Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 229-240

P. AZZIMONDI e C. SCARAVELLI (*)

Successioni di Cauchy e teoremi di punto unito negli H-spazi (**)

A Bianca Manfredi per il suo 70° compleanno

1 - Introduzione

Ormai da tempo (1) siamo soliti chiamare H-spazio uno spazio metrico generalizzato (E, d), così individuato: «E è un insieme, e $d: E \times E \to \mathfrak{R}^+$ una applicazione che verifica le seguenti proprietà: (a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, per $x_1, x_2 \in E$; (b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ per $x_1, x_2 \in E$; (c) esistono: un sottosinsieme A di $\mathfrak{R}^+$ contenente un intervallo $0 \vdash\!\dashv a$ $(a > 0)$, una costante reale $\tau \geq 1$ e una funzione $\varphi: A \to \mathfrak{R}^+$ infinitesima nello zero, tali che, per ogni $x_1, x_2, x_3 \in E$, $d(x_1, x_2) \in A \Rightarrow d(x_1, x_3) \leq \varphi[d(x_1, x_2)] + \tau d(x_2, x_3)$ (*proprietà triangolare generalizzata:* p.t.g.)» (2).

In $[\mathbf{1}]_{1,2,3}$, con riferimento a questi H-spazi (E, d), *completi*, abbiamo dato numerosi teoremi di punto unito e alla fine di $[\mathbf{1}]_3$ abbiamo fatto una osservazione aggiuntiva nella quale si precisa che in tale lavoro e nei due precedenti le

---

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università, Via dell'Università 12, I-43100, Parma.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei fondi 40% e 60% per la ricerca del M.P.I. – Ricevuto: 7-I-1987.

(1) Cfr., ad es., $[\mathbf{1}]_{1,2,3}$, e gli altri nostri lavori ivi citati.

(2) Come è noto, l'applicazione d (distanza generalizzata), che, in generale, non è continua, è uniformemente continua se e solo se $\tau = 1$.

Gli H-spazi sono, poi, spazi di Hausdorff (in essi si possono introdurre nozioni topologiche e di completezza come negli spazi metrici).

successioni del tipo $u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *sono di Cauchy se* $\sup\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots\} < +\infty$, *oppure se* $\tau = 1$.

Questo lavoro ha lo scopo di spiegare e completare tale osservazione. Perciò dapprima richiamiamo gli enunciati di due di quei teoremi scelti tra i più significativi

Teorema 6 (di $[1]_2$). Siano $f_1, f_2 : E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli $x_1, x_2 \in E$, si abbia

$$(1) \qquad d(f_1(x_1), f_r(x_2))$$
$$\leq \alpha \max\{d(x_1, x_2), \frac{1}{\tau} d(x_i, f_j(x_2)), d(x_i, f_j(x_1)) : i, j = 1, 2\} \qquad r = 1, 2 \qquad 0 \leq \alpha < 1\,.$$

Se per ogni $x_1 \in E$ è $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$, allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito che è anche l'unico punto unito di entrambe.

Teorema 2 (di $[1]_1$). Siano date due applicazioni $f, g : E \to E$; se

$$(2) \qquad d(f(x), g(y)) \leq \alpha \max\{d(x, y), \frac{1}{\tau + 1} \psi(x, y)$$
$$[d(x, g(y)) + d(y, f(x))], \frac{1}{\tau} d(x, f(x)), d(y, g(y))\} \qquad x \neq y \qquad 0 \leq \alpha < 1$$
$$d(x, f(x)) \in A \qquad d(x, g(x)) \in A \qquad \text{per ogni} \qquad x \in E\,,$$

allora una delle due applicazioni ha almeno un punto unito; se inoltre anche l'altra ne ha, entrambe ne hanno uno solo coincidente [3].

