Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 73-83

MARINA DI NATALE (*)

Sulle soluzioni di un sistema autonomo non lineare di equazioni alle differenze finite (**)

Introduzione

Le equazioni alle differenze finite del primo ordine della forma

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{0.1}$$

dove f è un'applicazione in generale non lineare di un intervallo dell'asse reale in sé, sono frequentemente utilizzate nel campo delle scienze naturali (fisiche, chimiche, biologiche) per descrivere il comportamento dinamico di diversi fenomeni [9]. Anche nelle scienze sociali ed economiche si incontrano modelli dinamici rappresentati da equazioni del tipo (0.1) [1].

Sia lo studio del comportamento periodico delle soluzioni di (0.1) sia l'analisi della stabilità degli stati di equilibrio in relazione alla non linearità del modello sono stati recentemente sviluppati e hanno riguardato anche sistemi dinamici espressi da equazioni vettoriali (si vedano, ad esempio, [3], [4], [7], [8]).

Prestando particolare attenzione alle applicazioni nel campo dell'economia matematica, in precedenti lavori abbiamo considerato un'equazione scalare non lineare del tipo

$$y(t-1) = F(t,\ y(t)) \tag{0.2}$$

dove il valore della soluzione all'istante t è assegnato implicitamente in funzione

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, Via C. Saldini 50, I-20133 Milano.

(**) Lavoro finanziato dal M.P.I. – Ricevuto: 20-V-1986.

del corrispondente valore nel periodo precedente. In [6] è stato risolto il problema delle condizioni iniziali e in [5] è stato studiato il comportamento asintotico e la stabilità delle soluzioni dell'equazione (0.2) nella forma autonoma

$$y(t-1)=f(y(t)) .$$

I risultati ottenuti nel caso reale non sono però immediatamente estendibili ad un'equazione vettoriale in quanto l'ordinamento naturale dei numeri reali gioca un ruolo essenziale nel comportamento delle iterate di un'applicazione f di un intervallo in sé.

In questa Nota si considera il sistema multidimensionale non lineare in forma autonoma (¹)

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}^0(t) \quad t\in[0,\ 1) \qquad \boldsymbol{y}(t-1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)) \quad t\in[1,\ K) \tag{0.3}$$

e si studia il problema dell'esistenza e dell'unicità in grande delle soluzioni in dipendenza del dato iniziale $\boldsymbol{y}^0$ e del valore di K, $1<K\leqq+\infty$. Inoltre, se $K=+\infty$, in ulteriori opportune ipotesi su f e sulla forma del codominio, viene ricavata una caratterizzazione dell'insieme dei valori ammissibili per il dato iniziale in termini di punti periodici della funzione $\boldsymbol{f}$.

Infine, l'applicabilità dei risultati ottenuti viene illustrata con semplici modelli dinamici di economia.

1 – Indichiamo con R la retta euclidea, con S la sua compattificazione (come d'uso) con l'aggiunta di $-\infty$ e $+\infty$ e con l'abituale ordinamento.

Sia inoltre per ogni $n>1$ intero

$$R^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\colon\ x_i\in R,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$$

$$S^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\colon\ x_i\in S,\ i=1,\ \ldots,\ n\} .$$

(¹) Le ipotesi che vengono fatte in questa Nota sul segno di t e delle componenti dei vettori $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{y}^0$ derivano dal significato che queste quantità assumono nelle applicazioni in campo economico. In tal caso la variabile t rappresenta il tempo, $\boldsymbol{y}$ un vettore di grandezze economiche (in generale non negative) e $\boldsymbol{y}^0$ il valore che esso assume nel periodo iniziale.

Introduciamo in S^n $(n>1)$ un ordinamento parziale mediante le relazioni

$$\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i\leqq y_i \text{ per ogni } \quad i=1,\ \dots,\ n; \qquad \boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i<y_i \text{ per ogni } \quad i=1,\ \dots,\ n.$$

Per ogni $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ in S^n poniamo

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}\in S^n\colon\ a_i<x_i<b_i,\ i=1,\ \dots,\ n\}$$

$$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}\in S^n\colon\ a_i\leqq x_i<b_i,\ i=1,\ \dots,\ n\}$$

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}\in S^n\colon\ a_i<x_i\leqq b_i,\ i=1,\ \dots,\ n\}$$

e, per ogni $\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{b}$,

$$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}\in S^n\colon\ a_i\leqq x_i\leqq b_i,\ i=1,\ \dots,\ n\}\ .$$

