Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989), 159-164

SALVATORE VASSALLO (*)

Un'applicazione della geometria integrale nello spazio affine (**)

Santalò in [1]$_3$ ha dimostrato che l'insieme delle coppie di rette parallele del piano affine è misurabile per i due sottogruppi del gruppo affine generati dalle trasformazioni infinitesime (scritte usando la notazione classica) $[xp+\lambda yq,\ p,\ xq,\ q]$ $(\lambda \neq 0)$ e $[p,\ xq,\ yq,\ q]$, ovvero, in forma compatta, per il sottogruppo $[\mu xq+yq,\ p,\ xq,\ q]$ con $\mu \in \mathbb{R}$ e che rispetto a tale sottogruppo si ha $\mathrm{d}(G_1,\ G_2)=\dfrac{\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}p_2}{|p_1-p_2|^{3-\mu}\,|\cos\varphi|^{\mu+1}}$, dove p_1 e p_2 sono le distanze di G_1 e G_2 dall'origine e φ è l'angolo della direzione di G_i con l'asse x.

D'altra parte in [2] ho dimostrato che l'insieme delle coppie di piani paralleli dello spazio affine è misurabile per il sottogruppo del gruppo affine generato delle trasformazioni infinitesime $[\mu xp+zr,\ yp,\ p,\ xq,\ yq-xp,\ q,\ xr,\ yr,\ r]$, con $\mu \in \mathbb{R}$, e che rispetto tale sottogruppo si ha

$$\mathrm{d}(E_1,\ E_2)=\frac{\mathrm{d}\sigma \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}p_2}{|p_1-p_2|^{4-\mu}\,|\cos\varphi|^{\mu+1}}$$

dove p_1 e p_2 sono le distanze di E_1 e E_2 dall'origine, φ è l'angolo della direzione di E_i con il piano xy e $\mathrm{d}\sigma$ è l'elemento d'area della sfera unitaria corrispondente alla direzione del vettore normale al piano E_i.

Tale risultato, come si vedrà, può essere generalizzato allo spazio affine

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Generale Finanziaria ed Economica, Università Cattolica del S. Cuore, Largo Gemelli 1, I-20133, Milano.

(**) Lavoro finanziato dal M.P.I. (40%-60%). – Ricevuto: 8-V-1989.

n-dimensionale e permette di determinare un invariante (integrale affine) per i corpi convessi.

1 – Sia $\mathscr{A}_n$ lo spazio affine n-dimensionale di coordinate $x_1, \ldots, x_n$. Si vede facilmente che l'insieme di trasformazioni affini definito da

$$(1) \qquad x'_i = a_{ij}x_j + b_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad x'_n = a_{nj}x_j + b_n \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

con $\det[a_{ij}] = a_{nn}^{\mu+1} \neq 0$ $(\mu \in \mathrm{R})$ è un sottogruppo del gruppo affine generale, generato dalle trasformazioni infinitesime

$$\mu x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1, \ 1 \leqslant j \leqslant n, \ i \neq j)$$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (2 \leqslant j \leqslant n-1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Le componenti relative del gruppo (1) sono, con la notazione usuale $[1]_4$, ω_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n-1, \ i \neq j)$, ω_{ii} $(1 \leqslant i \leqslant n)$, ω_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, con la condizione $\mu\omega_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{ii} = 0$ e le equazioni di struttura $d\omega_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$, $d\omega_i = -\sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_k$.

Al fine di dimostrare la misurabilità delle coppie di iperpiani paralleli, poiché il gruppo (1) agisce transitivamente sugli iperpiani non paralleli all'asse x_n, si considerino i due iperpiani $x_n = 0$ e $x_n = 1$ e i loro trasformati mediante una trasformazione (A, B) di (1)

$$H_1 \colon \ \alpha_{n1}(x'_1 - b_1) + \alpha_{n2}(x'_2 - b_2) + \ldots + \alpha_{nn}(x'_n - b_n) = 0$$

$$H_2 \colon \ \alpha_{n1}(x'_1 - b_1) + \alpha_{n2}(x'_2 - b_2) + \ldots + \alpha_{nn}(x'_n - b_n) = 1$$

(ho indicato con $[\alpha_{ij}]$ la matrice inversa di $[a_{ij}]$).

Affinché i due iperpiani H_1 e H_2 restino fissi per una trasformazione $(A + dA, \ B + dB)$ si deve avere $\omega_{ni} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\omega_n = 0$.