Poi diamo e dimostriamo (cfr. 2, 3, 4) alcune disuguaglianze notevoli che permettono di chiarire (cfr. 5) quanto affermato alla fine di $[1]_3$; infine precisiamo (cfr. sempre 5) come il procedimento dimostrativo qui usato porti ad affermare

---

[3] La $\psi(x, y)$ che compare in (2) è l'applicazione $\psi : E \times E \to 0 \llcorner\!\urcorner 1$ così definita

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{d(x, y)}{\varphi[d(x, y)]} & \text{per } (x, y) \text{ tale che } d(x, y) \in A \setminus \{0\} \\ 1 & \text{per } (x, y) \text{ tale che } d(x, y) \notin A \setminus \{0\}\,. \end{cases}$$

che le successioni del tipo detto sono di Cauchy sotto ipotesi di contrattività più deboli di quelle di $[\mathbf{1}]_{1,2,3}$.

2 - Alcune disuguaglianze notevoli

Nel Teorema 6 di $[\mathbf{1}]_2$, fissato $u_0 \in E$, abbiamo considerato la seguente successione di punti di E

$$u_0, \quad u_n = f_1(u_{n-1}) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{3}$$

mentre nel Teorema 2 di $[\mathbf{1}]_1$, fissato $x_0 \in E$, abbiamo considerato la successione

$$x_0, \qquad x_{2n+1} = f(x_{2n}), \qquad x_{2n+2} = g(x_{2n+1}) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{4}$$

che, posto $F = f \circ g$ e $G = g \circ f$, si può anche scrivere

$$x_0, \qquad x_{2n+1} = f(G^n(x_0)), \qquad x_{2n+2} = g(F^n(x_1)) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\,(^4)\,. \tag{4$'$}$$

Relativamente alla successione (3) otterremo le disuguaglianze

$$\begin{aligned} &\overset{\infty}{\underset{n=0}{\forall}}\ \overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}}\ \tau^{-p} d(u_n,\ u_{n+p}) \\ &\qquad \le \alpha^n \sup\{\tau^{-i} d(u_0,\ f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\forall}}\ \overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}}\ d(u_n,\ u_{n+p}) \le \alpha^n \sup\{d(u_0,\ f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \tag{6}$$

$$\sup\{\tau^{-i} d(u_0,\ f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} < +\infty\,. \tag{7}$$

Relativamente alla successione (4) o (4)′, dopo aver aggiunto alle ipotesi del teorema in cui la consideriamo l'ovvia(5) condizione che $d(x,\ f(G^n(x))) \in A$, $d(x,\ g(F^n(x))) \in A$ $(x \in E)$, si hanno due casi: o gli elementi della successione (4),

(4) Come noto, col simbolo G^n si intende G composta n volte con sè stessa, convenendo che sia $G^0(y) = y$; e così per F^n.

(5) Questa condizione viene imposta per poter applicare la p.t.g. di (c), ma, al solito, essa è banale negli spazi metrici.

da un certo indice ν in poi, sono tutti diversi tra loro, oppure no. Nel primo caso si possono ottenere le disuguaglianze

$$\overset{\infty}{\underset{n=\nu}{\forall}}\ \overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}}\ \tau^{-p} d(x_n,\ x_{n+p}) \tag{8}$$
$$\leq \tau^{-p} \varphi[d(x_n,\ x_{n+1})] + (n-\nu+1)\,\alpha^{n-\nu}\tau^{-p+2} d(x_\nu,\ x_{\nu+1})$$
$$+\,\alpha^{n-\nu} \sup\{\tau^{-i} d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

$$\overset{\infty}{\underset{n=\nu}{\forall}}\ \overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}}\ d(x_n,\ x_{n+p}) \tag{9}$$
$$\leq \varphi[d(x_n,\ x_{n+1})] + (n-\nu+1)\,\alpha^{n-\nu}\tau^2 d(x_\nu,\ x_{\nu+1})$$
$$+\,\alpha^{n-\nu}\tau \sup\{d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

$$\sup\{\tau^{-i} d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} < +\infty\ ; \tag{10}$$

nel secondo caso si può giungere a disuguaglianze analoghe, supponendo, però, φ crescente e $\varphi(\alpha t) \leq \alpha\varphi(t)$ (6).