Detti $\boldsymbol{0}$ e $+\infty$ i punti rispettivamente di coordinate $x_i=0$ e $x_i=+\infty$ per ogni $i=1,\ \dots,\ n$ poniamo

$$P^n=(\boldsymbol{0},\ +\infty) \qquad R^n_+=[\boldsymbol{0},\ +\infty) \qquad S^n_+=[\boldsymbol{0},\ +\infty]\ .$$

Sia $\boldsymbol{f}\colon B^0\subseteqq R^n\to R^p$ con $p>1$ intero. Diremo $\operatorname{Sup}\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in B^0\}$ il vettore di componenti $\operatorname{Sup}\{f_i(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in B^0\}$. Analogamente definiremo $\operatorname{Inf}\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in B^0\}$.

La funzione $\boldsymbol{f}$ sarà detta *isotona* (*antitona*) in B^0 quando

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leqq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\geqq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})) \qquad \text{ogniqualvolta } \boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y} \text{ in } B^0\ .$$

Se $\boldsymbol{f}$ muta B^0 in sé, per ogni $k\geqq 1$ intero si possono definire le iterate k-me di $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f}^1=\boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{f}^k=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{k-1}) \quad \text{e gli insiemi } B^k=\boldsymbol{f}(B^{k-1})=\boldsymbol{f}^k(B^0)\ .$$

Si noti che $B^k\subseteqq B^{k-1}$ per ogni $k\geqq 1$.

Se $\boldsymbol{f}$ è una funzione iniettiva, continua e isotona o antitona, le sue iterate $\boldsymbol{f}^k$ sono iniettive e continue per ogni $k\geqq 1$. Inoltre esse sono isotone per ogni k se $\boldsymbol{f}$ è isotona, isotone per k pari e antitone per k dispari se $\boldsymbol{f}$ è antitona.

Allora, se $B^0=R^n_+$, posto per ogni $k\geqq 1$ e per ogni $\boldsymbol{x}\in S^n_+$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^k(\boldsymbol{x})=\begin{matrix}\operatorname{Sup}\{\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{z}),\ \boldsymbol{z}\in[\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x})\} & \text{se } \boldsymbol{f}^k \text{ isotona}\\ \operatorname{Inf}\ \{\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{z}),\ \boldsymbol{z}\in[\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x})\} & \text{se } \boldsymbol{f}^k \text{ antitona}\end{matrix} \tag{1.1}$$

la funzione $\tilde{\boldsymbol{f}}^k$ coincide con $\boldsymbol{f}^k$ in R^n_+ e ne conserva in S^n_+ l'isotonia o l'antitonia.

2 – Siano: $K > 1$ intero oppure $K = +\infty$, $t \in [0, +\infty)$, f: $R_+^n \to R_+^n$, y^0: $[0, 1) \to R_+^n$ e consideriamo il sistema autonomo non lineare di equazioni alle differenze finite

$$(2.1) \qquad y(t) = y^0(t) \qquad t \in [0, 1) \qquad y(t-1) = f(y(t)) \quad t \in [1, K) .$$

Studieremo il problema dell'esistenza di soluzioni di tale sistema nell'intervallo $[0, K)$.

Seguendo le notazioni introdotte in **1**, siano, qui e nel seguito, f^k l'iterata k-ma di f, $B^0 = R_+^n$ e $B^k = f^k(R_+^n)$. Vale il

Teorema 1. *Il sistema* (2.1) *ammette soluzione in* $[0, K)$ *se e solo se per ogni* $t \in [0, 1)$ *risulta*

$$(2.2) \qquad y^0(t) \in B^{K-1} \qquad se\ K < +\infty$$

$$(2.3) \qquad y^0(t) \in \bigcap_0^\infty B^k \qquad se\ K = +\infty$$

Inoltre, se f *è iniettiva, la soluzione è unica.*

Dim. Se $K < +\infty$ la dimostrazione è analoga a quella del Teorema 1 in [5]: basta considerare in luogo degli intervalli di S^1 C_k e C_∞ gli insiemi B^k e $\bigcap_0^\infty B^k$ e ricordare che $B^k \subseteq B^{k-1}$ per ogni $k \geqq 1$.

