Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14*** (1988), 55-67

RENÉ DEHEUVELS (*)

Quelques applications des algèbres de Clifford à la géométrie

En dépit du théorème pessimiste d'Elie Cartan «Il est impossible d'introduire les champs de spineurs, le mot *spineurs* ayant le sens géométrique que nous lui avons donné, dans la technique riemannienne classique» ([4], II, p. 90), les structures spinorielles et l'opérateur de Dirac $\not{D}$ sont maintenant au coeur même de la géométrie différentielle. $\not{D}$ est une généralisation naturelle de l'opérateur de Cauchy-Riemann et les solutions d'équations du type $\not{D}u = 0$, en particulier les champs de spineurs harmoniques ([**11**], [**9**]) généralisent les fonctions d'une variable complexe. Le laplacien Δ est un opérateur différentiel scalaire du second ordre. $\not{D}$ est une *racine carrée* du laplacien au prix d'une dédiagonalisation: $\not{D}$ est un opérateur différentiel du premier ordre *matriciel*.

Sur un espace pseudoeuclidien affine, on a exactement $\not{D}^2 = \Delta$. Sur une variété riemannienne, on a $\not{D}^2 = \Delta + \frac{1}{4}\chi$ où χ est la courbure scalaire. Le théorème de l'indice fait alors de $\not{D}$ l'instrument le plus puissant pour l'étude des variétés riemanniennes à courbure scalaire positive.

1 - Construction des opérateurs de Dirac

L'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(E)$ d'un espace quadratique (E, q) qui, dans ce qui suit, sera toujours *euclidien*, est définie fontoriellement comme l'algèbre $\boldsymbol{Z}_2$-graduée: $\mathrm{Cl}(E) = \mathrm{Cl}_+(E) \oplus \mathrm{Cl}_-(E)$ quotient de l'algèbre tensorielle $\otimes E$ par l'idéal, homogène pour la $\boldsymbol{Z}_2$-graduation, engendré par les éléments $\{x \otimes x - q(x) \cdot 1;\ \forall x \in E\}$. Dans $\mathrm{Cl}(E)$ $x^2 \equiv q(x) \cdot 1$. Il en résulte que toute variété

(*) Adresse: Département de Mathématiques, Université de Paris VI, Paris, Francia.

riemannienne M se trouve munie naturellement d'un fibré en algèbres $\boldsymbol{Z}_2$-graduées: $\mathrm{Cl}(M) = \mathrm{Cl}_+(M) \oplus \mathrm{Cl}_-(M)$ dont la fibre en un point m est l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(T(M)_m)$ de l'espace tangent, où la forme quadratique est la métrique riemannienne q_m, ou, et c'est techniquement préférable, la forme opposée $(-q_m)$.

Il existe un isomorphisme linéaire naturel φ de l'algèbre extérieure $\wedge E$ sur $\mathrm{Cl}(E)$. L'image $\mathrm{Cl}_p(E)$ de $\wedge^p E$ est le sous-espace des éléments *antisymétriques* d'ordre p de $\mathrm{Cl}(E)$. Dans tout ce qui suit, $(e_1, e_2 \dots e_n)$ désignera une base orthonormale de E. Les $\binom{n}{p}$ produits dans $\mathrm{Cl}(E)$: $\{e_I = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p};\ i_1 < i_2 \dots < i_p\}$ forment une base de $\mathrm{Cl}_p(E)$.

D'autre part, la métrique permet d'identifier E à son dual E^*, et sur la variété riemannienne M, il s'impose pratiquement, pour tout ce qui concerne $\mathrm{Cl}(M)$, d'identifier $T(M)$ à $T^*(M)$, $\wedge T(M)$ à $\wedge T^*(M)$, et de considérer que l'isomorphisme φ détermine un isomorphisme *linéaire* naturel Φ aussi bien de $\wedge T(M)$ que de $\wedge T^*(M)$ sur $\mathrm{Cl}(M)$. Les sections $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathrm{Cl}(M)$ sont les *champs d'éléments de Clifford* sur M et forment une algèbre $\mathscr{C}(M) = \Gamma\,\mathrm{Cl}(M)$. Les champs de vecteurs $X \in \Gamma T(M)$, comme les formes différentielles extérieures $\omega \in \mathscr{A}(M) = \Gamma \wedge T^*(M)$ peuvent donc, par Φ, être considérés comme des champs d'éléments de Clifford sur M.

Les produits, dans $\mathrm{Cl}(E)$, de vecteurs unitaires de l'espace euclidien E, forment le groupe $\mathrm{Pin}(E)$, revêtement d'ordre deux du groupe orthogonal $O(E)$, dont la composante connexe $\mathrm{Spin}(E)$, formé des produits en nombre pair de vecteurs unitaires, donc contenu dans $\mathrm{Cl}_+(E)$, est le revêtement universel du groupe des rotations $SO(E)$ de E. $\mathrm{Cl}_2(E)$, avec le crochet de $\mathrm{Cl}(E)$ est l'algèbre de Lie de $O(E)$ et de $\mathrm{Pin}(E)$.