Osservazione 1. Precisiamo (confronta 3) che le (5), (6), (7) verranno dimostrate con riferimento alle notazioni e alle ipotesi del Teorema 6 di $[1]_2$ (che è senz'altro quello più elegante e completo).

Per gli altri teoremi nei quali si considera la successione (3) [o la successione

$$x_0, \qquad x_n = f(x_{n-1}) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{3)'}$$

(cfr. Teorema 1 di $[1]_1$) (7)], procedendo allo stesso modo, *si arriverebbe a disuguaglianze dello stesso tipo*, con le ovvie variazioni, rispetto a (5), (6), (7), imposte dal riferirci a questi altri teoremi. Ad esempio, se ci riferiamo al Teorema 1 di $[1]_1$ (cfr. anche l'annotazione (7)) avremmo le (5), (6), (7) con $f_1 = f_2 = f$, u_0 sostituito da x_0 (e naturalmente u_n sostituito da x_n); se invece ci riferiamo ai teoremi di $[1]_3$ nelle tre disuguaglianze avremmo semplicemente f_1 al posto di f_r $(r = 1,\ 2)$.

---

(6) Questa ipotesi sulla φ è originata dall'aver supposto nell'enunciato del Teorema $x \neq y$: senza questa limitazione tale ipotesi sarebbe superflua.

(7) Qui è stata considerata una sola applicazione f e si è usato x_0 invece che u_0.

Osservazione 2. Per le (8), (9), (10)[8], relative al primo caso, daremo solo un breve e rapido cenno di dimostrazione; non daremo invece nessun cenno dimostrativo per le analoghe disuguaglianze (citate ma non scritte), relative al secondo caso, in quanto il procedimento di dimostrazione, pur simile a quello che porta a (8), (9), (10), dà luogo a passaggi troppo lunghi.

3 - Dimostrazione di (5), (6), (7)

Per arrivare alla (5), con riferimento al Teorema 6 di [1]$_2$ e alla successione (3) di punti di E, osserviamo che:

(I) Qualunque siano $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathfrak{N}$, si ha

(11)
$$\max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le p\}$$
$$\le \alpha^n \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le p+n\}\ .$$

Infatti, se applichiamo l'ipotesi di contrattività (1) al primo membro di (11) con n, $p \in \mathfrak{N}$, e successivamente eliminiamo a secondo membro della disuguaglianza che così otteniamo i termini ripetuti e quelli che non possono essere massimo[9], si ottiene subito

(12)
$$\max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le p\}$$
$$\le \alpha \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{n+h-2}, f_r(u_{n+i-2})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le p+1\}\ .$$

Di qui si ha poi successivamente

$$\max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le p\}$$
$$\le \alpha \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{n+h-2}, f_r(u_{n+i-2})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le p+1\}$$
$$\le \alpha^2 \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{n+h-3}, f_r(u_{n+i-3})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le p+2\}$$
$$\le \dots$$
$$\le \alpha^n \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le p+n\}$$

da cui, anche, la (11) per $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathfrak{N}$.

---

(8) Queste disuguaglianze, ovviamente, valgono anche per i vari Corollari del Teorema 2 di [1]$_1$.

(9) Su questa tecnica dimostrativa confronta, ad es., i lavori citati in bibliografia.

(II) Per ogni $s \in \mathfrak{N}$ si ha

$$\max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le s\} \tag{13}$$
$$\le \max\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le i \le s\}\ .$$

Infatti, scritto il suo primo membro nella forma

$$\max\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le i \le s\}$$
$$\vee \max\{\tau^{-h} d(u_{h-1}, f_r(u_0)) : r=1,\ 2;\ 2 \le h \le s\}$$
$$\vee \max\{\tau^{-(i+1)\wedge -(h+1)} d(u_h, f_r(u_i)) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le s-1\}\ ,$$

osserviamo che:

