Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 175-186

S. DONNINI e V. MANGIONE (*)

Sulle strutture di tipo (VI) su una varietà (**)

1 - Introduzione

La presente nota, come le precedenti [1], [4], si inquadra nell'indirizzo di ricerca iniziato in [6], relativo alle sottoalgebre dell'algebra $\mathscr{D}^1_1$ dei campi tensoriali di tipi (1, 1) di una varietà V, generate da insiemi di strutture quasi complesse linearmente indipendenti, verificanti opportune condizioni.

Viene qui considerato il caso della sottoalgebra A, generata da tre strutture quasi complesse, costituenti una struttura di tipo (VI) secondo H. Wakakuwa.

Dapprima si mostra come la sottoalgebra A possa anche ottenersi a partire da due strutture quasi complesse soddisfacenti ad opportune condizioni, e si riconosce che A risulta di dimensione 6 (teoremi T_1, T_2; n. 2, 4).

Si stabilisce poi in 5 a quali algebre di dimensione 6 risulti isomorfa, in relazione alla variazione del parametro α, la sottoalgebra A generata da una struttura di tipo (VI).

Infine vengono forniti risultati relativi alle strutture quasi complesse, quasi prodotte, quasi tangenti determinate su V da una struttura di tipo (VI) (v. 7).

2 - Strutture di tipo (VI) e strutture DM su V

Indicata con V una varietà differenziabile di dimensione $2n$ ($n \geq 2$) e classe C^r ($r \geq 2$) e con $\mathscr{F}$ l'algebra delle funzioni differenziabili di classe C^∞ definito su V a

---

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, I-43100 Parma.

(**) Ricerca effettuata nell'ambito del Progetto «Geometria delle varietà differenziabili» con fondi M.P.I. - Ricevuto: 29-IX-1986.

valori reali, sia $\mathscr{D}^r_s$ l' $\mathscr{F}$-modulo dei campi tensoriali di tipo (r, s); in particolare gli elementi di $\mathscr{D}^1_1$ possono pensarsi come endomorfismi di $\mathscr{D}^1_0$; quindi $\mathscr{D}^1_1$ con l'ordinaria composizione ha la struttura di algebra su $\mathbb{R}$ (1).

Indicate con $I \in \mathscr{D}^1_1$ l'endomorfismo identico di $\mathscr{D}^1_0$, gli elementi J, H, Z di $\mathscr{D}^1_1$ per i quali in ogni punto di V risulti

$$(1) \qquad J^2 = -I \qquad H^2 = I \qquad Z^2 = 0 \quad (H \neq \pm I,\ Z \neq 0)$$

corrispondono alle strutture quasi complesse, quasi prodotto, quasi tangenti di V ([8], p. 110, p. 236; [2], p. 1513).

La varietà V si dice dotata di una *struttura di tipo* (VI) secondo H. Wakakuwa quando esistono su V *tre strutture quasi complesse* J_1, J_2, J_3 *linearmente indipendenti soddisfacenti le*

$$(2) \qquad J_1 J_2 = J_3 J_1 \qquad J_2 J_1 J_2 = \alpha(J_1 + J_2) + J_3$$

con α *costante reale*, $\alpha \neq -1$ ([7], p. 403).

F. Tricerri ha considerato il caso di due strutture quasi complesse linearmente indipendenti J_1, J_2 soddisfacenti la condizione

$$(3) \qquad J_1 J_2 = J_2 J_1$$

ovvero la condizione

$$(4) \qquad J_1 J_2 + J_2 J_1 = kI \quad (k \text{ reale})\,.$$

Si considerano qui due strutture quasi complesse linearmente indipendenti soddisfacenti la condizione più generale

$$(5) \qquad J_1 J_2 J_1 + J_2 J_1 J_2 = \alpha(J_1 + J_2)\,.$$

Nel seguito si dirà brevemente *struttura* DM una coppia di strutture quasi complesse linearmente indipendenti J_1, J_2 soddisfacenti la (5), ma nessuna delle (3), (4).

---

(1) Per le nozioni generali, v. [3] (voll. I, II) e [8].

Ciò premesso, sussiste il teorema

T_1. *Su V le strutture di tipo* (VI) *coincidono con le strutture* DM *con* $\alpha \neq -1$.