Se $K = +\infty$ e vale (2.3), la (2.2) è soddisfatta per ogni k, $1 \leqq k < +\infty$: esiste quindi una soluzione del sistema (2.1) in ogni intervallo $[0, k)$ con $k < +\infty$. Ragionando come nel caso $K < +\infty$ si dimostra che ogni tale soluzione è la restrizione a $[0, k)$ di una soluzione di (2.1) definita (almeno) in $[0, k+1)$. Per l'arbitrarietà di k, esiste quindi una soluzione di (2.1) definita in $[0, +\infty)$ e se f è iniettiva essa è ovviamente unica.

Viceversa, se y è soluzione di (2.1) in $[0, +\infty)$, $y/[0, k)$ è soluzione in $[0, k)$ per ogni $k \geqq 2$: la (2.2) vale quindi per ogni k, $1 \leqq k < +\infty$, e segue (2.3).

3 – Come abbiamo osservato nella Introduzione, il sistema (2.1) trova impiego in diversi campi. Per queste applicazioni, allo scopo di rendere più facile la verifica delle condizioni (2.2) e (2.3) per un assegnato dato iniziale, è opportuno prendere in considerazione ulteriori ipotesi su f che rendano particolarmente

semplice la forma geometrica degli insiemi B^k che risultano altrimenti del tutto generali.

Le ipotesi che verranno ora introdotte raggiungono tale scopo e consentono anche, qualora si ricerchi una soluzione $\boldsymbol{y}(t)$ definita in $[0, +\infty)$, di caratterizzare l'insieme $\bigcap_0^\infty B^k$ dei valori ammissibili per il dato iniziale in termini di punti periodici per la funzione $\boldsymbol{f}$. Il Teorema 1 e il successivo Teorema 2 costituiscono una estensione al caso $n>1$ del Teorema 1 di [**6**] e trovano riscontro, ad esempio, in alcune applicazioni economiche, come mostrano i semplici modelli dinamici illustrati in 4.

Indichiamo con

$$V=\{\boldsymbol{x}\in S_+^n\colon \tilde{\boldsymbol{f}}^2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\}$$

l'insieme dei punti di S_+^n periodici di periodo 2 per la funzione $\tilde{\boldsymbol{f}}$ è definita in (1.1). Se $V\neq\emptyset$ poniamo

$$\boldsymbol{\alpha}=\operatorname{Inf}\{\boldsymbol{x}\in V\}\qquad \boldsymbol{\beta}=\operatorname{Sup}\{\boldsymbol{x}\in V\}\qquad B=[\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}]\,.$$

Teorema 2. *Valgano le ipotesi seguenti:* (i) $\boldsymbol{f}$ *sia iniettiva e continua;* (ii) $\boldsymbol{f}$ *e* $\boldsymbol{f}^{-1}$ *siano isotone (antitone);* (iii) $B^1=\boldsymbol{f}(R_+^n)$ *sia un intervallo di* R_+^n.

Allora per ogni k, $1\leqq k<+\infty$, *risulta*

$$B^k=\begin{cases}(\tilde{\boldsymbol{f}}^k(+\infty),\ \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{0})] & \textit{se } \boldsymbol{f} \textit{ antitona e } k \textit{ dispari}\\ [\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{0}),\ \tilde{\boldsymbol{f}}^k(+\infty)) & \textit{altrimenti.}\end{cases}\tag{3.1}$$

Inoltre $V\neq\emptyset$ *e risulta*

$$\boldsymbol{\alpha}=\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{f}^{2k}(\boldsymbol{0})\in V\qquad \boldsymbol{\beta}=\lim_{k\to+\infty}\tilde{\boldsymbol{f}}^{2k}(+\infty)\in V\tag{3.2}$$

$$\bigcap_0^\infty B^k=B\cap R_+^n\ (^2)\tag{3.3}$$

Osservazione 1. Per l'ipotesi (i), $\boldsymbol{f}(R_+^n)$ non può essere un intervallo contenuto in R^m con $m<n$ [2].

---

(2) B può essere privo di punti interni e $B\cap R_+^n$ può essere vuoto.

Osservazione 2. L'ipotesi $\boldsymbol{f}^{-1}$ isotona (antitona) come $\boldsymbol{f}$ è necessaria ad assicurare che B^k sia un intervallo per ogni k. Infatti la funzione $\boldsymbol{f}$: $R_+^2 \to R_+^2$ così definita

$$\boldsymbol{f}(x_1,\ x_2) = (x_1 x_2 + e^{x_1},\ x_2)$$

soddisfa tutte le altre ipotesi del Teorema 2 ma B^2 non è un intervallo.