(a) cambiando h in $(h+1)$ e applicando la (1), $\max\{\tau^{-h} d(u_{h-1}, f_r(u_0)) : r = 1,\ 2;\ 2 \le h \le s\}$ viene maggiorato da

$$\alpha \max\{\tau^{-(h+1)} d(u_{h-1}, u_0),\ \tau^{-(h+1)-1} d(u_{h-1}, f_r(u_0)),\ \tau^{-(h+1)-1} d(u_0$$
$$f_r(u_0)),\ \tau^{-(h+1)} d(u_{h-1}, f_r(u_{h-1}))\ , \tau^{-(h+1)} d(u_0, f_r(u_{h-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h \le s-1\}$$

od anche ([10]) da

$$\alpha \max\{\tau^{-(h+1)} d(u_{h-1}, f_r(u_{h-1})),\ \tau^{-(h+1)} d(u_0, f_r(u_{h-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h \le s-1\}\ ;$$

(b) per la (11) con $n=1$ e $p=s-1$

$$\max\{\tau^{-(i+1)\wedge -(h+1)} d(u_h, f_r(u_i)) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le s-1\}$$
$$\le \alpha \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le s\}\ .$$

Pertanto tenuto conto di (a) e di (b) avremo

$$\max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le h,\ i \le s\}$$
$$\le \max\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ 1 \le i \le s\}$$

([10]) Eliminando i termini ripetuti e quelli che non possono essere massimo.

$$\vee \alpha \max\{\tau^{-(h+1)} d(u_{h-1}, f_r(u_{h-1})), \ \tau^{-(h+1)} d(u_0, f_r(u_{h-1})) : r=1, 2; \ 1 \le h \le s-1\}$$
$$\vee \alpha \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le h, \ i \le s\}$$

e di qui poi ([11]), proprio la (13).

Da (11) e (13) si ricava ora

$$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\forall}} \ \overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}} \ \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le h, \ i \le p\}$$
$$\le \alpha^n \max\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le i \le p+n\}$$

e quindi

$$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\forall}} \ \overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}} \ \max\{\tau^{-i\wedge -h} d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le h, \ i \le p\}$$
$$\le \alpha^n \sup\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r=1, 2; \ i=1, 2, 3, \dots\}$$

da cui (essendo $\tau^{-p} d(u_n, u_{n+p})$ un elemento dell'insieme a primo membro), banalmente, la (5).

Per dimostrare la (6) procediamo in modo sostanzialmente analogo a quanto fatto per la (5), ottenendo successivamente:

(I) Qualunque siano $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathfrak{N}$ si ha

$$(11)' \qquad \max\{d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le h, \ i \le p\}$$
$$\le \alpha^n \max\{d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le h, \ i \le p+n\}$$

(II) Per ogni $s \in \mathfrak{N}$ si ha

$$(13)' \qquad \max\{d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le h, \ i \le s\}$$
$$\le \max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le i \le s\} \ .$$

Da (11)' e (13)' si ricava subito

$$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\forall}} \ \overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}} \ \max\{d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})) : r=1, 2; \ 1 \le h, \ i \le p\}$$
$$\leqslant \alpha^n \sup\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r=1, 2; \ i=1, 2, 3, \dots\}$$

([11]) Sempre con la solita eliminazione a secondo membro dei termini ripetuti e di quelli che non possono essere massimo (cfr. le annotazioni ([9]) e ([10])).

e quindi (essendo $d(u_n, u_{n+p})$ un elemento dell'insieme a primo membro), banalmente, la (6).

Per dimostrare la (7) distinguiamo il caso che sia $u_{n-1} \neq u_n$ per ogni $n \in \mathfrak{N}$, dal caso che sia $u_{n-1} = u_n$ per qualche $n \in \mathfrak{N}$.

