Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989), 99-104

A. SCOTTI (*)

Una nuova congettura per gli zeri della funzione Zeta di Riemann (**)

1 - Introduzione

Nell'ambito degli studi effettuati negli ultimi anni sulle proprietà dei sistemi dinamici, sia classici che quantistici, si è considerata una interpretazione quantistica della funzione Zeta di Riemann [4]$_1$, [6]. In tale contesto le parti immaginarie γ_n, degli zeri della Zeta, che, secondo l'ipotesi di Riemann, sono pensati giacere tutti sulla retta $\mathrm{Re}(z) = 1/2$, vengono considerate autovalori dell'energia di un ipotetico operatore Hamiltoniano quantistico, che risulterebbe essere caotico (congettura di Berry). In questo lavoro mostro come, associando questa congettura di Berry ad un'altra mia, proposta di recente [1], [19], si arrivi in modo naturale alla seguente

($\mathscr{Z}$) *le γ_n sono linearmente indipendenti su $\mathscr{Q}$.*

La ($\mathscr{Z}$), se venisse confermata, avrebbe conseguenze interessanti sulla distribuzione dei numeri primi [7].

2 - Ergodicità classica ed ergodicità quantistica

Come è noto [2], la proprietà di ergodicità, per un sistema dinamico classico, caratterizzato da una Hamiltoniana $\mathscr{H}(p_1, p_2, \ldots, p_{\mathscr{N}}; q_1, q_2, \ldots, q_{\mathscr{N}})$

(*) Dipartimento di Fisica, Sezione di Fisica Teorica, Università di Parma, I-43100 Parma.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'I.F.N.M., Sezione di Milano, Gruppo collegato di Parma. – Ricevuto: 20-II-1989.

($\mathcal{N}$ = numero di gradi di libertà) può essere definita nel modo seguente: Il sistema è ergodico, su di una superficie dell'energia $\Sigma_{\mathcal{E}}$, definita dall'equazione

$$\mathcal{H}(p,\ q) = \mathcal{E} \tag{2.1}$$

se e solo se i sottoinsiemi di questa superficie, invarianti rispetto all'evoluzione temporale del sistema, hanno misura (secondo Lebesgue-Liouville) o nulla o uguale a $\mu(\Sigma_{\mathcal{E}})$. Questo comporta che, detto $t_{\mathcal{T}}$ la frazione di tempo durante la quale il sistema rimane in un arbitrario sottoinsieme σ di $\Sigma_{\mathcal{E}}$ di misura $\mu(\sigma) = \mu_0 > 0$, si abbia

$$\lim_{\mathcal{T}\to\infty} t_{\mathcal{T}} = \mu_0\,. \tag{2.2}$$

Von Neumann [**14**], considerò un sistema quantistico, caratterizzato da un operatore Hamiltoniano $\boldsymbol{H}$ avente un insieme discreto di autovalori $\mathcal{E}_n$ ed un sistema di autofunzioni ad essi relative u_n, per il quale cioè vale l'equazione

$$\boldsymbol{H} u_n = \mathcal{E}_n u_n \tag{2.3}$$

e si chiese quale fosse la condizione analoga a quella espressa dalla equazione (2.2). Osservato che, nel corso dell'evoluzione temporale, il vettore di stato (raggio nello spazio hilbertiano), $\psi(t)$, inizialmente uguale a ψ^0, rimane sulla «superficie dell'energia quantistica» (1) $\Sigma^Q_{\langle\mathcal{E}\rangle}$, definita nel modo seguente

$$\Sigma^Q_{\langle\mathcal{E}\rangle} \equiv \{\chi : \chi = \Sigma_n\, a_n u_n,\ \psi_0 = \Sigma_n\, a_n^0 u_n \qquad \text{con} \qquad |a_n| = |a_n^0|\} \tag{2.4}$$

egli cercò le condizioni, sotto le quali, si avesse

$$\lim_{\mathcal{T}\to\infty} t^Q_{\mathcal{T}} = \mu_0 \tag{2.5}$$

dove $t^Q_{\mathcal{T}}$ è la frazione di tempo spesa, nel corso dell'evoluzione temporale dal vettore di stato $\psi(t)$ in un arbitrario sottoinsieme di misura Rμ_0. Tali condizioni

---

(1) Il simbolo $\langle\cdot\rangle$ indica che la statistica, e, quindi, il valore medio dell'energia è uguale per tutti i vettori di stato che appartengono a tale superficie.

risultano essere, sulla base di classici teoremi di Kronecker [12] e di Weyl [21]

$$\Sigma_i p_i \mathcal{E}_i = 0 \Rightarrow p_i = 0 \quad \forall i \ p_i \text{ interi} \tag{2.6}$$

vale a dire, gli autovalori $\mathcal{E}_i$, sono numeri reali linearmente indipendenti su $\mathcal{Q}$. Si può dunque assumere la (2.6) come «condizione di ergodicità quantistica».