Infatti dalla prima delle (2), moltiplicando a destra per J_1, si ottiene $J_3 = -J_1 J_2 J_1$, che sostituita nella seconda delle (2), dà la (5). Viceversa, si consideri la struttura quasi complessa $J_3 = -J_1 J_2 J_1$. Moltiplicando per J_1, si ha subito la prima delle (2). Sostituendo poi nella (5), si perviene alla seconda delle (2). Proviamo ora che J_1, J_2, J_3 sono linearmente indipendenti. Sia $aJ_1 + bJ_2 + cJ_3 = 0$. Poiché J_1, J_2 sono linearmente indipendenti, non può essere $c = 0$. D'altra parte, se $c \neq 0$, ricavando cJ_3 ed elevando al quadrato si ottiene $ab(J_1 J_2 + J_2 J_1) = (a^2 + b^2 - c^2) I$. Se a e b sono nulli si perviene alla (3) e alla (4); se $ab \neq 0$ si ha subito la (4). Poiché ciò è escluso, l'indipendenza è provata.

Si osservi che, alla luce del teorema T_1, non sembrano del tutto giustificate le motivazioni addotte in [7] per escludere il caso $\alpha = -1$ nella definizione di struttura di tipo (VI). In una prossima nota appariranno i vantaggi di considerare nella trattazione anche il valore $\alpha = -1$.

3 - Alcune algebre notevoli

Conviene considerare con u_1, u_2, u_3, u_4 e con u_5, u_6 le classiche basi nell'algebra dei quaternioni reali H e nell'algebra nei numeri complessi C. È ben noto che in H e in C i soli elementi nilpotenti, involutori sono, rispettivamente, le zero e l'unità con il suo opposto. Ancora, gli elementi antinvolutori in C sono u_6 (u_6 unità immaginaria) e, indicato con $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4$ il generico quaternione, gli elementi antinvolutori di H sono tutti e soli quelli per i quali si ha $x_1 = 0$, $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Indicato poi con $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 + x_5 u_5 + x_6 u_6$ il generico elemento di $\mathrm{H} \oplus \mathrm{C}$ si ha

P_1. *In* $\mathrm{H} \oplus \mathrm{C}$ *l'unico elemento nilpotente è lo zero; gli elementi involutori sono quattro, precisamente* $\pm u_1 \pm u_5$, *gli elementi antinvolutori sono tutti e soli quelli per i quali risulta*

$$x_1 = 0 \qquad x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \qquad x_5 = 0 \qquad x_6 = \pm 1 \,. \tag{6}$$

Due algebre su R di dimensione quattro, che converrà considerare in vista delle applicazioni successive, sono definite dalle tabelle moltiplicative

(7)

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$
u_3	u_3	$-u_4$	u_1	$-u_2$
u_4	u_4	u_3	u_2	u_1

(8)

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$
u_3	u_3	$-u_4$	0	0
u_4	u_4	u_3	0	0

La prima, come si può facilmente vedere utilizzando la base

$$a_1=\frac{1}{2}(u_1-u_3) \qquad a_2=\frac{1}{2}(u_2+u_4) \qquad a_3=\frac{1}{2}(u_4-u_2) \qquad a_4=\frac{1}{2}(u_1+u_3)$$

è l'algebra M_2 delle matrici reali di ordine 2 ([2]). La seconda, che denoteremo con D, risulta essere, secondo la classificazione di [5], l'algebra LXXXI.

Risulta di particolare interesse anche un'algebra di dimensione 6, indicata con B, definita dalla tabella moltiplicativa

(9)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_2	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$	$-u_6$	u_5
u_3	u_3	u_4	0	0	0	0
u_4	u_4	$-u_3$	0	0	0	0
u_5	u_5	u_6	0	0	$-2u_4$	$2u_3$
u_6	u_6	$-u_5$	0	0	$-2u_3$	$2u_4$

Considerata l'algebra $M_2 \oplus \mathrm{C}$ e indicato con

$$x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3+x_4u_4+x_5u_5+x_6u_6$$

il suo generico elemento, da un calcolo diretto risulta

P$_2$. *In* $M_2 \oplus \mathrm{C}$ *gli elementi nilpotenti, involutori, antinvolutori sono,*

([2]) È l'algebra di tipo I con $\beta>0$ della classificazione in [5].

ordinatamente, tutti e soli quelli soddisfacenti le

$$(10) \qquad x_1 = 0 \qquad -x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \qquad x_5 = x_6 = 0$$

$$(11) \qquad x_1 = 0 \qquad -x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0 \qquad x_5 = \pm 1 \qquad x_6 = 0;$$

$$x_1 = \pm 1 \qquad x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0 \qquad x_5 = \pm 1$$

$$(12) \qquad x_1 = 0 \qquad -x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1 = 0 \qquad x_5 = 0 \qquad x_6 = \pm 1 \, .$$

