Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 61-65

CARLO SILLI (*)

Sulle onde di discontinuità in una particolare classe di continui bidimensionali sottili (**)

1 - Introduzione e posizione del problema

Considerata una superficie materiale S limitata, elastica, mobile e col suo sforzo interno $\boldsymbol{t}_n = \underset{\sim}{T}\boldsymbol{n}$ tutto situato in ogni suo punto e in ogni istante nel suo piano tangente e funzione a priori generica del gradiente di deformazione (misurato da una conveniente configurazione di riferimento) e della temperatura θ; essa, come un filo, reagisce a tensione ad esempio quando, non essendo né vincolata né soggetta a forze esterne, ha una giacitura piana ed è tesa al bordo parallelamente alla giacitura stessa. In questa stessa situazione la superficie S può reagire a pressione se opportunamente compressa lungo il bordo.

In questo lavoro, con riferimento a un modello di continuo bidimensionale in cui lo sforzo interno possa anche avere carattere di pressione, ci proponiamo di indagare, come abbiamo già fatto per un continuo unidimensionale [**1**]$_1$, se ci possano essere onde straordinarie di discontinuità meccaniche.

Si mostra, con risultato analogo a quello ottenuto per un continuo unidimensionale [**1**]$_1$, che non sono possibili onde straordinarie di discontinuità meccaniche tanto nel caso del piano tangente continuo in ogni punto e in ogni istante quanto nel caso in cui la superficie presenti una linea di discontinuità per il piano tangente e questo sia nel caso in cui lo sforzo interno $\boldsymbol{t}_n$ è parallelo a $\boldsymbol{n}$ sia nel caso in cui $\boldsymbol{t}_n$ ha una componente normale e una componente trasversa, ma sempre nel piano tangente alla superfice materiale stessa.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). - Ricevuto: 8-V-1986.

I risultati di assenza di onde, nel caso del piano tangente continuo, sono analoghi a quelli ottenuti nel caso di una membrana $[\mathbf{1}]_{2,3}$; i risultati invece di assenza di onde, nel caso dello spigolo, sono diversi da quelli ottenuti per la membrana stessa $[\mathbf{1}]_{2,3}$.

Poiché il procedimento usato per ottenere i risultati relativi al caso in cui lo sforzo $\boldsymbol{t}_n$ è parallelo a $\boldsymbol{n}$ (v. 2, (a) e (b)) è del tutto analogo a quello usato nello studio del continuo unidimensionale $[\mathbf{1}]_1$, ci limitiamo qui ad esporre i risultati ora ottenuti rimandando appunto a $[\mathbf{1}]_1$.

In modo analogo, poiché il procedimento usato per ottenere il risultato relativo al caso generale per lo sforzo $\boldsymbol{t}_n$, nell'ipotesi del piano tangente continuo, (v. 3, (a)) è analogo a quello usato nello studio di una membrana $[\mathbf{1}]_3$, esponiamo anche qui il risultato ottenuto rimandando ora a $[\mathbf{1}]_3$.

2 - Studio delle onde straordinarie di discontinuità nel caso $\boldsymbol{t}_n = t\boldsymbol{n}$

Nella nuova ipotesi per lo sforzo interno, che in questo paragrafo si suppone sempre ortogonale alla linea attraverso cui si esercita, indaghiamo adesso se ci possano essere onde straordinarie di discontinuità meccaniche sia nel caso in cui il piano tangente a S sia sempre continuo sia nel caso in cui la superficie materiale presenti una linea di discontinuità, per il piano tangente, che si propaga.

(a) Nel caso del piano tangente continuo in ogni punto e in ogni istante, dal principio della quantità di moto si ha ancora la relazione di discontinuità

$$\rho_0[\boldsymbol{v}]\, U_N + [t]\, J'\boldsymbol{n} = 0 \tag{2.1}$$

con ρ_0 densità materiale nella configurazione di riferimento, t componente (negativa) di $\boldsymbol{t}_n$ secondo $\boldsymbol{n}$ e $J' = \mathrm{d}\gamma'/\mathrm{d}\Gamma'$ già definito in $[\mathbf{1}]_3$ e continuo.

Supposto anche qui, come nel caso $t > 0$ $[\mathbf{1}]_2$ e in modo analogo a quanto fatto in $[\mathbf{1}]_1$, che sia continuo il modulo della velocità $\boldsymbol{v}$, si ricava dalla (2.1) che, anche nell'ipotesi in cui lo sforzo interno ha carattere di pressione, la superficie materiale S con piano tangente sempre continuo non è sede di onde straordinarie di discontinuità meccaniche.

(b) Nel caso che la superficie materiale S presenti una linea di discontinuità nella configurazione attuale, per il piano tangente, che si propaga, la (2.1) diventa ora

$$\rho_0[\boldsymbol{v}]\,U_N + [t\boldsymbol{n}]\,J' = 0\ . \tag{2.1$'$}$$

Da questa e dalla relazione di compatibilità cinematica di Hugoniot-Hadamard [**1**]$_2$ e [2] si ottengono, analogamente a quanto fatto in [**1**]$_1$, le relazioni

$$t^+ J' = \rho_0\, U_N^2\, \bar{J}^+ \qquad\qquad t^- J' = \rho_0\, U_N^2\, \bar{J}^- \tag{2.2}$$

con $\bar{J}$ opportuno coefficiente positivo già definito in [**1**]$_4$, e queste per il segno negativo di t^+ e t^- possono essere verificate solo per U_N immaginaria.