Le fibré $\mathrm{Cl}(M)$ contient donc des fibrés en groupes $\mathrm{Pin}(M)$ et $\mathrm{Spin}(M)$. L'antiautomorphisme: $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots x_p \to x_p \otimes \dots x_2 \otimes x_1$ de $\otimes E$ passe au quotient et détérmine un automorphisme τ de $\mathrm{Cl}(E)$. Si l'on pose, pour tout $u \in \mathrm{Cl}(E)$, $q(u) = 2^{-n}\,\mathrm{Tr}\, l(u)\, l({}^\tau u) = 2^{-n}\,\mathrm{Tr}\, l({}^\tau u)\, l(u)$ (où $n = \dim E$ et $l(u) =$ translation à gauche par u) on définit sur l'espace vectoriel $\mathrm{Cl}(E)$ une forme quadratique, extension de celle de E. $q(u)$ est aussi la composante suivant l'unité de $u^\tau u$ dans une base e_I de $\mathrm{Cl}(E)$. Les e_I forment une base orthonormale de $\mathrm{Cl}(E)$ et q est euclidienne. Si $g = x_1 x_2 \dots x_p$ est un élément de $\mathrm{Pin}(E)$, ${}^\tau g \cdot g = 1$, d'où $q(g) = 1$. De plus $q(gu) = 2^{-n}\,\mathrm{Tr}\, l({}^\tau u\, {}^\tau g g u) = q(u)$ et de même $q(ug) = q(u)$: les représentations linéaires de $\mathrm{Pin}\, E$ par translation à gauche, à droite, ou automorphismes intérieurs de $(\mathrm{Cl}(E);\ q)$ sont orthogonales.

L'algèbre de Clifford d'un espace quadratique régulier E est semi-simple et possède donc un module fidèle minimal unique à un isomorphisme près, appelé espace des spineurs $S(E)$ de E, où les groupes $\mathrm{Pin}(E)$ et $\mathrm{Spin}(E)$ sont naturellement représentés. En tant que $\mathrm{Cl}(E)$-module à gauche, $S(E)$ est isomorphe à tout idéal à gauche fidèle minimal de $\mathrm{Cl}(E)$ (chacun de ces isomorphisme détermine sur $S(E)$ une métrique euclidienne invariante par $\mathrm{Pin}(E)$ mais qui *n'est pas canoniquement déterminée.*

Les automorphismes intérieurs $u \to gu^{-1}g$ de $\mathrm{Cl}(E)$ par les éléments de $\mathrm{Spin}\, E$ laissent E, et chaque $\mathrm{Cl}_p E$, globalement invariants. En faisant ainsi opérer $\mathrm{Spin}\, E$ dans E, et par translation à gauche dans $\mathrm{Cl}(E)$ ou $S(E)$, la multiplication $\mu : E \otimes \mathrm{Cl}(E) \to \mathrm{Cl}(E)$ ou $E \otimes S(E) \to S(E)$ est un épimorphisme de $\mathrm{Spin}\, E$-modules puisque

$$\mu(g \cdot x \otimes u) = \mu((g \cdot x) \otimes g \cdot u) = gx^{-1} \cdot gu = gxu = g\mu(x \otimes u)\,.$$

D'autre part, l'absence de détermination canonique de $S(E)$ à partir de $\mathrm{Cl}(E)$ (pourtant activement poursuivie par E. Cartan dans sa théorie des spineurs) entraîne l'existence d'une obstruction (la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ de la variété M) à la construction d'un fibré spinoriel $S(M)$ associé à $\mathrm{Cl}(M)$. Faute de pouvoir manipuler de façon satisfaisante les sous-fibrés d'idéaux à gauche de $\mathrm{Cl}(M)$, on se réfère en effet à la construction classique de fibrés associés à un fibré principal: $S(E)$ étant unique à un isomorphisme près, si l'on connait les opérations de $\mathrm{Pin}(E)$ dans $S(E)$, celles de $\mathrm{Cl}(E)$ sont complètement et uniquement déterminées. $w_2(M)$ est donc l'obstruction à la *réduction* du groupe structural $O(E)$ du fibré tangent $T(M)$ $(T(M)_m \approx E)$ à son revêtement $\mathrm{Pin}(E)$. Si $w_2(M) = 0$, il existe autant de fibrés spinoriels distincts que l'espace $H^1(M;\, \boldsymbol{Z}_2)$ contient d'éléments [12], [13], [14]. Chacun d'eux est associé à un fibré principal $\bar{P}(M)$ de group $\mathrm{Pin}(E)$, revêtement d'ordre deux: $\bar{P}(M) \to P(M)$, du fibré principal $P(M)$ des repères orthonormés de $T(M)$. Le choix d'un tel revêtement $\bar{P}(M)$ de $P(M)$, ou ce qui revient au même, d'un fibré spinoriel $S(M)$, qui est alors un $\mathrm{Cl}(M)$-module, définit sur M une structure de *variété spinorielle.* Pour la différentielle covariante riemannienne ∇ sur M

$$\Gamma(\otimes T(M)) \xrightarrow{\nabla} \Gamma T^*(M) \otimes \Gamma(\otimes T(M))$$

le tenseur métrique est parallèle ($\nabla g = 0$). ∇ passe donc au quotient et détermine une dérivation covariante des champs d'éléments de Clifford

$$\Gamma\,\mathrm{Cl}(M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma T^*(M) \otimes \Gamma \mathrm{Cl}(M) \equiv \Gamma T(M) \otimes \Gamma\,\mathrm{Cl}(M)\,.$$