Osservazione 3. Il valore $\tilde{\boldsymbol{f}}^k(+\infty)$ può essere eventualmente approssimato con un procedimento iterativo. Infatti, per la continuità e l'isotonia di $\boldsymbol{f}^k$, per ogni $\boldsymbol{w} \in P^n$ fissato, risulta

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^k(+\infty) = \operatorname{Sup}\{\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in R_+^n\} = \operatorname{Sup}\{\boldsymbol{f}^k(t\boldsymbol{w}),\ t \in [0,\ +\infty)\} = \lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{f}^k(t\boldsymbol{w}) .$$

Nel caso dell'antitonia in luogo di Sup interviene Inf.

Osservazione 4. I Teoremi 1 e 2 estendono al caso $n > 1$ il Teorema 1 di [6] le cui ipotesi coincidono con quelle del Teorema 2 per $n = 1$. Va evidenziato tuttavia un diverso comportamento della funzione $\boldsymbol{f}$ nel caso scalare e nel caso vettoriale per quanto riguarda i punti periodici.

Se $n = 1$ f ha al più punti periodici di periodo 1 o 2; questo non è più vero se $n > 1$. Ad esempio, la funzione $\boldsymbol{f}$: $R_+^3 \to R_+^3$ definita da

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_3,\ x_1^2,\ \sqrt{x_2})$$

è continua, iniettiva, isotona assieme alla sua inversa e per essa i punti $(x_1,\ x_1^2,\ x_1)$ sono fissi e ogni altro punto di R_+^3 ha periodo 3. È inoltre noto che ogni funzione reale, continua, che applica un intervallo reale in sé e che possiede un punto di periodo 3, possiede anche punti di periodo p ($p = 1, 2, 3, \ldots$) [8]. Ciò induce a ritenere che i risultati sul comportamento asintotico delle soluzioni definite per $t \to +\infty$ ottenuti in [5] per il sistema (2.1) con $n = 1$, essendo legati all'insieme dei punti periodici di $\boldsymbol{f}$, non siano immediatamente estendibili nella stessa forma al caso $n > 1$.

Dim. Per il teorema di invarianza del dominio di Brouwer [2], la restrizione all'aperto P^n della funzione $\boldsymbol{f}^k$, continua e iniettiva, è un omeomorfismo per ogni $k \geqq 1$. Essendo quindi $\boldsymbol{f}^k(P^n)$ un aperto e $\boldsymbol{f}^k$ isotona o antitona, per ogni $\boldsymbol{x} \in P^n$

valgono le disuguaglianze

$$\boldsymbol{f}^k(0) < \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}) < \mathrm{Sup}\{\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in P^n\} = \bar{\boldsymbol{f}}^k(+\infty) \quad \text{se } \boldsymbol{f}^k \text{ isotona}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}^k(+\infty) = \mathrm{Inf}\{\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in P^n\} < \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}^k(0) \quad \text{se } \boldsymbol{f}^k \text{ antitona.}$$

Allora l'intervallo I^k così definito

$$I^k = \begin{array}{ll} (\bar{\boldsymbol{f}}^k(+\infty),\ \boldsymbol{f}^k(0)] & \text{se } f \text{ antitona e } k \text{ dispari} \\ [\boldsymbol{f}^k(0),\ \bar{\boldsymbol{f}}^k(+\infty)) & \text{altrimenti} \end{array}$$

è il minimo intervallo di R^n_+ contenente $B^k = \boldsymbol{f}^k(R^n_+)$ e $I^{k+1} \subseteqq I^k$ per ogni $k \geqq 1$.

Proviamo ora che $B^k \equiv I^k$ per ogni $k \geqq 1$ procedendo per induzione su k.

Se $k=1$ $B^1 \equiv I^1$ in quanto B^1 è un intervallo per ipotesi. Sia allora $B^1 \equiv I^1, \ldots, B^{k-1} \equiv I^{k-1}$ e dimostriamo che $B^k \equiv I^k$. Infatti, sia $\boldsymbol{w} \in I^k$ e consideriamo il caso $\boldsymbol{f}^k$ isotona. Allora, poiché $\boldsymbol{w} < \bar{\boldsymbol{f}}^k(+\infty)$, deve esistere $\boldsymbol{y} \in R^n_+$ tale che $w_i \leqq (\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{y}))_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Ma $I^k \subseteqq I^1 \equiv B^1$ e quindi $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ con $\boldsymbol{x} \in R^n_+$.