Nel primo caso consideriamo il

$$\max\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_i)) : r = 1, 2;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

se tale massimo non è $d(u_0, f_2(u_0))$, sfruttando il procedimento dimostrativo che in $[1]_2$ ha portato a (II) (cfr. pag. 164), si ottiene

$$\begin{aligned} &\max\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_i)) : r = 1, 2;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\} \\ &\leq \varphi[d(u_0, u_1)] + \alpha \max\{\tau^{-\nu} d(u_0, f_r(u_\nu)) : r = 1, 2;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

dalla quale si ha

$$\max\{\tau^{-i}\ d(u_0, f_r(u_i)) : r = 1, 2;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\} \leq \frac{\varphi[d(u_0, u_1)]}{1 - \alpha}$$

e quindi

$$\max\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_i)) : r = 1, 2;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\} \leq d(u_0, f_2(u_0)) \vee \frac{\varphi[d(u_0, u_1)]}{1 - \alpha}$$

da cui immediatamente

$$\sup\{\tau^{-i} d(u_0, f_r(u_i)) : r = 1, 2;\ i = 0, 1, 2, \ldots\} \leq d(u_0, f_2(u_0)) \vee \frac{\varphi[d(u_0, u_1)]}{1 - \alpha}$$

che è proprio la (7).

Nel secondo caso la (7) è banale.

4 - Dimostrazione di (8), (9), (10)

Come abbiamo precisato in 2, ricaveremo le (8), (9), (10) relative alla successione (4) o (4)′ del Teorema 2 di $[1]_1$ (12) nel caso che gli elementi della (4), da un certo indice ν in poi, siano tutti diversi tra loro.

---

(12) Ove si supponga $d(x, f(G^n(x))) \in A$, $d(x, g(F^n(x))) \in A$ $(F = f \circ g,\ G = g \circ f)$.

In questo caso, fissato $h \in \mathfrak{N}$, per la (2), la p.t.g. di (c), la banale disuguaglianza $a + \tau b \leq (1+\tau)\max\{a,\ b\}$ $(a,\ b \in \mathfrak{R}^+)$ (ed essendo $\tau \geq 1$) si ha, *per p positivo dispari*,

$$\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+p}) \leq \alpha[\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h+p-1},\ x_{\nu+h-1}) + \tau^{-p+1}\, d(x_{\nu+h-1},\ x_{\nu+h})]$$ (13)

ed anche, essendo (cfr. (8) di $[1]_1$) $d(x_{\nu+h-1},\ x_{\nu+h}) \leq \alpha^{h-1}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+1})$,

$$\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+p}) \leq \alpha\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h+p-1},\ x_{\nu+h-1}) + \alpha^h\, \tau^{-p+1}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+1})\ .$$

Di qui si ha poi successivamente

$$\begin{aligned}\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+p}) &\leq \alpha\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h+p-1},\ x_{\nu+h-1}) + \alpha^h\, \tau^{-p+1}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+1})\\ &\leq \alpha^2\, \tau^{-p}\, d(x_{\nu+h+p-2},\ x_{\nu+h-2}) + 2\alpha^h\, \tau^{-p+1}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+1})\\ &\leq \ldots\\ &\leq \alpha^h\, \tau^{-p}\, d(x_{\nu+p},\ x_\nu) + h\alpha^h\, \tau^{-p+1}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+1})\end{aligned}$$

da cui, per $h \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ (14), p positivo dispari

(14) $$\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+p}) \leq h\alpha^h\, \tau^{-p+1}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+1}) + \alpha^h\, \tau^{-p}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+p})\ .$$

Fissato ora $h \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ e $p(\geq 2)$ *positivo pari*, usando la p.t.g. di (c), si ottiene anche

$$\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+p}) \leq \tau^{-p}\, \varphi[d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+1})] + \tau^{-p+1}\, d(x_{\nu+h+1},\ x_{\nu+h+1+(p-1)})$$

da cui, per la (14) (essendo $p-1$ dispari),

(15) $$\begin{aligned}&\tau^{-p}\, d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+p})\\ &\leq \tau^{-p}\, \varphi[d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+1})] + (h+1)\, \alpha^{h+1}\, \tau^{-p+2}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+1}) + \alpha^{h+1}\, \tau^{-p+1}\, d(x_\nu,\ x_{\nu+p-1})\ .\end{aligned}$$

---

(13) Nei passaggi qui omessi si distingue anche il caso in cui $(\nu+h)$ è pari, dal caso in cui $(\nu+h)$ è dispari e poi si riuniscono i risultati.

