Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 67-72

M. KONSTANTINIDOU and K. SERAFIMIDIS (*)

Sur les filets des hypergroupes canoniques strictement réticulés (**)

Dans un hypergroupe canonique réticulé H (H_c.R.) (¹) on définit entre les éléments de H^+ (²) une relation $\mathscr{R}$ come suit

$$a \equiv b (\text{mod } \mathscr{R}) \Leftrightarrow \{a \wedge x = 0 \Leftrightarrow b \wedge x = 0\}$$

quels que soient a, b, $x \in H^+$.

On démontre facilement que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées *filets* de H, et on note $H^+/\mathscr{R} = \mathscr{F}$ et pour tout $a \in H$, $\bar{a}$ la classe de H pour la relation $\mathscr{R}$ contenante a.

L'ensemble $\mathscr{F}$ peut être ordonné par la relation $\geqslant$ comme suit

(1) $$\bar{a} \geqslant \bar{b} \Leftrightarrow \{a \wedge x = 0 \Rightarrow b \wedge x = 0\} .$$

Il est évident que

(2) $$a, \ b \in H^+ \quad \text{et} \quad a \geqslant b \Rightarrow \bar{a} \geqslant \bar{b} .$$

(*) Indirizzo degli AA.: École Polytéchnique de l'Université Aristote de Thessaloniki, Département des Sciences Physiques et Mathématiques, GR-54006 Thessaloniki.

(**) Ricevuto: 19-V-1986.

(¹) On appelle *hypergroupe canonique réticulé* (H_c.R.) une structure $(H, +, \leqslant, \vee, \wedge)$ qui vérifie les axiomes suivants:

(i) La structure $(H, +)$ est un hypergroupe canonique [4], [5]. (ii) $(H, \vee, \wedge)$ est un treillis. (iii) Pour tout x, $y \in H$ la somme $x + y$ est un intervalle fermé de H. (iv) $(x \vee y) + a \supseteq (x + a) \vee (y + a)$. (v) $(x \wedge y) + a \subseteq (x + a) \wedge (y + a)$ $\forall x, \ y, \ a \in H$.

Si les deux derniers axiomes sont vérifiés pour l'égalité seulement, on dit alors que l'on a un *hypergroupe canonique strictement réticulé* (H_c.S.R.).

(²) $H^+ = \{x \in H : x \geqslant 0\}$, $H^- = \{x \in H : x \leqslant 0\}$, $H^p = \{x \in H : x \| 0\}$ (où $x \| y$ signifie que x et y ne sont pas comparables).

Remarques 1. (a) Le plus petit élément de $\mathscr{F}$ est le $\overline{0}$, composé du seul élément 0.

(b) Si pour un élément $a \in H^+$ la relazione $a \wedge x = 0$ est vérifiée seulement pour $x = 0$, alors pour tout $a' \in \bar{a}$ la relation $a' \wedge y = 0$ est vérifiée seulement si $y = 0$.

(c) Dans le cas où H est totalement ordonné les filets de H sont le $\overline{0}$ et H^+.

(d) Si on note $\mathcal{C}_a = \{x \in H^+ : a \wedge x = 0\}$ on a que pour tout $a' \in \bar{a}$ et tout $x \in \mathcal{C}_a$ sont étrangers entre eux.

Proposition 1. *Si a, $b \in H^+$, alors*

$$\text{(i)} \quad a \equiv b(\mathscr{R}) \Leftrightarrow \mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b \qquad \text{(ii)} \quad \bar{a} \geqslant \bar{b} \Leftrightarrow \mathcal{C}_a \subseteq \mathcal{C}_b$$

$$\text{(iii)} \quad \forall x \in \mathcal{C}_a \Rightarrow \bar{a} \subseteq \bigcup_{x \in \mathcal{C}_a} \mathcal{C}_x \qquad \text{(iv)} \quad \forall x \in \mathcal{C}_a \Rightarrow \bar{x} \subseteq \mathcal{C}_a \qquad \text{(v)} \quad \mathcal{C}_a \wedge \mathcal{C}_b \subseteq \mathcal{C}_{a \wedge b}\,.$$

