Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 211-217

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Un problema inverso connesso all'effetto Levi-Civita della balistica terminale e alle sue generalizzazioni (**)

A Bianca Manfredi per il suo 70° compleanno

1 - Premessa

In recenti studi (1) mi sono occupato di alcune generalizzazioni ed applicazioni dell'effetto Levi-Civita della balistica terminale, costituito dalla «deformazione impulsiva» subita da un proiettile nell'impatto con un mezzo solido (2). Tenuto conto di tale effetto, la classica formula di Poncelet (3) per la *penetrazione totale* X del proiettile nel mezzo

$$X = h \log(1 + \beta v_0^2) \tag{1.1}$$

(dove v_0 è la *velocità di impatto* (4)) veniva sostituita con la più generale formula di Levi-Civita

$$X_k = h \frac{\log(1 + \beta v_0^2)}{1 + k v_0} \tag{1.2}$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, I-43100 Parma.

(**) Ricevuto: 28-XI-1986.

(1) Cfr. **[11]**$_1$, ..., **[11]**$_6$.

(2) Cfr. **[5]**$_{1,2}$, **[6]**, **[11]**$_1$. Ricordiamo che in tutti i lavori qui citati il mezzo è supposto omogeneo e semiinfinito e la direzione dell'impatto ortogonale alla superficie piana del mezzo.

(3) Cfr. **[7]**, **[5]**$_{1,2}$, **[10]**.

(4) Diremo, qui e nel seguito (per brevità e con abuso di linguaggio assai usato), *velocità* anziché *modulo della velocità*.

(dove k, coefficiente di «deformazione impulsiva», è una costante positiva dipendente dal sistema proiettile-mezzo ma non da v_0), che dava spiegazione di un «apparente paradosso» della balistica terminale (5) provocato, per valori sufficientemente alti di v_0, dalla (1.1) di Poncelet (alla quale la (1.2) si riconduce nel caso limite $k=0$, ossia per proiettili indeformabili).

Le generalizzazioni da me proposte riguardavano l'ulteriore considerazione della «deformazione progressiva» subita da certi tipi di proiettili durante la penetrazione nel mezzo (6): accanto al coefficiente k veniva considerato, con varie leggi, un coefficiente $\lambda>0$ di deformazione progressiva, mediante l'introduzione di una conveniente *funzione di deformazione progressiva* (del proiettile nel mezzo). Ad esempio, nel «caso lineare» per tale funzione (7), la penetrazione totale, indicata con $X_{k,\lambda}$, era data dalla formula

$$X_{k,\lambda}=\frac{1}{\lambda}\{\sqrt{1+2\lambda X_k}-1\} \tag{1.3}$$

il cui secondo membro per $\lambda\to 0$ si riduce alla X_k di Levi-Civita.

Fissata la velocità di impatto v_0, fissate le costanti h, β (8) e i coefficienti $k>0$, $\lambda>0$, risulta

$$X_{k,\lambda}<X_k<X\,. \tag{1.4}$$

Nell'ultimo degli studi citati in (1) mi sono poi occupato di casi di effetto Levi-Civita «negativo» e di sue generalizzazioni (ciò che corrisponde a circostanze di fatto reali), ossia relativi ad una deformazione impulsiva che provochi una diminuzione del calibro del proiettile (caso $k<0$), accompagnata da una deformazione progressiva pure «negativa», ossia corrispondente ad un valore $\lambda<0$ (effetto (k,λ)-negativo): le diseguaglianze (1.4) si mutano allora nelle

(5) Cfr. $[\mathbf{5}]_{1,2}$.

(6) Per una esauriente descrizione di tali tipi di proiettili, in particolare di quelli *deformabili* e *ad espansione controllata*, si veda, ad esempio, la recente opera [**12**], pp. 190-230.

(7) Cfr. $[\mathbf{11}]_1$, pp. 464-467.

(8) Sul significato di h, e sui valori di β ottenuti sperimentalmente per vari mezzi, si possono consultare molti dei trattati o monografie di Balistica riportati nella bibliografia: si vedano, ad esempio, [2], pp. 458-459; [4], vol. I, pp. 353-354.

seguenti

$$X_{k,\lambda} > X_k > X \,. \tag{1.5}$$

Scopo della presente breve Nota è di esaminare il seguente problema inverso: *Per un dato sistema proiettile-mezzo, fissata la penetrazione totale, determinare (a seconda delle varie leggi sopra richiamate) la velocità di impatto, o le velocità di impatto, alla quale corrisponde tale penetrazione totale* (9).

