Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 421-433

ANTONELLA FIACCA (*)

Sull'integrale di Burkill-Cesari per funzioni di insieme a valori in spazi di Banach (**)

1 - Introduzione

L. Cesari in $[4]_{1,2}$ ha definito, per funzioni di insieme $\varphi: \{I\} \to \boldsymbol{R}^n$, ove $\{I\}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme o spazio topologico A, un integrale, noto nella letteratura come integrale di Burkill-Cesari.

Successivamente G. Warner in [7] ha esteso, a funzioni di insieme a valori in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di Hausdorff E, l'integrale di Burkill-Cesari, operando però in una assiomatica più generale di quella assunta da L. Cesari. Questo nuovo integrale, chiamato dall'Autore integrale «forte» alla Burkill-Cesari, ovviamente contiene, come caso particolare, l'integrale di Burkill-Cesari. Nello stesso lavoro G. Warner, mantenendosi nell'assiomatica da lui introdotta, ha inoltre definito un altro integrale come funzionale lineare sul duale topologico di E, chiamandolo integrale «debole» alla Burkill-Cesari.

In [2] P. Brandi e A. Salvadori, operando nell'assiomatica di Warner, hanno studiato alcune proprietà di questo integrale «debole», nonché dell'integrale «forte» alla Burkill-Cesari per funzioni di insieme a valori in uno spazio di Banach. I suddetti Autori hanno poi introdotto il concetto di *quasi additività debole*, sufficiente ad assicurare l'esistenza dell'integrale «debole» alla Burkill-

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Vanvitelli 1, I-06100 Perugia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). - Ricevuto: 25-XI-1987.

Cesari (cfr. [2], Proposizione 2). Hanno inoltre provato che i due concetti di *quasi additività* e di *quasi additività debole* in A vengono conservati nei sottoinsiemi di A, ove si supponga, nel primo caso, che $\int_A \|\varphi\| < +\infty$ (cfr. [2], Proposizione 7) e, nel secondo caso, che $\overset{*}{\int_A} \|\varphi\| < +\infty$ (cfr. [2], Corollario 1): in queste condizioni, l'integrale «forte» e l'integrale «debole» esistono, rispettivamente, in ogni sottoinsieme di A.

Questo risultato era stato fornito da J. C. Breckenridge in [3], il quale si era mantenuto però nella più stringente assiomatica di L. Cesari e aveva operato nella classe delle funzioni $\varphi\colon \{I\} \to \boldsymbol{R}^n$. A. Averna e C. Lodovici in $[1]_1$ hanno pure studiato il problema della conservazione della *quasi additività* nei sottoinsiemi di A: a questi Autori, che hanno però operato in una assiomatica diversa da quella assunta da L. Cesari in $[4]_{1,2}$, la *quasi additività* della φ basta da sola ad assicurare la *quasi additività* della φ nei sottoinsiemi di A.

Noi qui, operando nella stessa assiomatica di [2], dopo aver esteso a funzioni di insieme φ a valori in uno spazio di Banach il concetto di *quasi additività in senso debole* (concetto già fornito in $[1]_2$ da A. Averna e C. Lodovici per funzioni $\varphi\colon \{I\} \to \boldsymbol{R}^n$) e introdotto il concetto di *debole quasi additività in senso debole*, abbiamo provato due teoremi di esistenza per l'integrale «forte» e per l'integrale «debole» alla Burkill-Cesari (cfr. Teorema I e Teorema II). I nostri teoremi di esistenza contengono strettamente le Proposizioni 1 e 2 fornite in [2] (cfr. qui Osservazione I).

Ci siamo posti inoltre il problema di studiare se i due concetti di *quasi additività in senso debole* e di *debole quasi additività in senso debole* in A si conservano anche essi nei sottoinsiemi di A ove si supponga, rispettivamente, come in [2], che l'integrale $\int_A \|\varphi\|$ esista in $\boldsymbol{R}$ o che sia $\overset{*}{\int_A} \|\varphi\| < +\infty$. Nell'Esempio I e nell'Osservazione II abbiamo provato che la risposta al nostro problema è negativa in entrambi i casi.

