - 14(\xi_2 + q)^2| < \frac{31}{32}$.

Dim. Si ottiene provando, con un calcolo numerico, che se (ξ_1, ξ_2) soddisfa (3.6.1) allora $(\xi_1, \xi_2) \in G(181, -48, \frac{31}{32})$.

Proposizione 3.7. *Se* $P = (0, \frac{3}{8})$ *si ha,* $M(f_{14}, P) = \frac{31}{32}$.

Dim. Poiché $|(0+6)^2 - 14(3/8 + (-2))^2| = 31/32$ si ha immediatamente $M(f_{14}, P) \leqslant 31/32$. Per concludere la prova basterà mostrare che non esistono $z, w \in \mathbb{Z}$ tali che $|z^2 - 14(3/8 + w)^2| < 31/32$, che equivale a dimostrare che

(3.7.1) non esiste $x + y\sqrt{14} \in \mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ tale che $x + y\sqrt{14} \equiv 3\sqrt{14} \pmod 8$

con $|N(x + y\sqrt{14})| < 62$.

La prova di (3.7.1) segue dal fatto che $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ è a fattorizzazione unica e che i numeri primi 3, 17, 19, 23, 29 sono inerti in $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$.

Proposizione 3.8. *Risulta infine che* $M_2(f_{14}) = \frac{31}{32}$.

Dim. Per ogni $P = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus C$ esiste $P_1 = (x', y') \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tale che $P \equiv P_1 \pmod 1$; se poniamo $P_2 = (|x'|, |y'|)$, risulta allora

(3.8.1) $P_2 \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ $\quad P_2 \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $\quad M(f_{14}, P_2) = M(f_{14}, P_1) = M(f_{14}, P)$.

Per P_2 ci sono allora 3 possibilità:

(I) $P_2 = (0, \frac{3}{8})$: dunque per la Proposizione 3.7 si ha $M(f_{14}, P_2) = \frac{31}{32}$.

(II) $|x'| > 0$ e $|y'| = \frac{3}{8} - \frac{1}{\sqrt{14}}|x'|$: quindi, per la Proposizione 3.6,

$$M(f_{14}, P_2) < \frac{31}{32}.$$

(III) $|y'| \neq \frac{3}{8} - \frac{1}{\sqrt{14}} |x'|$: a causa della Proposizione 3.5,

$$M(f_{14},\ P_2) < \frac{2584}{2889} < \frac{31}{32}.$$

In virtù di (3.8.1) si ha allora $M_2(f_{14}) = 31/32$ come desiderato.

4 - Osservazioni finali

In quest'ultimo paragrafo voglio accennare ai riflessi che i risultati precedenti hanno sull'aritmetica dell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$.

Se indichiamo con $N(\cdot)$ la funzione norma di $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ (che è definita da, $N(x + y\sqrt{14}) = f_{14}(x,\ y) = x^2 - 14y^2$), dalla Proposizione 3.5 segue il

Corollario 4.1. *Per ogni* $a + b\sqrt{14} \in \mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$, *z dispari, esistono* $q + q_1\sqrt{14},\ r + r_1\sqrt{14} \in \mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ *tali che*

$$a + b\sqrt{14} = z(q + q_1\sqrt{14}) + r + r_1\sqrt{14} \quad \textit{con} \quad |N(r + r_1\sqrt{14})| < \frac{2584}{2889} |N(z)|.$$

Per poter utilizzare questo risultato nella prospettiva di [3] occorre modificare lievemente l'ipotesi 4.1 ivi contenuta, sostituendo il coefficiente $(2/3)^{[(i+1)/2]}$ con $(2584/2889)^i$. Con questa attenuazione dell'ipotesi e procedendo esattamente come con quella originale si riesce ancora a dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ è euclideo.

Si può notare allora che il Corollario 4.1 del presente lavoro dice che l'ipotesi così modificata è vera per tutti gli $a + b\sqrt{14} \in \mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ e per tutti gli $z \in \mathbb{Z}$ per i quali il resto $r + r_1\sqrt{14}$ soddisfa anche la condizione $4 \nmid N(r + r_1\sqrt{14})$ e questo è un sensibile miglioramento rispetto a [3].

Bibliografia

[1] W. W. ADAMS and L. J. GOLDSTEIN, *Introduction to number theory*, Englewood Cliffs New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1976.

[2] E. S. BARNES and H. P. F. SWINNERTON-DYER, *The inhomogeneous minima of binary quadratic forms* (I), Acta Math. 87 (1952), 259-323.

[3] E. BEDOCCHI, *L'anneau* $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ *et l'algorithme euclidien*, Manuscripta Math. 53 (1985), 199-216.

[4] Z. I. BOREVITCH et I. R. CHAFAREVITCH, *Théorie des nombres*, Paris, Gauthier-Villars, 1967.

[5] J. HEINHOLD, *Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes*, Math. Z. 44 (1939), 659-688.

[6] O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Stuttgart, Teubner, 1954.

Summary

In this note we determine the second minimum of the quadratic form $x^2 - 14y^2$ *and we prove some results related to the assumption we used in* [3] *to prove that* $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ *is euclidean.*

***