Se $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 + x_5 u_5 + x_6 u_6$ indica il generico elemento di B, procedendo per via diretta si ha

P_3. *In B gli unici elementi involutori sono l'unità e il suo opposto. Gli elementi nilpotenti, antinvolutori sono, ordinatamente, tutti e soli quelli soddisfacenti le*

$$(13) \qquad x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$$

$$(14) \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \pm 1 \qquad x_3 = \pm (x_5^2 + x_6^2) \qquad x_4 = 0 \, .$$

Tenuto conto di P_1, P_2, P_3 si ha inoltre

P_4. *In* $H \oplus C$, $M_2 \oplus C$, B *esistono quaterne di elementi antinvolutori linearmente indipendenti. In* $H \oplus C$, $M_2 \oplus C$ *esistono rispettivamente un elemento, quintuple di elementi involutori linearmente indipendenti, diversi dall'unità e dal suo opposto. In $M_2 \oplus C$, B esistono ordinatamente terne, coppie di elementi nilpotenti, diversi da zero, linearmente indipendenti.*

4 - Teorema fondamentale

Si indichi con $A(J_1, J_2)$ la sottoalgebra di $\mathscr{D}_1^1$ generata da due strutture quasi complesse J_1, J_2 di V, linearmente indipendenti. È immediato che

$$A(J_1, J_2) = A(-J_1, J_2) = A(J_1, -J_2) = A(-J_1, -J_2) \, .$$

È già noto quali condizioni su generatori corrispondano al caso che l'algebra ora introdotta abbia dimensione 4 ([6], teorema T_1, p. 350).

Con riferimento alla dimensione 6, sussiste il teorema

T_2. *Se* J_1, J_2 *definiscono su* V *una struttura* DM, *l'algebra* $A(J_1, J_2)$ *generata da* J_1, J_2 *ha dimensione* 6. *Inversamente se* $A(J_1, J_2)$ *ha dimensione* 6, *essa risulta associata ad una struttura* DM.

Tenuto presente il teorema T_1 di **2**, segue immediatamente

T_2^*. *Se* J_1, J_2, J_3 *definiscono su* V *una struttura di tipo* (VI) *secondo H. Wakakuwa, l'algebra* $A(J_1, J_2)$ *ha dimensione* 6.

Per stabilire la prima parte di T_2, si noti che dal teorema T_1 di [6] segue che $\dim A(J_1, J_2) \geqslant 5$ che I, J_1, J_2, J_1J_2, J_2J_1 sono linearmente indipendenti. D'altra parte se $J_1J_2J_1 = a_0I + a_1J_1 + a_2J_2 + a_3J_1J_2 + a_4J_2J_1$, seguirebbe $-J_2J_1 = a_0J_1 - a_1I + a_2J_1J_2 - a_3J_2 + a_4J_1J_2J_1$, ed eliminando $J_1J_2J_1$ si giungerebbe immediatamente ad un assurdo. Gli elementi I, J_1, J_2, J_1J_2, J_2J_1, $J_1J_2J_1$ sono quindi linearmente indipendenti. D'altra parte, in virtù di (5), l'insieme delle loro combinazioni lineari risulta chiuso rispetto al prodotto. Quindi $\dim A(J_1, J_2) = 6$.

Viceversa, sia $\dim A(J_1,J_2) = 6$; gli elementi I, J_1, J_2, J_1J_2, J_2J_1, $J_1J_2J_1$, $J_2J_1J_2$ sono linearmente dipendenti, cioè risulta

$$b_0I + b_1J_1 + b_2J_2 + b_3J_1J_2 + b_4J_2J_1 + b_5J_1J_2J_1 + b_6J_2J_1J_2 = 0$$

con le b_i non tutte nulle. Se $b_5 = b_6 = 0$, tenendo presente il lemma L_1 di [6], risulterebbe $\dim A(J_1, J_2) = 4$. Sia dunque per esempio $b_6 \neq 0$. Si può scrivere

$$J_2J_1J_2 = a_0I + a_1J_1 + a_2J_2 + a_3J_1J_2 + a_4J_2J_1 + a_5J_1J_2J_1 \,. \tag{15}$$