L'algebre $\Gamma \mathrm{Cl}(M)$ opère à droite et à gauche sur $\Gamma T(M) \otimes \Gamma \mathrm{Cl}(M)$, et si u, $v \in \Gamma \mathrm{Cl}(M)$, on a $\nabla(uv) = \nabla u \cdot v + u \cdot \nabla v$. L'antiautomorphisme τ opère sur $\Gamma \mathrm{Cl}(M)$ et ∇ commute avec τ: $(\nabla u)^\tau = \nabla(u^\tau)$. ∇: $\Gamma \mathrm{Cl}_p(M) \to \Gamma T(M) \otimes \Gamma \mathrm{Cl}_p(M)$ préserve les elements antisymétriques.

La métrique sur ClE) détermine un produit scalaire $(u|v)$ entre champs d'éléments de Clifford u, $v \in \Gamma \mathrm{Cl}(M)$, à valeurs dans les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur M, et $\nabla(u|v) = (\nabla u|v) + (u|\nabla v)$.

L'algèbre de Clifford ClE) étant semi-simple, ses dérivations (au sens algébrique) sont intérieures. Les dérivations de $\mathrm{Cl}(E)$ qui respectent E (donc tous les $\mathrm{Cl}_p(E)$) sont les dérivations intérieures par les éléments de l'algèbre de Lie $\mathrm{Cl}_2(E)$.

La forme de courbure $R \in \mathrm{Cl}_2(M) \otimes \wedge^2 T^*(M)$ est obtenue en relevant dans les fibrés l'application de $\Gamma \wedge^2 T(M)$ dans les dérivations de l'algèbre $\Gamma \mathrm{Cl}(M)$:

$$\mathscr{R}(X,\ Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - (\nabla_{\nabla_X Y} - \nabla_{\nabla_Y X})\,.$$

En effet $\mathscr{R}(X, Y)$ est une dérivation de $\Gamma \mathrm{Cl}(M)$ qui annule les fonctions ($\Gamma \mathrm{Cl}_0(M)$) et respecte $\Gamma T(M)$, donc une section de $\mathrm{Cl}_2(M)$.

L'interpretation d'une connexion comme le choix de sous-espaces horizontaux dans un fibré principal, montre que la connexion riemannienne détermine canoniquement une connexion sur $\tilde{P}(M)$ et donc une dérivation covariante ∇ sur le fibré vectoriel associé $\tilde{P}(M) \times_{\mathrm{Pin}(E)} S(E) = S(M)$, qui opère ainsi sur les champs de spineurs: $\Gamma S(M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma T(M) \otimes \Gamma S(M)$.

L'*opérateur de Dirac* $\not{D}$ est alors défini sur $\Gamma \mathrm{Cl}(M)$ et sur $\Gamma S(M)$ comme composé de la dérivée covariante et de la multiplication de Clifford μ, $\Gamma T(M)$ étant considéré comme inclus dans $\Gamma \mathrm{Cl}(M)$:

$$\Gamma \mathrm{Cl}(M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma T(M) \otimes \Gamma \mathrm{Cl}(M) \xrightarrow{\mu} \Gamma \mathrm{Cl}(M)$$

$$\Gamma S(M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma T(M) \otimes \Gamma S(M) \xrightarrow{\mu} \Gamma S(M)$$

Localement un champ de vecteurs X s'écrit $X = \Sigma e_i X^i$ et

$$\nabla_X u = \Sigma X^i \nabla_{e_i} u = \Sigma (X|e_i) \nabla_{e_i} u = X \cdot \Sigma e_i \otimes \nabla_{e_i} u$$

d'ou
$$\nabla u = \Sigma e_i \otimes \nabla_{e_i} u \qquad \not{D} u = (\Sigma e_i \nabla_{e_i})\, u\,.$$

Localement, dans une base orthonormale l'operateur de Dirac s'écrit donc $\not{D} = \Sigma e_i \nabla_{e_i}$ (dans $\Gamma \mathrm{Cl}(M)$ comme dans $\Gamma S(M)$).

Rappelons que l'image de l'opérateur de Dirac $\not{D}$ de $\Gamma\mathrm{Cl}(M)$ dans l'algèbre $\mathcal{A}(M)$ des formes différentielles extérieures est décrite par la

Proposition. *L'isomorphisme linéaire Φ identifie l'opérateur* $(\mathrm{d}-\delta)$ *sur $\mathcal{A}(M)$ à l'opérateur de Dirac $\not{D}$ sur $\Gamma\mathrm{Cl}(M)$ si l'on prend sur $T(M)$ la métrique riemannienne q, et l'opérateur* $(\mathrm{d}+\delta)$ *à $\not{D}$ si l'on prend sur $T(M)$ la métrique opposée* $(-q)$.