Supponendo poi che la funzione φ sia «debolmente» («fortemente») integrabile alla Burkill-Cesari sui sottoinsiemi di A, abbiamo studiato alcune proprietà delle «funzioni integrali» che hanno così origine dai due integrali «debole» e «forte» (cfr. Lemma I, Teorema IV e Teorema V).

Osserviamo che il Teorema IV e il Lemma I di qui contengono rispettivamente il Teorema III e il Teorema I conseguiti in [5] (cfr. qui Osservazione IV).

Vogliamo osservare, infine, che, se gli insiemi $I \in \{I\}$ sono *compatti*, il Corollario 2 e la Proposizione 13 di [2] risultano contenuti nel Teorema IV e nel Teorema V (cfr. Osservazione III e Osservazione V).

2 – Sia A un insieme o spazio topologico; siano $\{I\}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di A, $\mathscr{D}=\{D\}$ una famiglia di sistemi finiti $D=[I_1, \ldots, I_N]$ di insiemi $I \in \{I\}$ con le proprietà (cfr. $[4]_1$, § 1):

(b_1) *se A è un insieme, per ogni I, $J \in D$, si ha*

$$I \neq J \Rightarrow I \cap J = \emptyset \; ;$$

(b_2) *se A è uno spazio topologico, ciascun insieme $I \in D$ è dotato di punti interni e risulta*

$$\mathring{I} \cap \hat{J} = \hat{I} \cap \mathring{J} = \mathring{I} \cap \mathring{J} = \emptyset \text{ (1)} \qquad \forall I,\; J \in D \qquad I \neq J\,.$$

Sia ora $T(\gg)$ un insieme diretto e ad ogni $t \in T$ sia associato un sistema finito $D_t \in \mathscr{D}$. Denotato con $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e con $(E^*, \|\cdot\|^*)$ il duale topologico di E, consideriamo una funzione di insieme $\varphi\colon \{I\} \to E$. Posto, per ogni $M \subset A$ (cfr. [2], § 2)

$$S[\varphi, M, D_t] = \sum_{I \in D_t} s(I, M)\,\varphi(I) \qquad \text{ove} \qquad s(I, M) = \begin{cases} 0 & \text{se } I \not\subset M \\ 1 & \text{se } I \subset M \end{cases} \tag{2.1}$$

diremo che la funzione φ è *fortemente integrabile alla Burkill-Cesari su M* se esiste il $\lim\limits_T S[\varphi, M, D_t]$ e, in tal caso, poniamo

$$\int_M \varphi = \lim_T S[\varphi, M, D_t]\,. \tag{2.2}$$

Diremo inoltre (cfr. [2], § 2) che la funzione φ è *debolmente integrabile alla Burkill-Cesari su M* se, per ogni $z \in E^*$, esiste finito il limite $\lim\limits_T S[\langle z, \varphi\rangle, M, D_t]$ (2) e, in tal caso, l'elemento del duale algebrico di E^*, che a ogni $z \in E^*$ fa corrispondere il numero $\int_M \langle z, \varphi\rangle$, sarà chiamato *integrale debole alla Burkill-Cesari* e indicato con il simbolo ${}_{(w)}\int_M \varphi$.

---

(1) Gli apici ° e ^ stanno ad indicare che di un insieme si considera rispettivamente l'apertura o la frontiera nella topologia di A.

(2) Con $\langle z, \varphi\rangle$ indichiamo la funzione che ad ogni $I \in \{I\}$ fa corrispondere il numero reale $z(\varphi(I))$, che sarà indicato con $\langle z, \varphi(I)\rangle$.

È ovvio che una funzione φ fortemente integrabile alla Burkill-Cesari su M è debolmente integrabile alla Burkill-Cesari su M e i due integrali coincidono, mentre l'implicazione inversa non sussiste in generale (cfr. [2], Esempio 2).