Per quanto naturale, nel senso ora illustrato, essa apparve troppo astratta e non adatta a dare fondamento alla meccanica statistica quantistica. In seguito si sono seguite altre vie per dare definizioni che si ritenevano più consone a questo scopo [13], [11]. Nel lavoro [11] si asserisce addirittura che non esisterebbe alcun modo di definire in maniera autonoma, puramente quantistica, senza fare riferimento al limite classico, la condizione di ergodicità o, se si vuole, di «*caos* quantistico». In effetti, in un certo senso, il *caos* quantistico *non* esiste: ricordando che l'evoluzione temporale è data dalla

$$\psi(t) = \Sigma_n a_n(t) u_n = \Sigma_n a_n^0 \exp(-i\mathcal{E}_n t) u_n \tag{2.7}$$

si vede che in Meccanica Quantistica esistono *sempre* infinite «costanti del moto»: $|a_n^0|$. La dinamica quantistica porta ad una geometria dello «spazio delle fasi», per abuso di linguaggio, isomorfa ad un prodotto diretto infinito di (pseudo) tori, per cui la massima ergodicità corrisponde ai moti condizionatamente periodici di un sistema classico di oscillatori armonici disaccoppiati. Questo fatto, visto alla luce delle ben note proprietà di tali sistemi, rende intuitiva la condizione espressa dalla equazione (2.6).

3 - La congettura *A*

Nei lavori [19], [1], si è fatta la seguente congettura:

Dato un sistema dinamico classico (hamiltoniano autonomo) *ergodico*, nel senso di Birkhoff-von Neumann, vale a dire «metricamente transitivo» (su di un conveniente insieme di ipersuperfici dell'energia), se il corrispondente sistema quantistico ha uno spettro discreto di autovalori, E_n ($n = 1, \ldots, \infty$), allora essi sono linearmente indipendenti su $\mathcal{Q}$(vale a dire, in particolare, non vi sono nè degenerazioni nè risonanze).

Ed inoltre: Un sistema dinamico (hamiltoniano autonomo), che sia il limite classico di un sistema quantistico con autovalori discreti e linearmente indipendenti su $\mathscr{Q}$, è *ergodico* nel senso di Birkhoff-von Neumann (su tutte le sue ipersuperfici dell'energia).

4 - La congettura di Berry

Nella letteratura sull'argomento hanno uno spicco particolare i lavori di Berry [18]. Essi sono dedicati sistematicamente all'analisi delle relazioni che sussistono tra le proprietà delle traiettorie di un sistema dinamico classico e le proprietà delle funzioni d'onda (e dello spettro) dei corrispondenti sistemi quantistici. Una nozione caratteristica che viene introdotta è quella di distribuzione statistica delle spaziature dei livelli energetici, $\Delta_n = E_{n+} - E_n$. Si trova, a questo modo, che il carattere caotico del sistema quantistico si può mettere in relazione diretta con le proprietà di questa distribuzione. In particolare essa è simile alla distribuzione delle spaziature degli autovalori di matrici i cui elementi sono distribuiti a caso (*random*) preservando però la unitarietà o l'ortogonalità (*insieme gaussiano ortogonale o unitario*, IGO, IGU).

Nei lavori recenti $[4]_1$ [6], si studia la distribuzione statistica delle spaziature delle parti immaginarie γ_n degli zeri della funzione Zeta di Riemann. Si trova che esse sono distribuite secondo l'insieme IGU e si argomenta che un ipotetico sistema quantistico che abbia le γ_n come autovalori dell'energia, dovrebbe considerarsi *caotico*. Il supporre che le γ_n siano gli autovalori di un qualche operatore lineare è una congettura che sembra essere stata fatta per la prima volta da Hilbert e Polya [10].

5 - La congettura $\mathscr{Z}$

È chiaro, a questo punto, che, se si suppongono corrette entrambe le congetture sopra descritte, le γ_n debbono necessariamente essere indipendenti sui razionali. La letteratura sull'argomento non permette di trarre conclusioni definitive [15].

Studi fatti per $1 \leq n \leq 12$ sono in favore della ($\mathscr{Z}$) [7].