$\not{D}$, d et δ ayant une signification intrinsèque et locale, il suffit de comparer $\not{D}$ et $\Phi(\mathrm{d}\pm\delta)$ localement sur un élément décomposable de la forme $\omega=fe^{*1}\wedge\ldots\wedge e^{*p}\equiv fe_1\wedge\ldots\wedge e_p$ où $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sont n champs de vecteurs au voisinage d'un point x, tels que $(\nabla e_k)_x=0$ $\forall k$ et que les vecteurs $(e_{k,x})$ forment une base orthonormale de $T(M)_x$. On a alors, si $\mathrm{d}f=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$, $\mathrm{d}\omega=(-1)^p\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k e_1\wedge e_2\ldots\wedge e_p\wedge e_k$.

Calculons maintenant $\delta\omega$. On a

$$*\omega=fe_{p+1}\wedge\ldots\wedge e_n \qquad \mathrm{d}(*\omega)=\xi_1 e_1\wedge e_{p+1}\ldots\wedge e_n+\ldots+\xi_p e_p\wedge e_{p+1}\ldots\wedge e_n$$

et puisque $(e_j\wedge e_{p+1}\wedge\ldots\wedge e_n)\wedge(e_1\wedge\ldots\hat{e}_j\ldots\wedge e_p)=(-1)^{(n-p)(p-1)+j-1}v$ avec $v=e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n$

$$*\mathrm{d}(*\omega)=(-1)^{(n-p)(p-1)}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}\xi_j e_1\wedge\ldots\hat{e}_j\ldots\wedge e_p$$

et enfin
$$\delta\omega=(-1)^{np+n+1}*\mathrm{d}*\omega=-\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}\xi_j e_1\wedge\ldots\hat{e}_j\ldots\wedge e_p.$$

L'image de ω dans $\mathcal{C}(M)$ est $\Phi\omega=fe_1 e_2\ldots e_p$, et

$$\not{D}(\Phi\omega)_x=(\sum_{j=1}^{n}e_j\nabla_{e_j}\omega)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j e_1 e_2\ldots e_p$$

$$=(-1)^p\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k e_1 e_2\ldots e_p e_k+\sum_{j=1}^{p}q(e_j)(-1)^{j-1}e_1 e_2\ldots\hat{e}_j\ldots e_p$$

d'où le résultat.

Corollaire. *Soit ω une forme différentielle extérieure de degré p sur la variété riemannienne M. Si, considérée comme champ d'éléments de Clifford sur M, on a $\not{D}\omega=0$, ω est une forme harmonique:* $\mathrm{d}\omega=\delta\omega=0$.

En effet, si $\not{D}\omega = 0$, on a $(\mathrm{d} \pm \delta)\omega = 0$ soit, puisque $\mathrm{d}\omega \in \mathcal{A}^{p+1}(M)$ et $\delta\omega \in \mathcal{A}^{p-1}(M)$, $\mathrm{d}\omega = 0$ et $\delta\omega = 0$.

Prenons au voisinage de $m \in M$ n champs de vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$ et soit $\nabla_{e_i, e_j} = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_j}$. On a

$$R(e_i,\ e_j) = \nabla_{e_i,e_j} - \nabla_{e_j,e_i} = \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i}\,.$$

On peut choisir les e_j de telle sorte que les $(e_j)_m$ forment une base orthonormale de $T(M)_m$ et que $(\nabla_{e_i} e_j)_m = 0$ $\forall i, j$. En m

$$\not{D}^2 = \sum_{i,j} e_i e_j \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} = \sum_i e_i^2 \nabla_{e_i}^2 + \sum_{i<j} e_i e_j (\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_j}) = \Sigma e_i^2 \nabla_{e_i,e_i} + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} e_i e_j R(e_i,\ e_j)$$

Si l'on prend sur $T(M)$ la métrique riemannienne, $e_i^2 = 1$, $\forall i$, et $\Sigma e_i^2 \nabla_{e_i,e_i}$ est le laplacien Δ.

D'autre part, $R(e_i,\ e_j) = \sum_{k<l} R_{ijkl}\, e_k e_l$ dans $\mathrm{Cl}_2(M)$. Le terme $\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\, e_i e_j e_k e_l$ est somme de trois composantes dans $\mathrm{Cl}_4(M)$, $\mathrm{Cl}_2(M)$, $\mathrm{Cl}_0(M)$. Le terme de $\mathrm{Cl}_4(M)$ $\frac{1}{12}\Sigma(R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl})\, e_i e_j e_k e_l$ est nul en vertu de la première identité de Bianchi. Le terme de $\mathrm{Cl}_2(M)$, qui s'écrit $\frac{1}{8}\Sigma(R_{ijik} - R_{ikij})\, e_i e_j e_i e_k$ est aussi nul. Le terme de $\mathrm{Cl}_0(M)$ se réduit à la courbure scalaire $\frac{1}{4}\Sigma R_{ijij} = \frac{1}{4}\chi$.

On obtient $\not{D}^2 = \Delta + \frac{1}{4}\chi$. *$\not{D}$ est donc une racine carrée du laplacien à la courbure scalaire près* [11].