Diremo che la funzione φ è *quasi additiva in senso debole* (3) *in* $M \subset A$, se

($\tilde{\varphi}$) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *esistono* $t_0 = t_0(\varepsilon, M)$ *e* $t_1 = t_1(\varepsilon, M) \in T$ *tali che, per ogni* $t \in T$, *con* $t \gg t_1$, *si ha*

$$(\tilde{\varphi}_1) \qquad \sum_I s(I, M) \| \sum_J s(J, I) \varphi(J) - \varphi(I) \| < \varepsilon$$

$$(\tilde{\varphi}_2) \qquad \sum_J s(J, M) [1 - \sum_I s(J, I) s(I, M)] \| \varphi(J) \| < \varepsilon$$

con $D_{t_0} = [I] \in \mathscr{D}$ *e* $D_t = [J] \in \mathscr{D}$.

Diremo poi che la funzione φ è *debolmente quasi additiva in senso debole in M* se, per ogni $z \in E^*$, la funzione $\langle z, \varphi \rangle$ è *quasi additiva in senso debole in M.*

Sussiste il seguente

Teorema I. *Se* $\varphi: \{I\} \to E$ *è una funzione quasi additiva in senso debole in* $M \subset A$, *essa è fortemente integrabile alla Burkill-Cesari su M.*

Omettiamo la dimostrazione poiché del tutto simile a quella fornita da A. Averna e C. Lodovici per conseguire il Teorema I di [1]$_2$.

Come immediata conseguenza del Teorema I si ha il seguente

Teorema II. *Se* $\varphi: \{I\} \to E$ *è una funzione debolmente quasi additiva in senso debole in* $M \subset A$, *essa è debolmente integrabile alla Burkill-Cesari su M.*

Osservazione I. Facciamo osservare che i nostri Teoremi I e II contengono strettamente le analoghe Proposizioni 1 e 2 di [2]. Infatti l'ipotesi di *quasi additività in senso debole* da noi utilizzata nel Teorema I contiene strettamente l'ipotesi di *quasi additività* di cui nella Proposizione 1 di [2] (cfr. Osservazione I di [1]$_2$). Lo stesso confronto si può fare fra il nostro Teorema II e la Proposizione 2 di [2].

---

(3) Il concetto di *quasi additività in senso debole* è stato fornito per la prima volta da A. Averna e C. Lodovici in [1]$_2$. La definizione dei citati Autori però, oltre a riferirsi alle funzioni $\varphi: \{I\} \to \boldsymbol{R}^n$, è data in un contesto meno generale (cfr. assiomi (d$_1$) e (d$_2$) di [1]$_2$).

Dimostriamo ora che il concetto di *quasi additività in senso debole* è più stringente di quello di *debole quasi additività in senso debole*, sopra introdotto. Sussiste infatti il seguente

Teorema III. *Se la funzione* $\varphi\colon \{I\} \to E$ *è quasi additiva in senso debole in* $M \subset A$, *essa è debolmente quasi additiva in senso debole in* M.

Fissati infatti $z \in E^*$ $(z \neq 0)$ e un numero $\varepsilon > 0$, siano $t_0 = t_0(\frac{\varepsilon}{\|z\|^*}, M)$ e $t_1 = t_1(\frac{\varepsilon}{\|z\|^*}, M)$ gli elementi di T determinati come in $(\tilde{\phi})$. Per ogni $t \in T$, con $t \gg t_1$, siano $D_t = [J]$ e $D_{t_0} = [I]$ due sistemi finiti di $\mathscr{D}$. Risulta allora

$$\begin{aligned}(2.3)\qquad & \sum_I s(I, M) \Big| \sum_J s(J, I) \langle z, \varphi(J) \rangle - \langle z, \varphi(I) \rangle \Big| \text{ (4)} \\ & = \sum_I s(I, M) \Big| \langle z, \sum_J s(J, I) \varphi(J) - \varphi(I) \rangle \Big| \\ & \leq \|z\|^* \sum_I s(I, M) \Big\| \sum_J s(J, I) \varphi(J) - \varphi(I) \Big\| .\end{aligned}$$

Tenendo presente la $(\tilde{\phi}_1)$, si ha intanto

$$(2.4)\qquad \sum_I s(I, M) \Big| \sum_J s(J, I) \langle z, \varphi(J) \rangle - \langle z, \varphi(I) \rangle \Big| < \|z\|^* \frac{\varepsilon}{\|z\|^*} = \varepsilon .$$