Dalle disuguaglianze

$$\boldsymbol{f}^k(0) \leqq \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{y})$$

applicando $\boldsymbol{f}^{-1}$ si ricava

$$\boldsymbol{f}^{k-1}(0) \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{f}^{k-1}(\boldsymbol{y}) \qquad \text{se } \boldsymbol{f}^{-1} \text{ isotona}$$

$$\boldsymbol{f}^{k-1}(\boldsymbol{y}) \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{f}^{k-1}(0) \qquad \text{se } \boldsymbol{f}^{-1} \text{ antitona}$$

e poiché $B^{k-1} \equiv I^{k-1}$ è un intervallo dovrà essere $\boldsymbol{x} \in B^{k-1}$ e quindi $\boldsymbol{w} \in B^k$. Analogamente si prova che $\boldsymbol{w} \in B^k$ nel caso $\boldsymbol{f}^k$ antitona e (3.1) è così dimostrata.

Dimostriamo ora che V non è vuoto e che valgono (3.2) e (3.3). Poiché $\boldsymbol{f}^2$ e quindi $\bar{\boldsymbol{f}}^2$ sono in ogni caso isotone, per ogni $k \geqq 1$ risulta

$$0 \leqq \boldsymbol{f}^{2k}(0) \leqq \boldsymbol{f}^{2(k+1)}(0) < \bar{\boldsymbol{f}}^{2(k+1)}(+\infty) \leqq \bar{\boldsymbol{f}}^{2k}(+\infty) \leqq +\infty\ .$$

Pertanto esistono in S^n_+

$$\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{f}^{2k}(0) = \boldsymbol{a} \qquad \lim_{k \to +\infty} \bar{\boldsymbol{f}}^{2k}(+\infty) = \boldsymbol{b}$$

con $0 \leqq \boldsymbol{a} \leqq \boldsymbol{b} \leqq +\infty$.

Osserviamo adesso che $B^{2k} = [f^{2k}(0),\ \tilde{f}^{2k}(+\infty))$ per la (3.1) e che, per l'iniettività di f, $B^k \equiv R_+^n \equiv [a,\ b] \bigcap R_+^n$ per ogni k se $B^1 \equiv R_+^n$, altrimenti $B^{2(k+1)} \subsetneqq B^{2k}$ propriamente. In quest'ultimo caso, se $\tilde{f}^{2k}(+\infty) \notin R_+^n$ per alcun k, allora

$$B^k \downarrow [a,\ b] \bigcap R_+^n \quad \text{per } k \to +\infty$$

(eventualmente vuoto), mentre se $\tilde{f}^{2k}(+\infty) \in R_+^n$ per qualche k, allora $b \in R_+^n$ e per $k \to +\infty$ $B^k \downarrow [a,\ b] \neq \emptyset$. (3.4) vale quindi comunque.

Osserviamo ora che $[a,\ b] \supseteqq V$ in quanto $[f^{2k}(0),\ \tilde{f}^{2k}(+\infty)] \supseteqq V$ per ogni $k \geqq 1$; quindi $[a,\ b] \supseteqq B$. Inoltre, per la continuità e l'isotonia di f^2 in R_+^n si ha

$$\begin{aligned}\tilde{f}^2(a) &= \operatorname{Sup}\{f^2(x),\ x \in [0,\ a)\} \\ &= \operatorname*{Sup}_{k \geqq 1}\{\operatorname{Sup}\{f^2(x),\ x \in [0,\ f^{2k}(0)]\}\} = \operatorname*{Sup}_{k \geqq 1} f^{2k+2}(0) = a \\ \tilde{f}^2(b) &= \operatorname{Sup}\{f^2(x),\ x \in [0,\ b)\} \\ &= \operatorname*{Inf}_{k \geqq 1}\{\operatorname{Sup}\{f^2(x),\ x \in [0,\ \tilde{f}^{2k}(+\infty))\}\} = \operatorname*{Inf}_{k \geqq 1} \tilde{f}^{2k+2}(+\infty) = b\end{aligned}$$

Quindi $a,\ b \in V \neq \emptyset$, $a = \alpha$, $b = \beta$, $B = [a,\ b]$ e (3.2) e (3.3) sono dimostrate.