2 - Generalisations des fonctions analytiques

Sur l'espace affine euclidien E_n muni d'une base orthonormale e

$$\Delta_{e_j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \Delta_{e_j} e_k = 0 \qquad \forall j,\ k$$

$$\not{D}^2 = \sum_j e_j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot \sum_k e_k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} = \Sigma \frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2} = \Delta\,.$$

L'opérateur *matriciel* $\not{D}$ opérant sur les champs de spineurs ou d'éléments de Clifford, est ici exactement une *racine carrée* de l'opérateur scalaire Δ.

Exemples.

1. Si $n=2$, $\mathrm{Cl}(E_2)\equiv\boldsymbol{R}(2)$ et $S(E_2)\equiv\boldsymbol{R}^2$; E_2 est plongé dans $\mathrm{Cl}(E_2)$ par

$$e_1\to\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad e_2\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et } e_1e_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ s'identifie à } i=\sqrt{-1}.$$

$\not{D}=e_1\dfrac{\partial}{\partial x^1}+e_2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$ opère sur un champ de spineurs s de composantes u, v par

$$\not{D}s=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}.$$

$\not{D}$ est donc l'opérateur de Cauchy-Riemann et les spineurs harmoniques ($\not{D}s=0$) sont les fonctions analytiques $u+iv$ de la variable complexe $x+iy$.

$\not{D}$ opère sur un champ de vecteurs $X=ae_1+be_2$ par

$$\not{D}X=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a & b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial a}{\partial x}+\dfrac{\partial b}{\partial y} & -\left(\dfrac{\partial b}{\partial x}-\dfrac{\partial a}{\partial y}\right)\\ \dfrac{\partial b}{\partial x}-\dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial a}{\partial x}+\dfrac{\partial b}{\partial y}\end{pmatrix}=(\operatorname{div}X)I+(\operatorname{rot}X)\,e_1e_2\,.$$

2. Si $n=3$, $\mathrm{Cl}(E_3)\equiv\boldsymbol{C}(2)$ et $S(E_3)\equiv\boldsymbol{C}^2$; E_3 se plonge dans $\mathrm{Cl}(E_3)$ par les matrices de Pauli

$$e_1\to\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad e_2\to\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad e_3\to\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad e_1e_2e_3=iI\,.$$

$\not{D}$ opère sur un champ de spineurs s de composantes (complexes) $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ par

$$\not{D}s=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y} & -\dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial x}-i\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\end{pmatrix}$$

Les spineurs harmoniques de E_3 ($\not{D}s=0$) sont les généralisations des fonctions analytiques étudiées par Moisil et Théodorescu (cf. [15], [4] I p. 70).

3. E. M. Stein et G. Weiss ([17], p. 171) on défini les équations de *Cauchy-Riemann* associées à une représentation irréductible $g \to R_g$ du groupe Spin(n) dans un espace vectoriel U. C'est le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui exprime que, si u est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur E_n à valeurs dans U, sa différentielle ∇u (identifiée au gradient), qui est une fonction sur E_n à valeurs dans $E_n^* \otimes U \equiv E_n \otimes U$, prend ses valeurs dans le sous-espace $E_n \boxtimes U$ de $E_n \otimes U$, produit de Cartan des représentation ρ de Spin(n) dans E_n (par $x \to gxg^{-1}$ dans $\mathrm{Cl}(E_n)$) et R dans U. Rappelons que le produit de Cartan $E_n \boxtimes U$ est la composante irréductible de $E_n \otimes U$ dont le poids maximal est la somme des poids maximaux de ρ et de R. Nous allons voir que cette condition s'écrit simplement $\not{D} u = 0$ où $\not{D}$ est un opérateur de Dirac.

a) Considérons d'abord le cas le plus simple où $R = \rho$, de poids maximal $(1, 0, 0, \ldots)$. $E_n \otimes E_n$ est somme de trois composantes irréductibles: $\wedge^2 E_n$ de base les $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$, $i<j$, $V^2 E_n$ (tenseurs symétriques de trace nulle) $= E_n \boxtimes E_n$, de poids maximal $(2, 0, 0, \ldots)$ et la représentation triviale P de dimension un. En faisant opérer Spin(n) dans $\mathrm{Cl}(E_n)$ par $u \to gug^{-1}$, la multiplication de Clifford $\mu : E_n \otimes E_n \to \mathrm{Cl}(E_n)$ est un Spin(n)-morphisme d'image $(\mathrm{Cl}_2(E_n) \equiv \wedge^2 E_n) \oplus (\mathrm{Cl}_0(E_n) \equiv P)$ et de noyau $V^2 E_n = E_n \boxtimes E_n$.