Dém. (i) Évident. (ii) Si $a' \in \bar{a}$ et $a' \wedge x = 0$, c'est-à-dire $x \in \mathcal{C}_a$, alors $b \wedge x = 0$, donc $x \in \mathcal{C}_b$. (iii) Si $a' \in \bar{a}$ et $x \in \mathcal{C}_a$, alors $a \wedge x = 0$, c'est-à-dire $x \in \mathcal{C}_x \subseteq \bigcup_{x \in \mathcal{C}_a} \mathcal{C}_x$. (iv) Pour un élément $x' \in \bar{x}$, où $x \in \mathcal{C}_a$, on a $x' \wedge a = 0$, car $x \wedge a = 0$. Donc $x' \in \mathcal{C}_a$. (v) En effet, si $x \in \mathcal{C}_a$, $y \in \mathcal{C}_b$, alors $a \wedge x = 0$, $b \wedge y = 0$, d'où l'on obtient la relation $(a \wedge x) \wedge (b \wedge y) = (a \wedge b) \wedge (x \wedge y) = 0$ et par conséquent $x \wedge y \in \mathcal{C}_{a \wedge b}$.

Soit H un $\mathrm{H_c.S.R.}$

Proposition 2. *Les filets de H sont des sous-demi-hypergroupes et des sous-treillis convexes de H^+.*

Dém. En effet, si a_1, $a_2 \in \bar{a}$, alors les relations $a_1 \wedge x = 0$ et $a_2 \wedge x = 0$ entraînent [6] $(a_1 + a_2) \wedge x = 0$, $(a_1 \vee a_2) \wedge x = 0$, et il est évident que $(a_1 \wedge a_2) \wedge x = 0$. Si maintenant a', $a'' \in \bar{a}$ et $x \in H^+$ tel que $a' \leqslant x \leqslant a''$, on a aussi $\bar{a} \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{a}''$, donc $\bar{a}' = \bar{a}'' = \bar{x}$ et par conséquent $x \in \bar{a}$.

Proposition 3. *Dans un $\mathrm{H_c.S.R.}$ H la relation $\mathscr{R}$ est normale* [3].

---

[3] Soient H un hypergroupoide et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence dans H. La relation $\mathscr{R}$ s'appelle *normale* si, $C(x)$ signifiant la classe (mod $\mathscr{R}$) de H à laquelle appartient l'élément x, pour tout x, y, x', $y' \in H$ tels que $x' \in C(x)$, $y' \in C(y)$, on a $C(x)C(y) \subseteq \bigcup_{z' \in x'y'} C(z')$ [6].

Dém. En effet, on sait que si a, $b \in H^+$, alors $\bar{a} + \bar{b} = \bigcup_{(a', b') \in \bar{a} \times \bar{b}} a' + b'$. Mais puisque a', $b' \geqslant 0$ et comme H est un $\mathrm{H_c.S.R.}$, on aura(4) $a' + b' > \{a', b'\} \geqslant 0$ [6]. Si donc un $\xi \in a' + b'$ quelconque, pour tout $x \in \mathcal{C}_\xi$ on a $\xi \wedge x = 0$, alors $a' \wedge x = 0$ et par conséquent $(a' + b') \wedge x = 0$ [7]. Donc, et selon la relation (1) on a $\bar{\xi} \geqslant \bar{\eta}'$ pour tout $\eta' \in a' + b'$, et d'après ce qui précède $\bar{\xi} = \bar{\eta}'$. Ainsi, il en résulte que $a' + b' \subseteq \bar{\xi}$. Si maintenant $a'' \in \bar{a}$, $b'' \in \bar{b}$ pour tout $x \in \mathcal{C}_\xi$ on a $a'' \wedge x = 0$ et $b'' \wedge x = 0$ alors $(a'' + b'') \wedge x = 0$, d'où de même par la relation (1) $\bar{\xi} \geqslant \bar{\eta}''$ pour tout $\eta'' \in a'' + b''$ et visiblement on a $\bar{\xi} = \bar{\eta}''$. Ainsi $a'' + b'' \subseteq \bar{\xi}$. Par conséquent $\bigcup_{(a', b') \in \bar{a} \times \bar{b}} (a' + b') \subseteq \bar{\xi}$, donc $\bar{a} + \bar{b} \subseteq \bar{\xi}$ et la relation $\mathcal{R}$ est en effet normale dans H^+.