Per comodità di simboli, anziché indicare, come precedentemente, la velocità di impatto con v_0, la indicheremo, a seconda dei casi, rispettivamente con V (caso Poncelet), con V_k (caso Levi-Civita), con $V_{k,\lambda}$ (caso più generale).

Se si esclude il caso di Poncelet, in cui, come mostra la (1.1), la penetrazione totale è crescente con v_0, sia nel caso Levi-Civita (1.2) (con $k > 0$) che nei casi più generali di effetto (k, λ)-positivo, la penetrazione totale non è una funzione crescente con v_0, ma esiste una *velocità critica di impatto*, v_0^*, in corrispondenza della quale la penetrazione totale presenta un massimo ed oltre la quale diminuisce (10).

Nei casi di effetto (k, λ)-negativo tale velocità critica non esiste (11) e le funzioni X_k e $X_{k,\lambda}$ risultano, come la X, crescenti con v_0.

Nello studio del problema inverso, qui posto, è pertanto indispensabile tenere distinti i due casi di effetto (k, λ)-positivo e di effetto (k, λ)-negativo.

2 - Il problema inverso nel caso di effetto (k, λ)-positivo

2.1 – Nel caso classico (1.1) di Poncelet, scritto V al posto di v_0, si ottiene

$$V = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\exp \frac{X}{h} - 1 \right)^{1/2} . \tag{2.1}$$

---

(9) Questo problema è connesso, ma non equivalente, a causa di condizioni più complesse di quelle qui poste, col problema di determinare la cosiddetta *velocità limite* (o *limite balistico*), ossia la velocità che sonsente ad un dato proiettile di attraversare un dato ostacolo (nel 50% dei casi: tale velocità indicata con V_l o anche con V_{50}, viene di solito determinata sperimentalmente): problema che è stato ed è tuttora di particolare interesse applicativo, ad esempio nello studio della sicurezza dei reattori nucleari ed in quello della protezione dei veicoli spaziali da impatti iperveloci con micrometeoriti (*impatti astrobalistici*).

(10) Cfr. $[5]_{1,2}$; $[11]_1$, pp. 469-472.

(11) Cfr. $[11]_6$, pp. 466-468.

Come abbiamo a suo tempo osservato [12], la (1.1) (che fu stabilita verso la metà dell'’800) era valida per velocità di impatto piuttosto basse (rispetto a quelle raggiunte all'inizio del ’900, quando fu generalizzata dalla (1.2) del Levi-Civita) ed era, per più alte velocità, in contrasto con quell'apparente paradosso al quale si è accennato in **1** e secondo il quale all'aumentare della velocità di impatto non sempre la penetrazione totale aumentava, ma, per certi sistemi proiettile-mezzo, era stata sperimentalmente constatata l'esistenza di una velocità critica di impatto oltre la quale la penetrazione totale diminuiva: quel problema, posto allora al Levi-Civita, lo aveva portato alla (1.2), che di quell'apparente paradosso dava piena spiegazione. Pertanto, entro i limiti di validità della formula di Poncelet (che fu, per circa un secolo, ampiamente tabulata ed applicata, come risulta dalle opere di Balistica esterna elencate nella bibliografia), la (2.1) risolve, ovviamente, il problema posto.

Nel caso della (1.2), scritto V_k al posto di v_0 e scritta la (1.2) nella forma

$$(1.2)' \qquad (1+kV_k)X_k - h\log(1+\beta V_k^2) = 0\ ,$$

risulta invece che questa equazione, nelle variabili X_k, V_k, determina, fissato un valore $\bar{X}_k$ minore della massima penetrazione totale X_k^* (corrispondente alla velocità critica V_k^*, unica radice reale dell'equazione

$$(2.2) \qquad 2\beta V_k(1+kV_k) - k(1+\beta V_k^2)\log(1+\beta V_k^2) = 0 \ (^{12})',$$

due valori $\bar{V}_k'$, $\bar{V}_k''$ in corrispondenza dei quali è assunto tale valore $\bar{X}_k$. Posto $\bar{V}_k' < \bar{V}_k''$, a $\bar{V}_k'$ corrisponderà una minore deformazione impulsiva del proiettile, rispetto a quella ottenuta con la velocità maggiore $\bar{V}_k''$. Nel caso in cui sia $\bar{X}_k = X_k^*$ i due suddetti valori coincidono col valore V_k^* della velocità critica di impatto data dalla (2.2). Ovviamente, qualora si ponesse nella (1.2)' $\bar{X}_k > X_k^*$ il problema non avrebbe alcuna soluzione.