L'operateur de Dirac $\not{D}$ sur les fonctions à valeurs dans E_n est $\mu \circ \nabla$, et *dire que $\not{D} u = 0$ équivaut à dire que ∇ prend ses valeurs dans le noyau de μ: $E_n \boxtimes E_n$.* On a alors dans $\mathrm{Cl}(E_n)$

$$\not{D} u = \sum_i e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \Big(\sum_j e_j u_j\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big) \cdot I + \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) e_i e_j$$

d'où un premier ensemble d'équations de Cauchy-Riemann, qui expriment que *le vecteur u est le gradient d'une fonction harmonique* [16]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ \forall i,\ j.$$

Si u est identifié à une forme différentielle ces équations expriment, bien entendu, que $du = 0$ et $\delta u = 0$.

b) Prenons plus généralement pour R la représentation de Spin(n) dans $\wedge^p E_n$ $(0 < p < n)$ obtenue en identifiant $\wedge^p E_n$ à $\mathrm{Cl}_p(E_n) \subset \mathrm{Cl}(E_n)$. C'est la représentation usuelle de $SO(n)$. Le produit tensoriel $E_n \otimes \wedge^p E_n$ est somme de trois composantes irréductibles: $\wedge^{p-1}E_n$, $\wedge^{p+1}E_n$, et enfin $E_n \boxtimes \wedge^p E_n$, qui est de poids maximal $(2, 1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots)$.

En identifiant $\wedge^p E$ à $\mathrm{Cl}_p(E_n)$, la multiplication de Clifford $\mu: E_n \otimes \mathrm{Cl}_p(E_n) \to \mathrm{Cl}(E_n)$ qui est un Spin(n)-morphisme, a pour image $(\mathrm{Cl}_{p-1}(E_n) \equiv \wedge^{p-1}E_n) \otimes (\mathrm{Cl}_{p+1}(E_n) \equiv \wedge^{p+1}E_n)$, et forcément, pour noyau $E_n \boxtimes \wedge^p E_n$ puisqu'aucune composante irréductible de $\mathrm{CL}(E_n)$ n'admet pour poids maximal $(2, 1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots)$. En considérant une fonction u sur E_n à valeurs dans $\wedge^p E_n$ comme une fonction à valeurs dans $\mathrm{Cl}_p(E_n)$, *la condition* $\not{D}u = 0$ *équivaut à dire que* ∇ *prend ses valeurs dans* $E_n \boxtimes \wedge^p E$. En identifiant u à une forme différentielle extérieure, $\not{D}u = 0$ signifie, comme on l'a vu, que $du = 0$ et $\delta u = 0$.

c) Considérons maintenant la représentation spinorielle de Spin(n), irréductible si n est impair, de poids maximal $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$, somme directe de deux représentations irréductibles distinctes: $S(E_n) = S^+(E_n) \oplus S^-(E_n)$, de poids maximaux $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ si n est pair.

La multipication de Clifford $\bar{\mu}: E_n \otimes S(E_n) \to S(E_n)$ est un Spin(n)-morphisme puisque $\bar{\mu}(g \cdot x \otimes s) = \bar{\mu}(gx\overset{-1}{g} \otimes gs) = g \cdot xs = g \cdot \mu(x \otimes s)$.

Si (e_i) est une base orthonormale de E_n, l'application ν de $S(E_n)$ dans $E_n \otimes S(E_n)$: $\nu(s) = \dfrac{1}{n}\Sigma e_i \otimes e_i s$ ne dépend pas de la base choisie et est un Spin(n)-morphisme puisque

$$\nu(gs) = \frac{1}{n}\Sigma e_i \otimes e_i gs = \frac{1}{n}\Sigma(ge_i\overset{-1}{g} \otimes ge_i\overset{-1}{g} \cdot gs) = \frac{1}{n}\Sigma ge_i\overset{-1}{g} \otimes ge_i s = g \cdot \nu(s)\,.$$

On a $\bar{\mu} \circ \nu = \mathrm{Id}(S(E_n))$ et $E_n \otimes S(E_n)$ est somme directe de deux sous-modules $\nu(S(E_n))$, $\mathrm{Ker}\,\bar{\mu}$.

Si n est impair, $\mathrm{Ker}\,\bar{\mu} = E_n \boxtimes S(E_n)$ est irréductible et de poids $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$.

Si n est pair $\mathrm{Ker}\,\bar{\mu} = (E_n \boxtimes S^+(E_n)) \oplus (E_n \boxtimes S^-(E_n))$, que l'on peut noter symboliquement $E_n \boxtimes S(E_n)$.

L'opérateur de Dirac $\not{D}$ opère sur un champs de spineurs s, fonction sur E_n à valeurs dans $S(E_n)$, par $\not{D} = \bar{\mu} \circ \nabla$. *Dire que* ∇s *prend ses valeurs dans* $E_n \boxtimes S(E_n)$ *équivaut à dire que* $\not{D}s = 0$, *c'est-à-dire que le champ de spineurs est harmonique.*

d) La dernière famille de représentations irréductibles usuelles de $O(n)$ (donc de Spin(n)) est formée des représentations irréductibles dont les poids maximaux sont de la forme $(p, 0, 0, \ldots, 0)$. Une telle repésentation est classiquement réalisée comme le sous-espace V^pE_n de $\otimes^pE_n$ que forment les tenseurs symétriques dont *toutes* les traces sont nulles, ou comme l'espace des harmoniques sphériques de degré p. Bien que ces représentations soient éloignées des représentations fondamentales, qui interviennent naturellement dans les structures de Clifford $(\wedge^pE_n, S(E_n))$, on peut leur associer un opérateur du type de Dirac $\not{D}$.