4 – I risultati ottenuti possono trovare applicazione in campo economico per stabilire, ad esempio, lo sviluppo nel tempo di un modello a più variabili rappresentato in termini matematici da un sistema del tipo (2.1), qualora le grandezze economiche in gioco assumano all'inizio del processo certi assegnati valori.

Presentiamo come primo esempio il seguente modello dinamico di macroeconomia.

Indichiamo con t la variabile tempo e con $y(t)$, $c(t)$, $s(t)$, $i(t)$ rispettivamente l'intensità di reddito prodotto, di consumo, di risparmio, di investimento relativi all'istante t.

Supponiamo che il consumo sia maggiore o uguale al consumo di sussistenza e che si mantenga costante nel tempo, ovvero $c(t) = c_0$, $c_0 > 0$ e che gli investimenti effettuati all'istante t si ripercuotano sulla produzione del reddito nell'istante successivo $t+1$, dipendendo solo dalla quantità di reddito ottenibile, ovvero che $i(t) = I(y(t+1))$. Riteniamo inoltre che il risparmio all'istante t dipenda solo dagli investimenti che si vogliono effettuare all'istante successivo $t+1$, cioè che $s(t)=S(i(t+1))$. Si possono inoltre fare, in modo naturale, le ipotesi che le funzioni $I(y)$ e $S(i)$ siano non negative, continue e strettamente crescenti al crescere rispettivamente di y e i in $[0, +\infty)$ e che $I(0)=0$ e $S(0)\geqq 0$.

Supponiamo infine che il reddito prodotto all'istante t si ripartisca tutto nel consumo e nel risparmio relativi allo stesso istante. Allora, in condizioni di equilibrio dinamico dovrà essere soddisfatto il sistema

$$c(t)=c_0 \qquad c_0>0$$

$$i(t)=I(y(t+1)) \qquad s(t)=S(i(t+1)) \qquad y(t)=c(t)+s(t)$$

riconducibile al sistema di equazioni alle differenze finite del 1° ordine in forma autonoma

$$y(t-1)=c_0+S(i(t)) \qquad i(t-1)=I(y(t)) \tag{4.1}$$

ovvero all'equazione in forma vettoriale

$$\boldsymbol{Y}(t-1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}(t))$$

dove si è posto $\boldsymbol{Y}=(y,\ i)$ e $\boldsymbol{F}(y,\ i)=(c_0+S(i),\ I(y))$.

Nelle ipotesi fatte, $\boldsymbol{F}$: $R^2_+\to R^2_+$ risulta essere una funzione iniettiva, continua, isotona con la sua inversa, e $B^1=\boldsymbol{F}(R^2_+)$ è un intervallo contenuto propriamente in R^2_+ in quanto

$$\boldsymbol{F}(0,\ i)=\{(u,\ v)\in R^2_+:\ u\geqq c_0+S(0)>0,\ v=0\}$$

$$\boldsymbol{F}(y,\ 0)=\{(u,\ v)\in R^2_+:\ u=c_0+S(0)>0,\ v\geqq 0\}\ .$$

In conclusione, assegnati i valori del reddito e degli investimenti nel periodo iniziale $[0,\ 1)$, lo sviluppo delle grandezze economiche nel tempo può essere determinato applicando al sistema (4.1) i Teoremi 1 e 2. I risultati dipenderanno ovviamente dalla forma della funzione $\boldsymbol{F}$.

Presentiamo ora un modello dinamico del tipo di Leontieff chiuso.

Supponiamo che nel sistema economico considerato esistano n beni, ciascuno dei quali viene prodotto attivando un distinto processo produttivo, e che per la produzione del bene i-mo vengano impiegate certe quantità dei beni medesimi che in parte sono trasformate e in parte sono investite (beni capitali).

Indichiamo con $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ il vettore non negativo le cui componenti rappresentano le quantità di beni prodotte all'istante t e con

$$A(\boldsymbol{x}) = [a_{ij}(\boldsymbol{x})]_{i,j=1,\ldots,n} \qquad B(\boldsymbol{x}) = [b_{ij}(\boldsymbol{x})]_{i,j=1,\ldots,n}$$

rispettivamente la matrice dei coefficienti tecnici e la matrice dei coefficienti di capitale, i cui elementi non negativi $a_{ij}(\boldsymbol{x})$ e $b_{ij}(\boldsymbol{x})$ dipendono in generale dalle quantità di beni che si vogliono produrre.