Poiché la φ verifica anche $(\tilde{\phi}_2)$, si ha inoltre

$$\begin{aligned}(2.5)\qquad & \sum_J s(J, M) [1 - \sum_I s(J, I) s(I, M)] \, | \langle z, \varphi(J) \rangle | \\ & \leq \|z\|^* \sum_J s(J, M) [1 - \sum_I s(J, I) s(I, M)] \, \|\varphi(J)\| < \|z\|^* \frac{\varepsilon}{\|z\|^*} = \varepsilon\end{aligned}$$

e pertanto la funzione $\langle z, \varphi \rangle$ è *quasi additiva in senso debole* in M.

Tale proposizione non è invertibile. Infatti, se lo fosse, poiché una funzione *quasi additiva debolmente* (cfr. [2], Definizione 2) è *debolmente quasi additiva in senso debole* (cfr. [1]$_2$, Osservazione I), la *quasi additività debole* implicherebbe

(4) Con $|a|$ denotiamo qui il valore assoluto del numero reale a.

la *quasi additività in senso debole*: ciò è assurdo, ove si tenga presente che la *quasi additività in senso debole* implica l'esistenza dell'integrale «forte» (cfr. qui Teorema I), mentre di tale proprietà non gode la *quasi additività debole* (cfr. Esempio 2 di [2]).

Mostriamo ora che, mentre i concetti di *quasi additività* e di *quasi additività debole* sono conservati nei sottoinsiemi dello spazio A, con l'aggiunta, nel primo caso, dell'ipotesi che l'integrale della funzione $\|\varphi\|$ su A esista in $\boldsymbol{R}$ (cfr. Proposizione 7 di [2]) e, nel secondo caso, che $\overset{*}{\int_A} \|\varphi\| < +\infty$ (cfr. Corollario 1 di [2]), i concetti di *quasi additività in senso debole* e di *debole quasi additività in senso debole* non godono di questa proprietà, come risulta dal seguente

Esempio I. Sia $A = [0,\ 1]$, con la topologia usuale; sia poi $\{I\}$ la famiglia degli intervalli di A e $\mathscr{D}$ la famiglia delle divisioni di A, così costruite:

$$D_{0,0} = \{0,\ 1\} \qquad D_{1,1} = \{0,\ \frac{1}{2},\ 1\} \qquad D_{2,1} = \{0,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{2}{2^2},\ \frac{3}{2^2},\ 1\}$$

$$D_{3,1} = \{0,\ \frac{1}{2^3},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{4}{2^3},\ \frac{5}{2^3},\ \frac{7}{2^3},\ 1\} \qquad D_{4,1} = \{0,\ \frac{1}{2^4},\ \frac{3}{2^4},\ \frac{4}{2^4},\ \ldots,\ \frac{13}{2^4},\ \frac{15}{2^4},\ 1\}$$

$$D_{4,2} = \{0,\ \frac{1}{2^4},\ \frac{2}{2^4},\ \frac{3}{2^4},\ \frac{5}{2^4},\ \ldots,\ \frac{11}{2^4},\ \frac{13}{2^4},\ \ldots,\ 1\}$$

$$D_{4,3} = \{0,\ \frac{1}{2^4},\ \ldots,\ \frac{5}{2^4},\ \frac{7}{2^4},\ \frac{8}{2^4},\ \frac{9}{2^4},\ \frac{11}{2^4},\ \ldots,\ 1\} \quad \ldots .$$

Sia $\delta\colon \mathscr{D} \to \boldsymbol{R}^+$ la funzione *mesh* (cfr. $[4]_1$, § 1) definita da $\delta(D) = \max\limits_{I \in D} |I|$ (5) .

Osserviamo che la famiglia $\mathscr{D}$ è un insieme diretto, essendo la direzione definita da: $D_1 \gg D_2$ se $\delta(D_1) < \delta(D_2)$.