Faisons opérer l'espace euclidien E_n sur le produit tensoriel $\otimes^pE_n$ par une multiplication $\mu : E_n \otimes (V^pE_n) \to E$ (prenant la place de la multiplication de Clifford et inhomogène comme elle). Si $u \in V^pE \subset \otimes^pE$

$$x^*u = \mu(x \otimes \Sigma u_{i_1 i_2 \ldots i_p} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_p})$$

$$= \sum_{i_2 \ldots i_p} (\sum_j x_j u_{j i_2 \ldots i_p} e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}) + \sum_{j, i_1 \ldots i_p} (x_j u_{i_1 i_2 \ldots i_p} - x_{i_1} u_{j i_2 \ldots i_p}) e_j \otimes e_{i_j} \ldots e_{i_p} .$$

μ est un $O(n)$-morphisme et le noyau de $E_n \otimes V^pE_n \to \otimes E_n$ est exactement $V^{p+1}E_n$. Si l'on définit l'opérateur $\not{D}$ sur les fonctions sur E_n à valeurs dans V^pE_n par $\not{D} = \mu \circ \nabla = \Sigma \frac{\partial}{\partial x^i}(e_i^*)$, *la condition u prend ses valeurs dans* $V^{p+1}E_n$ *équivaut à la condition* $\not{D}u = 0$, et l'on montre aisément, que *la condition* $\not{D}u = 0$ *équivaut à la propriété pour u d'être le gradient itéré d'ordre p d'une fonction harmonique H.*

3 - Variétés riemanniennes compactes à courbure scalaire positive

L'un des problèmes de la géométrie différentielle est de découvrir les contraintes qu'impose la topologie d'une variété aux structures métriques qu'elle peut porter.

L'invariant riemannien le plus faible est la courbure scalaire χ et l'on souhaite donc savoir si, comme le tenseur complet de courbure, la courbure sectionelle, ou la courbure de Ricci, elle est liée à la topologie de la variété.

Un premier résultat négatif est le suivant [10]: *sur une variété compacte M de dimension* $\geqslant 3$ *toute fonction numérique* $\mathcal{C}^\infty$ *qui prend en un point de M une valeur* <0 *est la courbure scalaire d'une métrique riemannienne sur M.*

Par contre, il existe des obstructions topologiques à l'existence sur M d'une métrique à courbure scalaire nulle, ou positive ou nulle. Le premier résultat dans ce sens a été obtenu par le rapprochement de deux faits [11] concernant les variétés spinorielles compactes orientés de dimension paire $n = 2p$:

i) *la formule du type de Weitzenböck* démontrée ci-dessus (comparaison de deux laplaciens naturels, le laplacien spinoriel $\not{D}^2$ et le laplacien riemannien Δ) $\not{D}^2 = \Delta + \frac{1}{4}\chi$.

ii) le *théorème de l'indice* [1]. $\not{D}$ est un opérateur elliptique autoadjoint, donc d'indice nul, mais ses restrictions $\not{D}_+$ et $\not{D}_-$ aux champs de spineurs positifs $\Gamma S_+(M)$ resp. négatifs $\Gamma S_-(M)$, sont elliptiques et adjoints l'un de l'autre. Le théorème de l'indice affirme alors que

$$\text{Indice de } \not{D}_+ = \dim(\operatorname{Ker} \not{D}_+) - \dim(\operatorname{Ker} \not{D}_-) = (-1)^p \hat{A}(M)$$

où $\hat{A}(M)$ est le $\hat{A}$-genre de la variété. Le $\hat{A}$-genre est le polynôme en les classes de Pontrjagin déterminé par la *fonction génératrice* produit de p séries formelles

$$\hat{\mathscr{A}} = \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{\frac{x_j}{2}}{\operatorname{Sinh} \frac{x_j}{2}} \right)$$

[Puisque la série $\hat{\mathscr{A}}$ est symétrique et paire en les x_j, ses termes s'expriment à l'aide des fonctions symétriques élémentaires en les x_j^2, qui s'interprètent comme les classes de Pontrjagin p_r. Par exemple, ses termes de degré 2, 4 sont respectivement $-\frac{1}{24}\Sigma x_j^2 = -\frac{p_1}{24}$ et $\frac{1}{5760}(-4p_2 + 7p_1^2)$. Les coefficients successifs sont liés aux nombres de Bernouilli B_k en vertu du développement

$$\frac{x}{\operatorname{Sinh} x} = 1 - (2^2 - 2)\frac{B_1}{2!}x^2 + (2^4 - 2)\frac{B_2}{4!}x^4 \dots + (-1)^k (2^{2k} - 2)\frac{B_k}{(2k)!}x^{2k} \dots$$

où $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, ...

Les classes de Pontrjagin sont des classes de cohomologie de degré pair et l'on a $\hat{A}(M) = 0$ si la dimension de M n'est pas un multiple de 4. La formule de l'indice montre d'ailleurs que si $w_2(M) = 0$, $\hat{A}(M)$ est nécessairement un entier!]