Moltiplicando la (15) a sinistra per J_1, a destra per J_2, si ottiene

$$(J_1J_2)^2 = a_0J_1 - a_1I + a_2J_1J_2 - a_3J_2 + a_4J_1J_2J_1 + a_5J_2J_1 \tag{16}$$

$$-J_2J_1 = a_0J_2 + a_1J_1J_2 - a_2I - a_3J_1 + a_4J_2J_1J_2 + a_5(J_1J_2)^2 \,. \tag{17}$$

Moltiplicando la (15) a destra per J_1, a sinistra per J_2 si ottiene

$$(J_2J_1)^2 = a_0J_1 - a_1I + a_2J_2J_1 + a_3J_1J_2J_1 - a_4J_2 - a_5J_1J_2 \tag{18}$$

$$-J_1J_2 = a_0J_2 + a_1J_2J_1 - a_2I + a_3J_2J_1J_2 - a_4J_1 + a_5(J_2J_1)^2 \,. \tag{19}$$

Tenuto conto delle (15), (16) e delle (16), (18), le (17), (19) divengono rispettivamente

$$\begin{aligned}(-a_2 + a_0a_4 - a_1a_5)I + (-a_3 + a_1a_4 + a_0a_5)J_1 + (a_0 + a_2a_4 - a_3a_5)J_2 \\ + (a_1 + a_3a_4 + a_2a_5)J_1J_2 + (1 + a_4^2 - a_5^2)J_2J_1 + 2a_4a_5J_1J_2J_1 = 0\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}(-a_2 + a_0a_3 - a_1a_5)I + (a_1a_3 - a_4 + a_0a_5)J_1 + (a_0 + a_2a_3 - a_4a_5)J_2 \\ + (1 + a_3^2 - a_5^2)J_1J_2 + (a_1 + a_3a_4 + a_2a_5)J_2J_1 + 2a_3a_5J_1J_2J_1 = 0\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Premesso che gli elementi I, J_1, J_2, J_1J_2, J_2J_1 sono indipendenti (altrimenti $\dim A(J_1, J_2) = 4$), si noti che, se $a_4a_5 \neq 0$ ovvero $a_3a_5 \neq 0$, dalle (15), (20) o rispettivamente dalle (15), (21) seguirebbe $\dim A(J_1, J_2) = 5$. D'altra parte non può essere $a_5 = 0$ (altrimenti $\dim A(J_1, J_2) = 4$). Si deve quindi concludere che $a_3 = a_4 = 0$.

È ormai facile dalle (20), (21) dedurre

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = \alpha \qquad a_2 = \mp\alpha \qquad a_5 = \pm 1$$

con l'intesa di considerare simultaneamente i segni inferiori e i superiori.

Nel primo caso, dalla (15) segue che J_1, $-J_2$ soddisfano alla (5); nel secondo caso J_1, J_2 soddisfano alla (5). Poiché, come si è osservato $A(J_1, J_2) = A(J_1, -J_2)$, anche la seconda parte di T_2 è dimostrata.

5 - Strutture di tipo (VI) e algebre corrispondenti

Il risultato ottenuto col teorema T_2^* si può precisare indicando a quali algebre di dimensione 6 risulti isomorfa l'algebra $A(J_1, J_2)$, definita a partire da una struttura di tipo (VI), *in relazione alla variazione del parametro* α (3).

Sussiste infatti il teorema

T_3. *La sottoalgebra* $A(J_1, J_2)$ *di* $\mathscr{D}_1^1$ *associata ad una struttura di tipo* (VI) *su* V *definita da* J_1, J_2, J_3 *è isomorfa ad* $\mathrm{H} \oplus \mathrm{C}$ *se* $-1 < \alpha < 3$, *ad* $M_2 \oplus \mathrm{C}$ *se* $\alpha < -1$ *o* $\alpha > 3$, *all'algebra* B *se* $\alpha = 3$.

Conviene ora dare qualche indicazione in merito all'*esistenza* sulla varietà V di strutture di tipo (VI).

Si osservi anzitutto che già il teorema T_1 di 2 può riguardarsi come un risultato del tipo accennato.