Denotate con $\mathscr{T}_s$ e $\mathscr{T}_d$ le famiglie di intervalli

$$\mathscr{T}_s = \{(\frac{2m-1}{2^n},\ \frac{2m+1}{2^n}),\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^{n-2}-1,\ n = 3,\ 4,\ \ldots\}$$

$$\mathscr{T}_d = \{(\frac{2m-1}{2^n},\ \frac{2m+1}{2^n}),\ m = 2^{n-2}+1,\ \ldots,\ 2^{n-1}-1,\ n = 3,\ 4,\ \ldots\}\ ,$$

(5) Con $|I|$ denotiamo la lunghezza dell'intervallo I.

sia $\varphi\colon \{I\} \to \boldsymbol{R}$ la funzione definita ponendo

$$\varphi(I) = \begin{cases} 1 & \text{se } I \in \mathscr{T}_s\,, \\ -1 & \text{se } I \in \mathscr{T}_d\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Tale funzione è *quasi additiva in senso debole* in A. Fissato infatti $\varepsilon > 0$, sia $D_{t_0} = D_{0,0} = [I]$. Per ogni $D_t = [J] \in \mathscr{D}$, si ha

$$(\tilde{\phi}_1) \qquad \sum_I s(I,\ A)\,|\sum_J s(J,\ I)\,\varphi(J) - \varphi(I)| = 0 < \varepsilon$$

mentre la $(\tilde{\phi}_2)$ è banalmente verificata poiché $J \subset I$, $\forall J \in D_t$. Risulta inoltre $\int_A |\varphi| = 2$.

La φ non è però *quasi additiva in senso debole* in $M = [0,\ 1/2]$. Sia infatti $\varepsilon = 1/2$. Se $D_{t_0} \neq D_{1,1}$ e $\lambda > 0$ è fissato arbitrariamente, esiste una divisione $D = [J] \in \mathscr{D}$ con $\delta(D) < \lambda$ tale che

$$\sum_J s(J,\ M)\,[1 - \sum_J s(J,\ I)\,s(I,\ M)]\,|\varphi(J)| = 1$$

e pertanto non è verificata la $(\tilde{\phi}_2)$.

Se $D_{t_0} = D_{1,1}$, per ogni $\lambda > 0$ esiste $D_t = [J] \in \mathscr{D}$, con la proprietà

$$\sum_I s(I,\ M)\,|\sum_J s(J,\ I)\,\varphi(J) - \varphi(I)| = 1\ ,$$

e quindi non è verificata la $(\tilde{\phi}_1)$.

Osservazione II. È immediato provare che i concetti di *quasi additività in senso debole* e di *debole quasi additività in senso debole* coincidono se, in particolare, consideriamo funzioni a valori reali. È allora evidente, tenendo presente l'Esempio I, che nemmeno il concetto di *debole quasi additività in senso debole* in A può trasmettersi ai sottoinsiemi di A, pur esistendo finito l'integrale $\int_A \|\varphi\|$.

Supponiamo ora che $(A,\ \mathscr{G})$ sia uno spazio topologico e che gli insiemi $I \in \{I\}$ siano *compatti* e *connessi*.

Sussiste il seguente

Lemma I.[6] *Sia* $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una successione di insiemi* $G_i \in \mathscr{G}$, $G_i \subset G_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, *e* $\lim\limits_{i\to+\infty} G_i = G_0$. *La funzione* φ *sia fortemente integrabile alla Burkill-Cesari in ogni* G_i $(i=0,\ 1,\ \ldots)$ *e goda della proprietà* $(\bar{\phi}_2)$ *in* G_0. *In queste condizioni risulta* $\lim\limits_{i\to+\infty} \int\limits_{G_i} \varphi = \int\limits_{G_0} \varphi$.