2.2 – Nel caso della (1.3), ottenuta per effetto (k, λ)-positivo, scritto $V_{k,\lambda}$ al posto di v_0 e scritta la (1.3) nella forma

$$(1.3)' \qquad (1+kV_{k,\lambda})\left(X_{k,\lambda} + \frac{\lambda}{2}X_{k,\lambda}^2\right) - h\log(1+\beta V_{k,\lambda}^2) = 0\ ,$$

---

(12) Cfr. [11]$_1$, pp. 459-462.
(12)' Cfr. [5]$_{1,2}$; [11]$_1$, p. 469.

risulta ancor qui che quest'ultima equazione, nelle variabili $X_{k,\lambda}$, $V_{k,\lambda}$, determina, fissato un valore $\bar{X}_{k,\lambda}$ minore della massima penetrazione totale $X^*_{k,\lambda}$ (13), due valori $\bar{V}'_{k,\lambda}$, $\bar{V}''_{k,\lambda}$ in corrispondenza dei quali tale valore è assunto. Posto $\bar{V}'_{k,\lambda} < \bar{V}''_{k,\lambda}$, a $\bar{V}'_{k,\lambda}$ corrisponderà una minore deformazione impulsivo-progressiva del proiettile, rispetto a quella ottenuta con la velocità $\bar{V}''_{k,\lambda}$. Nel caso in cui sia $\bar{X}_{k,\lambda} = X^*_{k,\lambda}$ i due suddetti valori coincidono col valore $V^*_{k,\lambda}$ della velocità critica di impatto. È ovvio che qualora si ponesse nella (1.3)' $\bar{X}_{k,\lambda} > X^*_{k,\lambda}$ il problema inverso posto non avrebbe soluzioni (14).

Ci asteniamo qui, per brevità, dal considerare altri casi (oltre al caso lineare qui ripreso) per la funzione di deformazione progressiva, per i quali i risultati sono gli stessi dal punto di vista qualitativo (15).

3 - Il problema inverso nel caso di effetto (k, λ)-negativo

Osserviamo preliminarmente che, nel caso dell'effetto k-negativo di Levi-Civita (o effetto $(k, 0)$-negativo), quando si tenga conto che la funzione X_k data

(13) Ricordiamo che $X^*_{k,\lambda}$, come è stato mostrato in [11]$_1$, si ottiene per *lo stesso valore* della velocità critica relativa alla (1.2) del Levi-Civita, radice dell'equazione (2.2) (è pertanto $V^*_{k,\lambda} = V^*_k$); ossia l'equazione che dà la velocità critica nell'effetto (k, λ)-positivo (anche nei casi più generali del caso lineare al quale si riferisce la (1.3)) non dipende dal parametro λ (come non dipende da h). Ciò contribuisce a mettere maggiormente in risalto l'eleganza della formula (1.2) di Levi-Civita, nella quale il coefficiente k di deformazione impulsiva ha un ruolo essenziale nella determinazione della velocità critica, ruolo che conserva anche nei casi più generali di effetto (k, λ)-positivo.

(14) Questo caso, di per sé assai banale, come l'analogo $\bar{X}_k > X^*_k$ considerato alla fine di **2.1**, può avere interesse nel caso in cui si voglia garantire un «mancato valore di penetrazione totale per una qualsiasi velocità di impatto». Esso presenta una certa analogia con quanto avviene, ad esempio, nella balistica galileiana per i punti esterni alla «parabola di sicurezza» (o «di Torricelli»), punti che «non sono colpiti sotto alcun angolo di proiezione», ossia che non sono attraversati da alcuna traiettoria (parabolica), qualunque sia il relativo angolo di proiezione. L'analogia rimane anche nel caso delle due soluzioni distinte (per le velocità di impatto), quando si considerino i punti interni alla parabola di sicurezza (non appartenenti all'asse), che sono attraversati da due distinte traiettorie (corrispondenti cioè a due distinti angoli di proiezione); come rimane nel caso dei punti appartenenti alla parabola di sicurezza, per i quali i due angoli di proiezione coincidono (caso analogo a quello delle due velocità di impatto coincidenti col valore della velocità critica, soluzione dell'equazione (2.2)).