Affinché le coppie di iperpiani paralleli siano misurabili deve essere $d(\omega_{n1} \wedge \omega_{n2} \wedge \ldots \wedge \omega_{nn} \wedge \omega_n) = 0$. Ma da $d\omega_{ni} = -\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk} \wedge \omega ki$, $d\omega_n = -\sum_{k=1}^{n} \omega_{nk} \wedge \omega k$, si ottiene

$$d(\omega_{n1} \wedge \omega_{n2} \wedge \ldots \wedge \omega_{nn} \wedge \omega_n) = -\,\omega_{n1} \wedge \omega_{n2} \wedge \ldots \wedge \omega_{nn} \wedge \omega_n \wedge \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \omega_{ii}\Big)$$

$$= -\,\omega_{n1} \wedge \omega_{n2} \wedge \ldots \wedge \omega_{nn} \wedge \omega_n \wedge (\mu\omega_{nn}) = 0\,.$$

Si ha perciò $\quad d(H_1//H_2) = \det[a_{ij}] \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni} d\alpha_{n1} \wedge d\alpha_{n2} \wedge \ldots \wedge d\alpha_{nn} \wedge db_i\,.$

Teorema 1. *Le coppie di iperpiani paralleli sono misurabili per il gruppo* (1) *con densità* $\; d(H_1//H_2) = (a_{nn})^{-\mu-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni}\, d\alpha_{n1} \wedge d\alpha_{n2} \wedge \ldots \wedge d\alpha_{nn} \wedge db_i\,.$

Per dare un'interpretazione geometrica di questo risultato sia φ l'angolo tra la direzione dell'iperpiano H_i e l'iperpiano $x_n = 0$ e sia p_i la distanza dell'iperpiano H_i dall'origine.

L'elemento d'area sull'ipersfera unitaria corrispondente alla direzione del vettore normale all'iperpiano H_i è, posto $\rho = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ni})^2$,

$$d\sigma = \rho^{-n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_{ni}\, d\alpha_{n1} \wedge \ldots \wedge d\alpha_{n,i-1} \wedge d\alpha_{n,i+1} \wedge \ldots \wedge d\alpha_{nn}\,.$$

Poiché $\quad p_1 = \rho^{-1} \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad p_2 = p_1 + \rho^{-1}, \qquad \cos\varphi = \alpha_{nn}\rho^{-1},$ si ha

$$d(H_1//H_2) = \frac{d\sigma \wedge dp_1 \wedge dp_2}{|\cos\varphi|^{\mu+1} |p_2 - p_1|^{n+1-\mu}}$$

ovvero, poiché $d\sigma \wedge dp_1$ è la densità metrica per gli iperpiani,

$$d(H_1//H_2) = \frac{dH_1 \wedge dp_2}{|\cos\varphi|^{\mu+1} |p_2 - p_1|^{n+1-\mu}}$$

2 - Sia K un corpo convesso (compatto) dello spazio n-dimensionale su cui agisce il gruppo (1) e sia $\Delta = \Delta(\sigma)$ il diametro di K corrispondente alla direzione σ (cioè la distanza tra due iperpiani supposto paralleli di normale σ). La misura di

tutte le coppie di iperpiani paralleli che contengono K è data da

$$M = \int \frac{d\sigma \wedge dp_1 \wedge dp_2}{|\cos\varphi|^{\mu+1} |p_2 - p_1|^{n+1-\mu}}.$$

Tale misura, se $\mu < n-1$, può essere scritta

$$M = \frac{1}{(n-1-\mu)(n-\mu)} \int_{\frac{1}{2}E} \frac{d\sigma}{|\cos\varphi|^{\mu+1} \Delta^{n-1-\mu}}$$

dove l'integrale è esteso su metà dell'ipersfera unitaria n-dimensionale. Poiché Δ è limitato e positivo, l'integrale a secondo membro converge se $\mu < 0$ (cosa che supporrò sempre in seguito) e quindi questa misura fornisce la seguente famiglia di invarianti affini di K

$$J_\mu = \int_{\frac{1}{2}E} \frac{d\sigma}{|\cos\varphi|^{\mu+1} \Delta^{n-1-\mu}} = \int_{\frac{1}{2}E} \left|\frac{\Delta}{\cos\varphi}\right|^{\mu+1} \frac{d\sigma}{\Delta^n}.$$

Tale invariante coincide per $\mu = -1$ con quello determinato da Santalò in $[\mathbf{1}]_{1,2,5}$: in effetti in tal caso il gruppo (1) è un sottogruppo del gruppo affine unimodulare da lui considerato.