Inoltre sussistono i teoremi

T_4. *Se* V *è una varietà dotata di due strutture quasi complesse, tali che l'algebra da esse generata sia di dimensione* 6 *e non risulti isomorfa all'algebra* $D \oplus \mathrm{C}$ (v. 3), V *è dotata di una struttura di tipo* (VI). *Viceversa.*

T_5. *Se* V *è una varietà dotata di una sottoalgebra di* $\mathscr{D}_1^1$ *isomorfa ad* $\mathrm{H} \oplus \mathrm{C}$ *o a* $M_2 \oplus \mathrm{C}$ *o all'algebra* B, V *è dotata di una struttura di tipo* (VI). *Viceversa.*

6 - Dimostrazioni

Per dimostrare T_3 si considerino, per $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 3$, gli elementi

$$v_1 = \frac{2}{3-\alpha}\left(I - \frac{1}{2}(J_1 J_2 + J_2 J_1)\right) \qquad v_5 = \frac{1-\alpha}{3-\alpha}\left(I - \frac{1}{\alpha-1}(J_1 J_2 + J_2 J_1)\right)$$

$$v_4 = -\frac{1}{2}(J_1 J_2 - J_2 J_1)$$

$$v_2 = -J_1 v_1 = -v_1 J_1 \qquad v_3 = J_1 v_4 = -v_4 J_1 \qquad v_6 = -J_1 v_5 = -v_5 J_1$$

(3) Per una analoga ricerca nel caso della dimensione 4, v. [6] (teorema T_1, p. 352). Per una analoga ricerca, relativa alle strutture di H. Wakakuwa di tipo (V) si veda [1] (teorema T_3, di 4).

Posto $\beta = \dfrac{(1+\alpha)(\alpha-3)}{4}$, i sei elementi considerati, di cui è facile constatare la lineare indipendenza, danno luogo alla tabella moltiplicativa

(22)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	v_1	v_2	v_3	v_4	0	0
v_2	v_2	$-v_1$	v_4	$-v_3$	0	0
v_3	v_3	$-v_4$	βv_1	$-\beta v_2$	0	0
v_4	v_4	v_3	βv_2	βv_1	0	0
v_5	0	0	0	0	v_5	v_6
v_6	0	0	0	0	v_6	$-v_5$

È immediato constatare che la sottoalgebra generata dai primi quattro elementi è del tipo I secondo la classificazione di [5]. Ora, per $-1<\alpha<3$, risulta $\beta<0$. Ponendo allora

$$u_1 = v_1 \qquad u_2 = v_2 \qquad u_5 = v_5 \qquad u_6 = v_6 \qquad u_3 = (-\frac{1}{\beta})^{1/2} v_3 \qquad u_4 = (-\frac{1}{\beta})^{1/2} v_4$$

si riconosce immediatamente che la (22) si riduce alla tabella moltiplicativa di $H \oplus C$.

Se, invece, è $\alpha<-1$ o $\alpha>3$, riesce $\beta>0$. In tal caso, posto

$$u_1 = v_1 \qquad u_2 = v_2 \qquad u_5 = v_5 \qquad u_6 = v_6 \qquad u_3 = (-\frac{1}{\beta})^{1/2} v_3 \qquad u_4 = (\frac{1}{\beta})^{1/2} v_4$$

si ottiene la tabella di moltiplicazione dell'algebra $M_2 \oplus C$.

Infine, se $\alpha=3$, si coonsideri in $A(J_1,\ J_2)$ la base

$$u_1 = I \qquad u_2 = J_1 \qquad u_4 = -u_2 u_3 = -u_3 u_2 \qquad u_5 = -u_6 u_2 = -u_2 u_6$$

$$u_3 = I - \frac{1}{2}(J_1 J_2 + J_2 J_1) \qquad u_6 = -\frac{1}{2}(J_1 J_2 - J_2 J_1) .$$

È immediato constatare che questi elementi danno luogo alla tabella (9) e pertanto $A(J_1,\ J_2)$, nel caso attuale, riesce isomorfa all'algebra B di 3. Il teorema T_3 è dunque provato.

Per stabilire il teorema T_4 conviene anzitutto notare che per $\alpha = -1$, cioè per $\beta = 0$, la (22) si riduce alla tabella moltiplicativa di $D \oplus C$ (cfr. (8) di 3).

Ciò premesso, poiché per ipotesi $\dim A(J_1, J_2) = 6$, J_1 e J_2 riescono linearmente indipendenti. In virtù di T_2 la (5) è soddisfatta, ma nessuna delle (3), (4). La seconda ipotesi su $A(J_1, J_2)$ esclude che $\alpha = -1$. Il teorema T_1 conduce quindi all'asserto. Il viceversa è immediata conseguenza di T_3.