Poiché la φ è fortemente integrabile in ogni G_i, è possibile determinare $\tilde{t} = \tilde{t}(\varepsilon/3,\ G_0)$ e $t_i = t_i(\varepsilon/3,\ G_0) \in T$ in modo che risulti

$$\left\| \int\limits_{G_0} \varphi - S[\varphi,\ G_0,\ D_t] \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall t \gg \tilde{t} \tag{2.6}$$

$$\left\| \int\limits_{G_i} \varphi - S[\varphi,\ G_i,\ D_t] \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall t \gg t_i\ . \tag{2.7}$$

D'altra parte, poiché la φ ha la proprietà $(\bar{\phi}_2)$ in G_0, esistono $t_0 = t_0(\varepsilon/3,\ G_0)$ e $\bar{t} = \bar{t}(\varepsilon/3,\ G_0) \in T$ tali che, per ogni $t \in T$, con $t \gg \bar{t}$, risulti

$$\sum_J s(J,\ G_0)\left[1 - \sum_I s(J,\ I)\, s(I,\ G_0)\right] \|\varphi(J)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.8}$$

con $D_{t_0} = [I]$ e $D_t = [J] \in \mathscr{D}$.

Essendo inoltre gli insiemi $I \in \{I\}$ compatti e $\lim\limits_{i\to+\infty} G_i = G_0$, esiste un numero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\bigcup_{\substack{I\in D_{t_0}\\ I\subset G_0}} I \subset G_i \qquad \forall i \geqslant \bar{n}\ . \tag{2.9}$$

Fissato ora $i \geqslant \bar{n}$, sia $t \in T$, $t \gg \tilde{t}$, $t \gg t_i$, $t \gg \bar{t}$ e $D_t = [J] \in \mathscr{D}$.

Risulta intanto

$$\left\| \int\limits_{G_0} \varphi - \int\limits_{G_i} \varphi \right\| \leqslant \left\| \int\limits_{G_0} \varphi - \sum_J s(J,\ G_0)\varphi(J) \right\| + \left\| \sum_J s(J,\ G_0)\varphi(J) - \int\limits_{G_i} \varphi \right. \tag{2.10}$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_{G_0} \varphi - \sum_J s(J,\ G_0)\varphi(J) \right\| + \left\| \sum_J s(J,\ G_i)\varphi(J) - \int\limits_{G_i} \varphi \right\| + \sum_J s(J,\ G_0)[1 - s(J,\ G_i)] \|\varphi(J)\| .$$

---

[6] Facciamo osservare che il Lemma I sussiste anche se gli insiemi $I \in \{I\}$ non sono connessi.

Poiché dalla (2.8), tenendo presente la (2.9), si ha

$$\sum_J s(J,\ G_0)\left[1-s(J,\ G_i)\right]\|\varphi(J)\|<\frac{\varepsilon}{3}\ ; \tag{2.11}$$

dalle (2.10), (2.6), (2.7) e (2.11) segue infine

$$\Big\|\int_{G_0}\varphi-\int_{G_i}\varphi\Big\|<\varepsilon \qquad \forall i\geqslant\bar{n} \tag{2.12}$$

e quindi
$$\lim_{i\to+\infty}\int_{G_i}\varphi=\int_{G_0}\varphi.$$

Siamo ora in grado di provare il seguente

Teorema IV. *Sia $\{G_i\}_{i\in\mathrm{N}}$ una successione di insiemi di $\mathscr{G}$, a due a due disgiunti, con $G_0=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$, e la funzione φ verifichi le ipotesi del Lemma* I. *In tali condizioni si ha $\int_{G_0}\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{G_i}\varphi$.*

Poniamo intanto $F_n=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$. Poiché gli insiemi $I\in\{I\}$ sono connessi, per ogni sistema finito $D_t\in\mathscr{D}$, risulta

$$S(\varphi,\ F_n,\ D_t)=\sum_{i=1}^{n}S(\varphi,\ G_i,\ D_t)$$

da cui , essendo φ fortemente integrabile su ogni G_i, la funzione φ è fortemente integrabile su ogni F_n e si ha

$$\int_{F_n}\varphi=\lim_T S(\varphi,\ F_n\ D_t)=\sum_{i=1}^{n}\lim_T S(\varphi,\ G_i,\ D_t)=\sum_{i=1}^{n}\int_{G_i}\varphi\ .$$