3 - Esempi

(a) Nel caso piano si hanno i seguenti risultati:

– Un'ellisse è equivalente per il gruppo (1) ad uno e un solo cerchio di raggio $R = (\frac{S}{\pi})^{\mu/(\mu-1)} (\frac{2}{L})^{(\mu+1)/(\mu-1)}$, dove S è l'area dell'ellisse ed L è la lunghezza della protezione dell'ellisse sull'asse x. Sia ha perciò

$$J_\mu = \frac{2}{L} (\frac{4S}{\pi L})^\mu \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{-\mu-1} d\varphi \qquad \text{e quindi} \qquad J_\mu = \frac{2}{L} (\frac{4S}{\pi L})^\mu \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{-\mu-1}{2})}.$$

– Un parallelogramma è equivalente per il gruppo (1) ad uno e un solo quadrato di lato $l=(\frac{S^\mu}{L^{\mu+1}})^{1/(\mu-1)}$ dove S è l'area del parallelogramma e $L=\sqrt{L_1^2+L_2^2}$, dove L_1 e L_2 sono le proiezioni dei lati sull'asse x. Si ha perciò

$$J_\mu=-\frac{2}{\mu L}(\frac{S}{L})^\mu .$$

– Un triangolo è equivalente per le (1) a uno e un solo triangolo equilatero di lato $l=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3})^{1/(\mu-1)}(2S)^{\mu/(\mu-1)}}{(L)^{(\mu+1)/(\mu-1)}}$ dove S è l'area del triangolo e $L=\sqrt{L_1^2+L_2^2+L_3^2}$, dove L_1, L_2, L_3 sono le proiezioni dei lati sull'asse x. Quindi

$$J_\mu=\frac{6^{(\mu+1)/2}\cdot 3(1-2^\mu)S^\mu}{-\mu L^{\mu+1}} .$$

(b) Nel caso dello spazio $\mathscr{A}_3$ si hanno i seguenti risultati:

– Un'ellissoide è equivalente per il gruppo (1) ad una e una sola sfera di raggio $R=(\frac{3V}{4S})^{\mu/(\mu-2)}(\frac{\pi}{S})^{1/(\mu-2)}$, dove V è il volume dell'ellissoide ed S è la superficie della proiezione dell'ellissoide sul piano xy. Si ha perciò

$$J_\mu=(\frac{3V}{2S})^\mu(\frac{\pi^2}{-2\mu S}) .$$

– Un parallelepipedo è equivalente per il gruppo (1) a uno e un solo cubo di lato $l=(\frac{V^\mu}{S^{\mu+1}})^{1/(\mu-1)}$ dove V è il volume del parallelepipedo e $S=\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$, dove S_1, S_2, S_3 sono le superfici delle proiezioni delle facce sul piano xy. Si ha perciò

$$J_\mu=\frac{4}{(\mu-1)\mu S}(\frac{V}{S})^\mu .$$

Bibliografia

[1] L. A. SANTALÒ: [•]$_1$ *Un nuevo invariante afin para las figuras convexas del plano y del espacio*, Math. Notae **17** (1958), 78-91; [•]$_2$ *Two applications of the integral geometry in affine and projective spaces*, Publ. Math. Debrecen **7** (1960), 226-237; [•]$_3$ *Integral geometry of the projective groups of the plane depending on more than three parameters*, An. Stiint. Univ. 'Al. I. Cuza', Iaşi, Sect. Ia Math. (N. S.) **11** B (1965), 307-335; [•]$_4$ *Integral geometry and geometric probability*, Addison-Wesley, Reading 1976; [•]$_5$ *Affine integral geometry and convex bodies*, J. of Microscopy (3) **151** (1988), 229-233.

[2] S. VASSALLO, *Geometria integrale dei gruppi affini dello spazio dipendenti da più di otto parametri*, (in corso di stampa).

Abstract

In this note we consider the density for sets of pairs of parallel hyperplanes with respect to a class of subgroups of general affine group. Then we evaluate the measure of all pairs of parallel hyperplanes which contain a given convex body K: the result is a class of affine invariant of K.

***