Nell'ipotesi che il sistema economico non abbia scambi di beni con l'esterno e che rimangano inutilizzate eventuali eccedenze della produzione rispetto agli impieghi, si può formulare il seguente modello dinamico

$$\boldsymbol{x}(t-1) = A(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{s} + [B(\boldsymbol{x}(t)) - B(\boldsymbol{x}(t-1))] \cdot \boldsymbol{s} \tag{4.2}$$

dove $\boldsymbol{s} = [1, \ldots, 1]^T$ è il vettore colonna unitario.

In (4.2) si ritiene che le quantità di beni $\boldsymbol{x}(t-1)$ disponibili all'istante $t-1$ vengano completamente impiegate e ripartite nella quantità $A(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{s}$ di beni trasformati e nella quantità $[B(\boldsymbol{x}(t)) - B(\boldsymbol{x}(t-1))] \cdot \boldsymbol{s}$ di beni capitali investiti all'istante successivo t per la produzione della quantità $\boldsymbol{x}(t)$ di beni medesimi. Nell'ulteriore ipotesi che i capitali fissi siano proporzionali alle quantità prodotte ovvero $B(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{s} = B \cdot \boldsymbol{x}$ con B matrice costante e che, detta I la matrice identità, la matrice $I + B$ ammetta inversa non negativa (3), il modello (4.2) diventa

$$\boldsymbol{x}(t-1) = (I+B)^{-1}[A(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{s} + B \cdot \boldsymbol{x}(t)] \tag{4.3}$$

e si presenta nella forma (2.1) con $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (I+B)^{-1}[A(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{s} + B \cdot \boldsymbol{x}]$ funzione in generale non lineare.

Come esempio particolarmente semplice, consideriamo il caso in cui si abbia

$$B = [\beta_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n} \quad = [0]_{i,j=1,\ldots,n}$$

$$A(\boldsymbol{x}) = [a_{ij}(\boldsymbol{x})]_{i,j=1,\ldots,n} = [\alpha_{ij}(x_j)]_{i,j=1,\ldots,n}$$

---

(3) Queste ulteriori ipotesi hanno carattere preminentemente matematico e consentono di sviluppare lo studio del modello non lineare (4.2) utilizzando i teoremi di questa Nota.

con $\alpha_{ij}(x_j)$ funzioni non negative, continue, strettamente crescenti in R_+ e tali che per ogni i, $j=1, \ldots, n$ risulti

$$\alpha_{ij}(0)=0; \;\; \alpha_{ij}(x_j)>0 \Rightarrow \alpha_{lj}(x_j)=0=\alpha_{ik}(x_k) \qquad \forall l\neq i \qquad \forall k\neq j \, .$$

Allora tutte le ipotesi del Teorema 2 sono soddisfatte e valgono i risultati enunciati.

Bibliografia

[1] W. J. BAUMOL, *Economic dynamics*, Macmillan, New York, 1970.

[2] L. BERS, *Introduction to Topology*, Courant Institute of Mathematical Science, New York University, New York, 1956.

[3] P. COLLET and J. P. ECKMANN, *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhaüser, Boston, 1980.

[4] R. H. DAY, *Irregular growth cycles*, American Economic Review **72** (1982), 406-414.

[5] M. DI NATALE, *Comportamento asintotico delle soluzioni di una equazione alle differenze finite*, Atti Accad. Sci. Torino **116** (1982), 275-285.

[6] M. DI NATALE e D. ROUX, *Alcune osservazioni su di una equazione alle differenze finite*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **114** (1980), 209-216.

[7] J. GUCKENEIMER and P. HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Applied Math. Sciences Series n. **42**, Springer, 1983.

[8] T. Y. LI and Y. A. YORKE, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985-992.

[9] R. B. MAY, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261** (1976), 459-467.

Summary

The autonomous system $\boldsymbol{y}(t-1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))$ of first order, nonlinear difference equations is considered. Firstly, existence and uniqueness of solutions are proved under general conditions dependent on the set of initial values and on the interval in which the system is solved. Then, further hypotheses allow to specify the geometric shape of the set of initial values which also is characterized in terms of periodic points of $\boldsymbol{f}$ for solutions defined for any $t>0$. Finally, some economic applications are showed.

***