Per concludere vorrei osservare che, indipendentemente dalla sua applicazione al caso della funzione Zeta, la congettura A investe tutta una classe di problemi fisico-matematici (tipicamente i problemi di Dirichlet). Si stabilisce così un legame preciso ed univoco tra l'andamento delle traiettorie classiche e lo spettro degli autovalori per ogni dominio D per cui esistano soluzioni delle equazioni di Hamilton per il bigliardo classico, da una parte, e del problema di Dirichlet (Neuman) dall'altra [16].

Bibliografia

[1] V. AMAR, M. PAURI and A. SCOTTI, *Dynamics Days*, Houston, Texas, Gennaio 1989.

[2] V. A. ARNOLD and A. AVEZ, *Ergodic problems of Classical Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1968.

[3] P. T. BATEMAN, J. W. BROWN, R. S. HALL, K. E. KLOSS and R. M. STEMMLER, *Linear relations connecting the immaginary parts of the zeros of the zeta function* (A.O.L. Atkin and B. J. Birch Eds.) Computers in Number Theory, New York **11** (1971).

[4] M. V. BERRY: $[\bullet]_1$ *Semiclassical theory of spectral rigidity*, Proc. Roy. Soc. London A 400 (1985), 229; $[\bullet]_2$ *Regular and irregular motion*, Topics in Nonlinear Mechanics (S. jorna Ed.), Am. Inst. Phys. Conf. Proc. **46** (1978), 16.

[5] M. V. BERRY and M. TABOR, Proc. Roy. Soc. London A **439** (1976), 101.

[6] M. V. BERRY and H. H. WILLIS, *Riemann's Zeta function: A model for Quantum Chaos?*, Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics-Conf., Proc. Cuernavaca México (1976), T. H. Seligman and H. Nishioka Ed. Lectures Notes in Physics **263** (1987).

[7] E. BOMBIERI, *Comunicazione privata*, Dicembre 1988.

[8] E. BOMBIERI and D. HEJAL (manoscritto in preparazione).

[9] D. A. GOLDSTON and H. L. MONTGOMERY, *Pair correlation of zeros and primes in short intervals*, Proc. 1984 Stillwater, Conf. on Analytic Number Theory and Diophantine Problems, Birkhäuser-Verlag.

[10] D. A. HEJAL, *The Selberg trace formula and the Riemann Zeta function*, Duke Math. J. 43 (1976), 441-482.

[11] N. G. VAN KAMPEN, *Quantum chaos and basis for Statistical Mechanics*, Lectures Notes in Physics, Springer **263** (1987), 309.

[12] L. KRONECKER, Ber. d. Preuss. Akad. Wiss. Zu Berlin (1984), 1071, 1179, 1271.

[13] A. MUNSTER, *Prinzipien der Statistische Mechanick*, Handbuch der Physik, Springer Band III/2 (1959), 176.

[14] J. V. NEUMAN, *Beweis des Ergodensaltzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik*, ZS. f. Phys. **57** (1920), 30.

[15] A. M. ODLYZKO, *On the distribution of spacings between zeros of Zeta function*, Mathematics of Computation 48 (1987), 177-273.

[16] V. PETKOV and L. STOJANOV, *Periods of multiple reflecting geodesics and inverse spectral results*, Amer. Math. J. **109** (1987), 619.

[17] G. M. PROSPERI and A. SCOTTI, *Ergodicity conditions in Quantum Mechanics*, Math. Phys. J. **1** (1960), 218.

[18] P. J. RICHENS and M. V. BERRY, *Pseudointegrable systems in classical and Quantum Mechanics*, Physica **2D** (1981), 495.

[19] A. SCOTTI, *Dynamics days*, Houston, Texas, Gennaio 1988.

[20] R. M. STEMMLER, *Linear relations connecting the immaginary parts of the zeros of the Zeta function*, A.O.L. Atkin and B. J. Birch Eds., Computers in Number Theory, N. Y. **11** (1971).

[21] H. WEYL, Math. Ann. 77 (1915), 313-352.

Summary

The recent interpretation, by Berry, of the imaginary parts of the zeros of the Riemann Zeta function, as eigenvalues of a hypotetical quantum system, which turns out to be chaotic, together with my recent definition of quantum ergodicity leads to the conjecture: «The imaginary parts of the Riemann Zeta function are independent on $\mathcal{Q}$». Comments are also made to the effect that my recent conjectures on the relationship between quantum and classical ergodicity give precise and unambiguous predictions on the spectral properties of a large class of Dirichlet problems.

***