On peut alors faire le raisonnement suivant [11]. Si $\chi > 0$, on ne peut avoir $\not{D}^2 s = (\Delta + \frac{1}{4}\chi)s = 0$ que si $s = 0$: *il n'y a pas de spineurs harmonique non nul.*

L'indice de $\not{D}_+$ *est donc non nul et aussi le* $\hat{A}$*-genre* $\hat{A}(M)$ *de* M. Il en résulte qu'*une variété* M*, compacte, orientée, de dimension paire, telle que* $w_2(M) = 0$ *et* $\hat{A}(M) \neq 0$ *ne peut admettre aucune métrique riemannienne à courbure scalaire* $\chi > 0$.

Exemples

1. Les espaces projectifs quaternioniens $P_k(\boldsymbol{H})$ (de dimension $4k$) sont des variétés spinorielles, dont les métriques standards ont une courbure sectionelle positive, et dont les $\hat{A}$-genres sont nuls.

2. Le plan projectif complexe $P_2(\boldsymbol{C})$ a un $\hat{A}$-genre non nul, et sa métrique standard est à courbure positive, mais ce n'est pas une variété spinorielle ($w_2(P_2(\boldsymbol{C})) \neq 0$).

3. À l'exception des tores, les espaces homogènes de groupes de Lie compacts munis de leurs métriques biinvariantes sont à courbure scalaire $\chi > 0$.
Ceux d'entre eux qui sont des variétés spinorielles ne possèdent, donc aucun spineur harmonique non nul.

4. Les tores ne peuvent porter aucune métrique à courbure scalaire $\chi > 0$. Donc toute métrique sur un tore dont la courbure sclaire χ est positive ou nulle est nécessairement plate.

Plus généralement toute variété compacte possédant une métrique dont la courbure sectionnelle est $\leqslant 0$ ne peut porter de métrique avec $\chi > 0$. Toute métrique pour laquelle $\chi \geqslant 0$ est plate [**6**], [**7**], [**8**].

L'inconvénient évident du résultat précédent est qu'il n'intéresse que les variétés dont la dimension est un multiple de 4.

Une extension du $\hat{A}$-genre a heuresement été trouvée sous la forme d'un homomorphisme $\mathscr{A}$ de l'anneau gradué de cobordisme spinoriel Ω_{Spin} sur l'anneau gradué KO(point) (noté aussi $K\boldsymbol{R}$, périodique et de période 8) surjectif en toutes dimensions, et coïncidant avec le $\hat{A}$-genre en dimension $4k$. Si M est une variété spinorielle compacte possèdant une métrique à courbure scalaire positive, alors le $\hat{\mathscr{A}}$-genre total $\hat{\mathscr{A}}(M)$ est nul [**9**].

Si $\mathscr{S}$ est l'idéal Ker $\hat{\mathscr{A}}$ de l'anneau de cobordisme spinoriel il semble qu'il coïncide avec l'idéal $\mathscr{P}$ que forment les classes de cobordisme des variétés spinorielles *simplement connexes* possèdant une métrique à courbure scalaire positive. De plus, toute variété compacte *simplement connexe* M telle que

$w_2(M) \neq 0$ (donc non spinorielle) de dimension $n \geqslant 5$ possède une métrique à courbure scalaire positive.

Le problème de $\chi > 0$ semble donc résolu pour les variétés compactes simplement connexes. Il ne l'est pas encore pour les variétés non simplement connexes [6] [7] [8].

Bibliographie

[1] M. ATIYAH, *Collected works*, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[2] J. P. BOURGUIGNON, *L'opérateur de Dirac et la géométrie riemannienne*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 44 (1986).

[3] F. BRACKX, R. DELANGHE and F. SOMMEN, *Clifford Analysis*, Pitman, Boston, 1982.

[4] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs* (I), (II), Hermann, Paris 44, 1938.

[5] R. DEHEUVELS, *Formes quadratiques et groupes classiques*, Presses Univ. France, Paris, 1981.

[6] M. GROMOV and H. B. LAWSON, *Spin and scalar curvature in presence of a fundamental group* (I), Ann. of Math. **111** (1980).

[7] M. GROMOV and H. B. LAWSON, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math. **111** (1980).

[8] M. GROMOV and H. B. LAWSON, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci., Bures-sur-Yvette, 1983.

[9] N. HITCHIN, *Harmonic spinors*, Adv. in Math. **14** (1974).

[10] G. KAZDAN and F. WARNER, *Prescribing curvature*, Proceedings of Symposium in pure Math. **27** (1975).

[11] A. LICHNEROWICZ, *Laplacien sur une variété riemannienne et spineurs*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. 33 (1962).

[12] J. W. MILNOR, *Spin structures on manifolds*, Enseign. Math. **9** (1963).

[13] J. W. MILNOR, *Remarks concerning Spin-manifolds, in differential an combinatorial topology*, A symposium in honor of M. Morse, S. S. Cairns ed., Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.

[14] J. W. MILNOR and J. D. STASHEFF, *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies **76**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.

[15] G. MOISIL et N. THEODORESCU, *Fonctions holomorphes dans l'espace*, Matematica 5 (1931).

[16] E. M. STEIN, *Conjugate harmonic functions in several variables*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Stockholm, 1962.

[17] E. M. STEIN and G. WEISS, *Generalization of the Cauchy-Riemann equations and representation of the rotation group*, Amer. J. Math. **90** (1968).

[18] H. WEYL, *Classical group*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.