Poiché risulta inoltre

$$F_n\in\mathscr{G}\qquad F_n\subset F_{n+1}\qquad \forall n\in\mathrm{N}\qquad \text{e}\qquad \lim_{n\to+\infty}F_n=G_0$$

dal Lemma I segue

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{G_i}\varphi=\lim_{n\to+\infty}\int_{F_n}\varphi=\int_{G_0}\varphi\,.$$

Osservazione III. Se gli insiemi $I\in\{I\}$ sono compatti, oltre che connessi, il Corollario 2 di [2] discende dal nostro Teorema IV. Infatti, in questo contesto, le ipotesi del citato Corollario assicurano che la φ è *quasi additiva* (e quindi fortemente integrabile) in ogni sottoinsieme di G_0 (cfr. Proposizioni 7 e 1 di [2]). Dall'Osservazione 1 di $[1]_2$ segue infine che la φ è *quasi additiva in senso debole* in G_0.

Osservazione IV. Osserviamo inoltre che il citato Teorema IV e il Lemma I di qui contengono strettamente rispettivamente il Teorema III e il Teorema I conseguiti in [5]. Intanto le funzioni da noi qui prese in esame sono a valori in uno spazio di Banach (e non in $\boldsymbol{R}^n$). D'altra parte, come andremo a provare, l'integrale che qui studiamo contiene strettamente quello considerato in [5]. Cominciamo a questo proposito con l'osservare che l'assiomatica in cui si pone L. Cesari in $[4]_2$ e utilizzata in [5] è più restrittiva di quella alla Warner (adottata da P. Brandi-A. Salvadori in [2] e qui da noi), nella quale non è necessario far ricorso a una funzione *mesh* definita con gli assiomi (d_1), (d_2), (d_3): basta servirsi di un insieme diretto (cfr. qui 2). D'altra parte, è subito visto che, facendo il raffronto tra i due integrali nella più stringente assiomatica di cui in $[4]_2$, l'esistenza dell'integrale di L. Cesari implica l'esistenza dell'integrale qui da noi studiato (e, in tal caso, i due integrali coincidono) (cfr. $[4]_2$, Teorema (l.iii) e [3], pag. 652), mentre non sussiste l'implicazione inversa, come risulta dal seguente

Esempio II. Sia $A=[0,\ 2]\times[0,\ 2]$, con la topologia usuale $\mathscr{G}$, e $\{I\}$ la famiglia dei rettangoli contenuti in A con i lati paralleli a quelli di A. Sia poi $\mathscr{D}=\mathscr{D}'\cup\mathscr{D}''$, ove $\mathscr{D}'$ è la famiglia delle decomposizioni di A ottenute dividendo per dicotomia due lati consecutivi di A e $\mathscr{D}''$ la famiglia delle decomposizioni di A costituite dalla decomposizione di A in quattro rettangoli uguali I_1, I_2, I_3, $I_4\in\{I\}$ e dalle decomposizioni costituite da I_2, I_3, I_4 unitamente a una qualunque decomposizione di I_1 in rettangoli di $\{I\}$ non ottenibili per dicotomia. Definiamo poi la funzione *mesh* $\delta\colon D\to\delta(D)=\max\limits_{I\in D}\operatorname{diam} I$. È immediato verificare che la famiglia $\mathscr{D}$ e la funzione *mesh* verificano gli assiomi di $[4]_2$.

Sia $\varphi\colon \{I\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\varphi(I) = \begin{cases} mI\,(^7) & \text{se } I \text{ è ottenibile per dicotomia} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Posto $G = \mathring{I}_1$, si ha $\lim\limits_{\delta(D)\to 0} S[\varphi, G, D] = 1$, mentre non esiste l'integrale di L. Cesari (cfr. $[4]_2$, § 1) poiché si ha

$$\max \lim_{\delta(D_G)\to 0} \sum_{I\in D_G} \varphi(I) = 1 \qquad \min \lim_{\delta(D_G)\to 0} \sum_{I\in D_G} \varphi(I) = 0 .$$

Proviamo infine il seguente

Teorema V. *Sia $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi di $\mathcal{G}$, a due a due disgiunti, e sia $G_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$. La funzione φ sia debolmente integrabile alla Burkill-Cesari su ogni G_i $(i = 0, 1, \ldots)$ e inoltre $\|\varphi\|$ sia quasi additiva in G_0. In tali condizioni si ha*

$$(w)\int_{G_0} \varphi \overset{(^8)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} (w)\int_{G_i} \varphi .$$