(14) In quanto per $h=0$ la (14) è banale.

Infine, da (14) e (15), per ogni $p \in \mathfrak{N}$ e $h \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$, si ha

$$\tau^{-p} d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+p}) \le \tau^{-p} \varphi[d(x_{\nu+h},\ x_{\nu+h+1})] \tag{16}$$
$$+ (h+1)\alpha^h \tau^{-p+2} d(x_\nu,\ x_{\nu+1}) + \alpha^h \max\{\tau^{-i} d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ \dots,\ p\}$$

da cui, posto $h = n - \nu$, la (8).

In modo del tutto analogo si può ottenere la (9).

Dimostriamo ora la (10). A tale scopo, fissato $s \in \mathfrak{N}$, prima per la p.t.g. di (c), poi anche per la (16) (con $h = 1$), si ha

$$\max\{\tau^{-i} d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ \dots,\ s\}$$
$$\le \max\{\tau^{-i} \varphi[d(x_\nu,\ x_{\nu+1})] + \tau^{-i+1} d(x_{\nu+1},\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ \dots,\ s\}$$
$$\le \varphi[d(x_\nu,\ x_{\nu+1})] + \max\{\tau^{-j} d(x_{\nu+1},\ x_{\nu+1+j}) : j = 1,\ 2,\ \dots,\ s-1\}$$
$$\le \varphi[d(x_\nu,\ x_{\nu+1})] + \max\{\tau^{-j} \varphi[d(x_{\nu+1},\ x_{\nu+2})] + 2\alpha\tau^{-j+2} d(x_\nu,\ x_{\nu+1})$$
$$+ \alpha \max\{\tau^{-i} d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ \dots,\ j\} : j = 1,\ 2,\ \dots,\ s-1\}$$
$$\le \varphi[d(x_\nu,\ x_{\nu+1})] + \varphi[d(x_{\nu+1},\ x_{\nu+2})] + 2\alpha\tau^2 d(x_\nu,\ x_{\nu+1})$$
$$+ \alpha \max\{\tau^{-i} d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ \dots,\ s\}$$

ossia, posto $\lambda = \varphi[d(x_\nu,\ x_{\nu+1})] + \varphi[d(x_{\nu+1},\ x_{\nu+2})] + 2\alpha\tau^2 d(x_\nu,\ x_{\nu+1})$,

$$\max\{\tau^{-i} d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ \dots,\ s\} \le \frac{\lambda}{1-\alpha}$$

da cui
$$\sup\{\tau^{-i} d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\} \le \frac{\lambda}{1-\alpha} < +\infty$$

che è la (10).

5 - Conclusione

Abbiamo quindi (cfr. l'Osservazione 1) che disuguaglianze del tipo (5), (6), (7) valgono in tutti quei teoremi di $[1]_{1,2,3}$ nei quali si considera la successione (3) [o (3)′]; mentre le disuguaglianze (8), (9), (10) valgono nel Teorema 2 di $[1]_1$ (e nei suoi Corollari) dove si considera la successione (4) [(4)′].

Tali disuguaglianze da sole non permettono però di concludere che la successione (3) [o (3)′] e la successione (4) siano di Cauchy, come invece si è affermato nei teoremi citati, tratti forse in inganno da un esame affrettato e superficiale di alcune loro relazioni [15].

La sola (6) [16] [*rispettivamente la sola* (9)], tuttavia, *permette subito di affermare che la* (3) [*rispettivamente* (4)] *è di Cauchy se in più si ha*

$$\sup\{d(u_0,\ f_r(u_{i-1})) : r=1,\ 2;\ i=1,\ 2,\ 3,\ \dots\} < +\infty \tag{17}$$

[*rispettivamente*

$$\sup\{d(x_\nu,\ x_{\nu+i}) : i=1,\ 2,\ 3,\ \dots\} < +\infty]. \tag{18}$$

È ovvio, poi, che se $\tau=1$ [17] la (17) [rispettivamente (18)] è superflua in quanto essa coincide proprio con la (7) [rispettivamente (10)] qui dimostrata [18]. *L'osservazione aggiuntiva è così completamente chiarita.*