Ainsi on a la proposition

Proposition 4. *L'ensemble* $\mathcal{F} = H^+/R$ *muni par l'hyperopération*

$$\bar{a} \dotplus \bar{b} = \{\bar{w} \in \mathcal{F} : w \in a' + b';\ (a', b') \in \bar{a} \times \bar{b}\}$$

est un demi-groupe commutatif avec élément neutre la classe $\overline{0}$.

(Car d'après les précédents, l'hyperopération est une opération).

Proposition 5. *Si H en tant que treillis satisfait à la condition de chaîne ascendante, alors tout filet contient un élément maximum.*

Dém. En effet, si a_1, $a_2 \in \bar{a}$, alors $a_1 \vee a_2 \in \bar{a}$ (Proposition 2) et pour tout $\varkappa$ fini, si $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \bar{a}$ on a $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_\varkappa \in \bar{a}$. Par conséquent, puisque H satisfait à la condition de chaîne ascendante, alors [1] il existe m fini tel que $\bigvee_{i=1}^{m} a_i = \bigvee_{a_j \in \bar{a}} a_j \in \bar{a}$ donc $\bigvee_{a_j \in \bar{a}} a_j$ est l'élément maximum de $\bar{a}$.

Proposition 6. *Pour tout $\bar{a}$, $\bar{b} \in \mathcal{F}$ il existe le* $\sup(\bar{a}, \bar{b})$ *et on a*

$$\sup(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \dotplus \bar{b} = \overline{a \vee b}\,.$$

---

(4) Si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble ordonné, $A \leqslant B$ (resp. $A < B$) signifie que pour tout $a \in A$, $b \in B$ on a $a \leqslant b$ (resp. $a < b$); en plus, $a \leqslant B$ et $A \leqslant b$ signifient les mêmes choses que $\{a\} \leqslant B$ et $A \leqslant \{b\}$ et, de même, pour $<$.

Dém. En effet, puisque H est strictement réticulé et $\{a, b\} \geqslant 0$, on a $a + b \geqslant \{a, b\}$ [7] d'où $a + b \geqslant a \vee b > \{a, b\}$. Par conséquent pour tout $\xi \in a + b$ on a $\bar{\xi} \geqslant \overline{a \vee b} \geqslant \{\bar{a}, \bar{b}\}$. Maintenant, si $\bar{d} \geqslant \{\bar{a}, \bar{b}\}$, alors la relation $d \wedge x = 0$ entraîne $a \wedge x = 0$, $b \wedge x = 0$, donc $(a + b) \wedge x = 0$, c'est-à-dire $\bar{d} \geqslant \bar{\xi}$. Mais (Proposition 4) $\bar{\xi} = \bar{a} \dotplus \bar{b}$, par conséquent, $\bar{a} \dotplus \bar{b} = \sup(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{a \vee b}$.