Intanto, dalla Proposizione 8 di [2], si ha che $(w)\int_{G_i} \varphi \in E^{**}$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Per ogni $z \in E^*$, la funzione $\langle z, \varphi\rangle$, è per ipotesi, fortemente integrabile in ogni G_i $(i = 0, 1, \ldots)$ ed ha inoltre la proprietà $(\tilde{\varphi}_2)$ in G_0. Dal Teorema IV risulta allora

$$\int_{G_0} \langle z, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{G_i} \langle z, \varphi\rangle \tag{2.13}$$

da cui segue $\forall z \in E^*$

$$\langle (w)\int_{G_0} \varphi, z\rangle = \int_{G_0} \langle z, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{G_i} \langle z, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle (w)\int_{G_i} \varphi, z\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle \sum_{i=1}^{n} (w)\int_{G_i} \varphi, z\rangle$$

---

(7) mI indica la misura del rettangolo I.

(8) L'uguaglianza è intesa nel senso che la successione delle somme parziali converge a $(w)\int_{G_0} \varphi$ in E^{**}.

cioè la successione $\{\sum_{i=1}^{n} {}_{(w)}\int_{G_i} \varphi\}$ converge puntualmente a ${}_{(w)}\int_{G_0} \varphi$. D'altra parte, poiché risulta (cfr. Proposizione 10 di [2]) (9)

$$\|{}_{(w)}\int_{G_i} \varphi\|^{**} \leq \overset{*}{\int_{G_i}} \|\varphi\| = \int_{G_i} \|\varphi\|\,,$$

dalla Proposizione 2.4 di [3], segue che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} {}_{(w)}\int_{G_i} \varphi$ è convergente in E^{**} a ${}_{(w)}\int_{G_0} \varphi$.

Osservazione V. In particolare, supponendo gli insiemi $I \in \{I\}$ compatti, oltre che connessi, la Proposizione 13 di [2] discende dal nostro Teorema V. Infatti, in questo contesto, le ipotesi della citata Proposizione 13 di [2] assicurano che la φ è *quasi additiva debolmente* (e quindi debolmente integrabile) su ogni sottoinsieme di G_0 (cfr. Corollario 1 e Proposizione 2 di [2]).

Bibliografia

[1] A. AVERNA e C. LODOVICI: $[\bullet]_1$ *L'integrale di Burkill-Cesari in una diversa assiomatica*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **23** (1974), 140-151; $[\bullet]_2$ *La quasi additività in senso debole*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **25** (1976), 1-14.

[2] P. BRANDI e A. SALVADORI, *Sull'integrale debole alla Burkill-Cesari*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **27** (1978), 14-38.

[3] J. C. BRECKENRIDGE, *Burkill-Cesari integrals of quasi additive interval functions*, Pacific J. Math. **37** (1971), 635-654.

[4] L. CESARI: $[\bullet]_1$ *Quasi additive set functions and the concept of integral over a variety*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 94-113; $[\bullet]_2$ *Extension problem for quasi additive set functions and Radon-Nikodym derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 114-146.

[5] A. FIACCA e C. LODOVICI, *Un contributo alla teoria dell'integrale di Burkill-Cesari*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **29** (1980), 60-78.

[6] E. HILLE and R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications **31** (1968).

[7] G. WARNER, *The Burkill-Cesari integral*, Duke Math. J. **35** (1968), 61-78.

(9) Con $\|\cdot\|^{**}$ denotiamo la norma in E^{**}.

Summary

After having extended the concept of «quasi additivity in the weak sense» defined in $[1]_2$ *to set functions with values in a Banach space and after having introduced the concept of «weak quasi additivity in the weak sense», the Author provides two existence theorems for the strong and weak Burkill-Cesari integral* [7]. *Then the conservation of above mentioned concepts of quasi additivity on the subsets of a given space and other properties of the integral, strong and weak, are studied.*

***