Notiamo poi che la (17) si può ottenere aggiungendo, ad esempio, fra le ipotesi dei relativi teoremi

$$\sup\{d(x_1,\ f_r(f_1^{i-1}(x_1))) : r=1,\ 2;\ i=1,\ 2,\ 3,\ \dots\} < +\infty,\quad x_1\in E\ (^{19})$$

mentre la (18) si può ottenere aggiungendo, ad esempio, fra le ipotesi del Teorema 2 di [1]$_1$ (e suoi Corollari)

$$\sup\{d(x,\ f(G^i(x))),\ d(x,\ g(F^i(f(x)))) : i=0,\ 1,\ 2,\ \dots\} < +\infty\ ,$$
$$x\in E,\qquad F=f\circ g,\qquad G=g\circ f\ (^{20})\ .$$

---

(15) Relazioni che pensavamo portassero, invece che alla (7) [(10)], alla finitezza dell'estremo superiore a secondo membro di (6) [(9)] (come accade negli spazi metrici), oppure ad una relazione del tipo (5) [(8)] con a primo membro il primo membro di (6) [(9)]: il che sarebbe bastato, data la (7) [(10)].

(16) Oppure quella del tipo (6), per la (3)′.

(17) E senza dire nulla in più sulla φ, per cui restiamo sempre negli H-spazi.

(18) È interessante il fatto che, per $\tau=1$, (5) e (6) coincidono, così come coincidono (8) e (9).

(19) Questa scrittura è riferita al Teorema 6 di [1]$_2$; per gli altri teoremi si ricordi l'Osservazione 1. Inoltre è chiaro che nei teoremi che hanno già la successione (3) nell'enunciato, l'ipotesi da aggiungere è la (17) stessa.

(20) Si ricordi poi l'annotazione (4).

Infine è appena il caso di ribadire che *negli spazi metrici tutti i teoremi di* $[1]_{1,2,3}$ *mantengono la loro validità senza alcuna ipotesi aggiuntiva,* in virtù di quanto ora detto per $\tau = 1$ (21), e del fatto che gli spazi metrici sono H-spazi particolari con $A \equiv \Re^+$, $\tau = 1$, φ funzione identica.

Da ultimo [e con riferimento, per semplicità, al solo Teorema 6 di $[1]_2$ (22)] è interessante osservare che *le* (5), (6), (7) *si ottengono agevolmente* (23) *anche se nell'ipotesi di contrattività* (1) *sostituiamo ognuno dei coefficienti* $1/\tau$ con 1, *indebolendo chiaramente, negli H-spazi, tale ipotesi. Pertanto all'affermazione che la* (3) *è di Cauchy* (sempre con l'aggiunta di (17)) *si può arrivare sotto condizioni più deboli.* Però, poi, per concludere con l'esistenza e l'unicità del punto unito comune ad f_1 ed f_2 la (1) basta, mentre non basta la nuova ipotesi di contrattività che da essa abbiamo più sopra individuato.

---

(21) Confronta anche l'annotazione (17).

(22) Ma quel che si dirà si può ripetere, mutatis mutandis, per tutti gli altri teoremi per i quali valgono disuguaglianze del tipo (5), (6), (7).

(23) Con gli stessi procedimenti dimostrativi qui usati.

Bibliografia

[1] P. Azzimondi e C. Scaravelli: $[\bullet]_1$ *Teoremi di punto unito per applicazioni in spazi metrici generalizzati*, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste **15** (1983), 39-49; $[\bullet]_2$ *Sul punto unito comune a due applicazioni in spazi metrici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 161-176; $[\bullet]_3$ *Teoremi di punto unito comune*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 111-121.

Summary

In our previous papers on fixed point in complete H-spaces (generalized metric spaces), we introduced some sequences. Here we show that such sequences are Cauchy sequences if we are concerned with particular H-spaces ($\tau = 1$) *or if a certain upper bound is finite. In the last case the property still holds under contractivity assumptions weaker than we usually made.*

* * *