Corollaire 1. *Si $\bar{a}$, $\bar{b}$ sont des filets de H, alors*

$$\text{(i)} \quad \bar{a} = \bar{a} \dotplus \bar{a} \qquad \text{(ii)} \quad \bar{b} \geqslant \bar{a} \Rightarrow \bar{b} = \bar{a} \dotplus \bar{b} .$$

Il est facile de constater que $\inf(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{a \wedge b}$. Donc on a la proposition

Proposition 7. *L'ensemble $\mathscr{F}$ des filets de H est un treillis.*

Proposition 8. *Si $\mathscr{F}$ est l'ensemble des filets d'un* H_c.S.R., *alors la structure* $(\mathscr{F}, \dotplus, \vee, \wedge)$ *est un demi-groupe reticulé dual avec élément neutre.*

Dém. En effet, en raison de la Proposition 7 et du Corollaire 1 on a

$$(\bar{a} \vee \bar{b}) \dotplus \bar{c} = \overline{a \vee b} \dotplus \bar{c} = (\bar{a} \dotplus \bar{b}) \dotplus \bar{c}$$

$$= (\bar{a} \dotplus \bar{b}) \dotplus (\bar{c} \dotplus \bar{c}) = (\bar{a} \dotplus \bar{c}) \dotplus (\bar{b} \dotplus \bar{c}) = (\bar{a} \dotplus \bar{c}) \vee (\bar{b} \dotplus \bar{c}) .$$

De même on obtient

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \dotplus \bar{c} = (\bar{a} \dotplus \bar{c}) \wedge (\bar{b} \dotplus \bar{c}) .$$

On peut facilement constater, comme dans la théorie classique [2], que deux filets $\bar{a}$, $\bar{b}$ sont étrangers entre eux si et seulement si a, b sont aussi étrangers entre eux.

Dans un H_c.R. H un filet $\bar{a} \neq \overline{0}$ sera considéré comme *minimal* si $\bar{x} < \bar{a}$ entraine $\bar{x} = \overline{0}$.

Proposition 9. *Dans un* H_c.S.R. *H tout filet minimal est totalement ordonné.*

Dém. Soit $\bar{f} \neq \overline{0}$ un filet minimal et $a, b \in \bar{f}$. Alors, puisque

$0 < a \wedge b \leqslant \{a, b\}$ on aura soit $a \wedge b = a$, d'où $a \leqslant b$, soit $a \wedge b = b$, d'où $b \leqslant a$, soit $a \wedge b < \{a, b\}$, c'est-à-dire $\{\bar{a}, \bar{b}\} \geqslant \overline{a \wedge b}$ et dans ce cas on a $\overline{a \wedge b} = \bar{f}$, car $\bar{a} = \bar{b} = \bar{f}$ et $\bar{f}$ est minimal. Comme H est strictement réticulé, on a [7]

$$0 \in (a \wedge b) - (a \wedge b) = [a - (a \wedge b)] \wedge [b - (a \wedge b)]$$

donc il existe des éléments $x \in a - (a \wedge b)$, $y \in b - (a \wedge b)$ tels que $x \wedge y = 0$.

En considérant des cas possibles, on a:

(i) Si x, $y \in \bar{f}$, on obtient $\overline{0} = \overline{x \wedge y} = \bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{x} = \bar{f}$ ce qui contredit l'hypothése.

(ii) Dans le cas où $x \notin \bar{f}$, puisque H est un H_c.S.R. d'aprés la relation $a > a \wedge b > 0$, on a $0 > -(a \wedge b)$ ce qui entraîne $a > a - (a \wedge b)$ [6]. Par conséquent $a > x \geqslant 0$ et $\bar{a} > \bar{x} \geqslant \overline{0}$ d'où l'on obtient $\bar{x} = \overline{0}$. Donc $0 \in a - (a \wedge b)$ c'est-à-dire $a = a \wedge b$, autrement dit $a \leqslant b$.

(iii) Si x, $y \notin \bar{f}$ d'après (ii) on a $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, c'est-à-dire $a = b$.