Resta ormai soltanto da stabilire il teorema T_5. Se $\mathscr{D}_1^1$ contiene una sottoalgebra A isomorfa ad $H \oplus C$, a $M_2 \oplus C$, a B allora si considerino in A, rispettivamente, le coppie di elementi $(u_2 + u_6,\ u_3 - u_6)$, $(2u_2 + u_3 + u_6,\ -2u_2 - u_4 - u_6)$, $(u_2 + u_3 + u_5,\ -u_2 - u_3 - u_6)$. Per queste coppie vale la (5), con $\alpha = 1$, $\alpha = 11$, $\alpha = 3$ rispettivamente. Pertanto, in virtù di T_1, su V esiste una struttura di tipo (VI). Il viceversa è immediata conseguenza di T_3.

7 - Strutture su V

I risultati che seguono sono relativi alle *strutture quasi complesse, quasi prodotto, quasi tangenti* determinate su V da una struttura di tipo (VI) ([4]).

Sia J_1, J_2, J_3 una struttura di tipo (VI) sulla varietà V. In virtù del teorema T_4 le strutture quasi complesse, quasi prodotto, quasi tangenti, determinate su V dalla struttura di tipo (VI), corrispondono ordinatamente agli elementi antinvolutori, involutori, nilpotenti delle algebre isomorfe all'algebra $A(J_1, J_2)$ ([5]).

Tenuto conto di P_1, P_2, P_3, P_4 e del teorema T_3, sussistono i teoremi:

T_6. *Una struttura di tipo* (VI) *su* V, *con* $-1 < \alpha < 3$, *determina su* V *due strutture quasi prodotto e due insiemi* ∞^2 *di strutture quasi complesse.*

T_7. *Una struttura di tipo* (VI) *su* V, *con* $\alpha < -1$ *e* $\alpha > 3$, *determina su* V *un insieme* ∞^2 *di strutture quasi tangenti, due insiemi* ∞^2 *di strutture quasi prodotto con due ulteriori strutture isolate dello stesso tipo, due insiemi* ∞^2 *di strutture quasi complesse.*

([4]) Si confrontino questi risultati con quelli di [1], relativi alle strutture di tipo (V) e con quelli di [6], relativi alle strutture di tipo (II) e generalizzazioni.

([5]) Ovviamente non vanno considerati l'unità e il suo opposto nel secondo caso e lo zero nel terzo caso.

T_8. *Una struttura di tipo* (VI) *su* V, *con* $\alpha = 3$, *determina su* V *quattro insiemi* ∞^2 *di strutture quasi complesse e un insieme* ∞^2 *di strutture quasi tangenti.*

Sull'esistenza di strutture *linearmente indipendenti* determinate da una struttura di tipo (VI), sussistono i teoremi

T_9. *Una struttura di tipo* (VI) *su* V, *assicura l'esistenza sulla varietà di quaterne di strutture quasi complesse linearmente indipendenti.*

T_{10}. *Una struttura di tipo* (VI) *su* V *assicura, per* $\alpha > 3$ *e* $\alpha < -1$, *l'esistenza sulla varietà di quintuple di strutture quasi prodotto e di terne di strutture quasi tangenti linearmente indipendenti; per* $\alpha = 3$, *di coppie di strutture quasi tangenti linearmente indipendenti; per* $-1 < \alpha < 3$, *di una singola struttura quasi prodotto.*

I teoremi T_9 e T_{10} seguono subito, tenuto conto di T_3 (v. 5) e di P_1 (v. 3).

Bibliografia

[1] S. Donnini e V. Mangione, *Sulle varietà dotate di una struttura di tipo* (V) *secondo H. Wakakuwa*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 329-343.

[2] H. A. Eliopulos, *Structures presque tangentes sur les variétés differentiable*, Compt. Rend. Acad. Sci. **255** (14) (1962), 1563-1565.

[3] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry*, (I), (II), Interscience, London, 1963-68.

[4] V. Mangione, *Connessioni quasi complesse e strutture di tipo* (V) *secondo H. Wakakuwa*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 65-70.

[5] G. Scorza, *Opere scelte*, Roma, 1962.

[6] F. Tricerri, *Sulle varietà dotate di due strutture quasi complesse linearmente indipendenti*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 349-358.

[7] H. Wakakuwa, *On linearly independent almost complex structures in a differentiable manifold*, Tohoku Math. J. (3) **13** (1961), 393-422.

[8] K. Yano, *Differential Geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

Summary

Let V be a differential manifold and let A be the subalgebra of $\mathscr{D}^1_1$, *generated by three almost complex structures, defining on V a structure* (VI) *according to H. Wakakuwa. We show that the subalgebra A can also be obtained, starting from two convenient almost complex structures and that A has dimension* 6. *We determine the sets of almost complex, almost product and almost tangent structures, defined on V by the structure* (VI).

* * *