(15) Cfr. [11]$_1$, pp. 464-472.

dalla (1.2) risulta crescente con v_0 (infatti per $k<0$ l'equazione (2.2) nell'ipotesi, aderente a circostanze di fatto reali, che resti $1+kV_k>0$, non ha alcuna soluzione reale, poiché il primo membro risulta essere positivo), la (1.2)', fissato $\bar{X}_k$, è verificata per un solo valore $\bar{V}_k$.

Nel caso più generale dell'effetto (k, λ)-negativo, risultando pure la funzione $X_{k,\lambda}$ data dalla (1.3) crescente con v_0, la (1.3)', fissato $\bar{X}_{k,\lambda}$, è pure verificata per un unico valore $\bar{V}_{k,\lambda}$ della velocità di impatto.

Come già è stato accennato alla fine di **2.2**, ci asteniamo dal considerare, anche nel caso di effetto (k, λ)-negativo, casi più generali del caso lineare (per la funzione di deformazione progressiva) relativo alla (1.3), per i quali i risultati sono, dal punto di vista qualitativo, gli stessi [16].

Concludiamo osservando che la determinazione effettiva delle velocità di impatto, relative al problema inverso considerato, non presentano (nei vari casi trattati ed in quelli più generali ai quali si è accennato) difficoltà, una volta noti i valori dei parametri che intervengono, tenuto conto dei moderni metodi e mezzi del Calcolo numerico.

---

(16) Cfr. [**11**]$_1$, [**11**]$_6$.

Bibliografia

[1] G. Bruno, *Balistica esterna*, vol. I (*Balistica razionale*), Roggero e Tortia, Torino, 1934.

[2] C. Cranz, *Lehrbuch der Ballistik*, Bd. I, J. Springer, Berlin, 1925.

[3] J. Didion, *Traité de Balistique*, 2me édit., Dumaine et Mallet-Bachelier, Paris, 1860.

[4] G. Galanzino, *Balistica esterna*, vol. I, II, III, Libr. Stato, Roma, 1943-1956.

[5] T. Levi-Civita: [•]$_1$ *Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi*, Ist. Veneto Sci. Lett. Arti Cl. Sci. Mat. Natur. **65**, parte II (1906), 1149-1158; (lo stesso lavoro si trova in: [•]$_2$ *Opere matematiche*, vol. II (1901-1907), Zanichelli, Bologna, 1956, pp. 505-513).

[6] T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Nozioni di Balistica esterna*, Zanichelli, Bologna, 1935.

[7] J. V. Poncelet, *Introduction à la Mécanique industrielle*, Bruxelles, 1839.

[8] K. Sellier, *Schusswaffen und Schusswirkungen*, Bd. I, 2. Aufl., Schmidt-Römild, Lübeck, 1982.

[9] F. Siacci, *Balistica*, 2a ediz., Casanova, Torino, 1888.

[10] R. Sutterlin, *Les projectiles*, Mémor. Artill. Franç. **41**, 1er fasc. (1967), 13-76.

[11] L. TANZI CATTABIANCHI: [•]$_1$ *Su alcune generalizzazioni di una formula di Levi-Civita per deformazioni impulsive*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 459-474; [•]$_2$ *Influenza dell'effetto Levi-Civita sulle formule dei tempi: un teorema di confronto*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 855-860; [•]$_3$ *Su alcune varianti e generalizzazioni di una formula di balistica terminale di Resal*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 468-484; [•]$_4$ *Generalizzazioni di una formula di Levi-Civita sulla penetrazione dei proiettili deformabili*, Atti Conv. Balistica Forense, Montagnoli Edit., Roma, 1982, pp. 619-625; [•]$_5$ *Influenza dell'effetto Levi-Civita sulla velocità residua: generalizzazioni e confronti*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 359-372; [•]$_6$ *Su alcune generalizzazioni di casi di effetto Levi-Civita «negativo» in balistica terminale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 463-473.

[12] A. UGOLINI, *L'esperto balistico*, vol. I, 2ª ediz., Editoriale Olimpia, Firenze, 1984.

Summary

Here is considered an inverse problem related to the Levi-Civita effect of terminal ballistics, and to the generalizations of such an effect which were studied by the Author in some previous papers of this. To be more precise here is considered the problem of calculating the velocity, or the velocities, of an impact connected to pre-assigned penetration.

***