Proposition 10. *Dans un* H_c.S.R. H *où* $x < y \Rightarrow (y - x) \cap H^p \neq \emptyset$ *le sous-hypergroupe canonique qui est engendré par un filet minimal* $\bar{f}$ *de* H $[5]_2$ *est totalement ordonné.*

Dém. Puisque, selon la proposition précédente, $\bar{f}$ est totalement ordonné et comme H est un H_c.S.R., $-\bar{f}$ est aussi totalement ordonné. Si $a \in \bar{f}$ et $b \in -\bar{f}$, alors $-b \in \bar{f}$. Dans le cas où $[a + (-b)] \wedge x = 0$, alors, et puisque $a - b \geqslant \{a, b\}$ on a $a \wedge x = 0$ et $(-b) \wedge x = 0$. Réciproquement si $a \wedge x = 0$ et $(-b) \wedge x = 0$ alors $[a \wedge (-b)] \wedge x = 0$. Par conséquent $a - b \subseteq \bar{f}$. Soit maintenant a, $b \in \bar{f}$ et $a > b$. Alors il existe un élément $x \in a - b$ tel que $x > 0$ et il n'existe pas un élément $y \in a - b$ tel que $y < 0$, parce que autrement on aurait $0 \in a - b$, c'est-à-dire $a = b$, ce qui est absurde. Mais puisque $(a - b) \cap H^p = \emptyset$ on a $a - b > 0$. D'autre part, puisque $-b \leqslant 0$ on a $a \geqslant a - b \geqslant 0$. Par conséquent, pour tout $z \in a - b$ on a $\bar{f} = \bar{a} \geqslant \bar{z} \geqslant \overline{0}$, d'où, soit $\bar{z} = 0$, c'est-à-dire $z = 0$ et $a = b$ qui est absurde, soit $\bar{z} = \bar{f}$ et par conséquent $a - b \subseteq \bar{f}$. Enfin, on a le cas de $a - a$ pour $a \in f$. D'après la relation $a \geqslant 0$ on obtient $a \geqslant a - a$ (puisque H est un H_c.S.R.). Mais $a - a = (a - a)^+ \cup (a - a)^-$, où $(a - a)^+ = (a - a) \cap H^+$ et $(a - a)^- = (a - a) \cap H^-$. Ainsi, $a \geqslant (a - a)^+ \geqslant 0$ et alors pour tout $w \in (a - a)^+$ on a $\bar{f} = \bar{a} \geqslant \bar{w} \geqslant \overline{0}$, donc $(a - a)^+ \subseteq \bar{a} = \bar{f}$ et $(a - a)^- \subseteq -\bar{f}$. Il résulte donc que l'ensemble $\bar{f} \cup (-\bar{f}) \cup \{0\}$ est un sous-hypergroupe canonique de H et plus précisement est celui qui est engendré par f.

References

[1] R. DUBREIL, M. L. JACOTIN, L. LESIEUR and R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[2] P. JAFFARD, *Contribution à l'étude des groupes ordonnés*, J. Math. Pures Appl. 32 (1953), 203-280.

[3] M. KRASNER, *Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications à la théorie de Galois et de produit d'entrelacement («wreath product») de groupes*, Math. Balkanica 3 (1973), 229-280.

[4] F. R. MARTY, *Sur une généralisation de la notion du groupe*. Actes du 8[me] Congrés des Mathématiciens Scandinaves, Stockolm 1934, 45-49.

[5] J. MITTAS: $[\circ]_1$ *Sur une classe d'hypergroupes commutatifs*, C. R. Acad. Sc. Paris Ser. A **269** (1969), 485-488; $[\circ]_2$ *Hypergroupes canoniques*, Math. Balkanica 2 (1972), 165-179.

[6] K. SERAFIMIDIS, *Hypergroupes canoniques réticulés*, Thèse de doctorat. École Polytechnique de l'Université Aristote de Thessaloniki. Annexe n. 7, tome 9, Thessaloniki 1983.

[7] CH. SERAFIMIDIS, *Sur les hypergroupoïdes réticulés*, Boll. Un. Mat. Ital. (6) 5-A (1986), 217-225.

Abstract

In the present paper the classes of an equivalence among the positive elements of a hypercomposed structure [3], [4], $[5]_{1,2}$ *are studied. The structure under study is the strictly l-ordered canonical hypergroup* [6], [7].

***