Si ha quindi che nelle ipotesi assunte per lo sforzo interno nel continuo bidimensionale S in esame, e nell'ipotesi della discontinuità del piano tangente, non ci possono essere onde straordinarie di discontinuità.

3 - Studio delle onde straordinarie di discontinuità nel caso generale per lo sforzo interno

Sempre con riferimento al continuo bidimensionale S di cui ai paragrafi precedenti per qualunque versore $\boldsymbol{n}$ situato nel suo piano tangente, ove questo esiste ed è unico, lo sforzo interno $\boldsymbol{t}_n = \underset{\sim}{T}\boldsymbol{n}$ tutto situato nel piano tangente stesso non sia più ora necessariamente parallelo a $\boldsymbol{n}$.

Precisamente noi qui supponiamo (in modo analogo a quanto fatto in [**1**]$_3$ per una membrana) che detto $\boldsymbol{n}$ il versore ortogonale alla linea attraverso cui si esercita lo sforzo $\boldsymbol{t}_n$ e $\boldsymbol{u}$ il versore ad essa tangente, opportunamente orientato, sia

$$\boldsymbol{t}_n = t_1\,\boldsymbol{n} + t_2\,\boldsymbol{u} \tag{3.1}$$

con t_1 negativo, t_2 non negativo ed entrambi a priori arbitrari.

In questa ipotesi più generale per lo sforzo interno indaghiamo anche qui se ci possono essere onde straordinarie di discontinuità sia nel caso del piano tangente sempre continuo, sia nel caso in cui la superficie S presenti una linea di discontinuità per il piano tangente stesso.

(a) Nel caso del piano tangente continuo in ogni punto e in ogni istante supporremo qui che sia continuo il modulo dello sforzo interno anziché il modulo della velocità come fatto nel paragrafo precedente. Nell'ipotesi poi che esista una funzione scalare f, continua, negativa, strettamente crescente in valore assoluto (o una funzione ψ, continua, positiva, strettamente crescente) per cui valga in tutta la configurazione attuale di S, e indipendentemente dai suoi punti, la relazione

$$t_1 = f(t_2) \quad (\text{o } 0 < t_2 = \psi(t_1)) \qquad \text{con } t_1 < 0 \quad t_2 > 0 \tag{3.2}$$

ne discende come in [1]₃ che nella superfice materiale S non si hanno onde straordinarie di discontinuità meccaniche.

(b) Nel caso ora che la superficie materiale S presenti nella configurazione attuale una linea di discontinuità per il piano tangente si ha ancora, nelle ipotesi ora assunte per lo sforzo interno, sempre dalla seconda relazione di discontinuità, per $[\boldsymbol{v}]$

$$[\boldsymbol{v}] = -\frac{J'}{\rho_0 U_N}(\boldsymbol{t}_n^+ - \boldsymbol{t}_n^-) . \tag{3.3}$$

Per l'espressione di $\boldsymbol{t}_n$ data dalla (3.1) si ha dalla precedente

$$[\boldsymbol{v}] = -\frac{J'}{\rho_0 U_N}([t_1 \boldsymbol{n}] + [t_2]\boldsymbol{u}) . \tag{3.4}$$

Per il segno sempre negativo di t_1^+ e t_1^- il secondo membro è sempre diverso da zero.

Dalla seconda relazione di discontinuità è ancora

$$\rho_0 U_N^2 \boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{t}_n J'] \tag{3.5}$$

col solito significato di $\boldsymbol{\lambda}$.

Ma per $\boldsymbol{\lambda}$ è ancora come in $[\mathbf{1}]_4$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\alpha]\boldsymbol{u} + [\boldsymbol{n}\bar{J}] \tag{3.6}$$

(con α e $\bar{J} > 0$ già definiti in $[\mathbf{1}]_4$).

Dalle (3.5) e (3.6) è ora

$$\rho_0 U_N^2\{[\alpha]\boldsymbol{u} + [\boldsymbol{n}\bar{J}]\} = [\boldsymbol{t}_n J'] \tag{3.7}$$

e da questa, poiché i tre versori formano una terna in generale obliqua, si ha

$$\rho_0 U_N^2[\alpha] = J'[t_2]\,, \qquad \rho_0 U_N^2 \bar{J}^+ = J'\, t_1^+\,, \qquad \rho_0 U_N^2 \bar{J}^- = J'\, t_1^- \,. \tag{3.8}$$

La seconda e la terza relazione, per il segno negativo di t_1^+ e t_1^-, possono esser verificate solo per U_N immaginaria.

Dalla (3.3) si ha che anche la discontinuità di $\boldsymbol{v}$ è immaginaria.

Si ha dunque che per $t_1 < 0$ non si hanno, per $\boldsymbol{n}^+ \neq \boldsymbol{n}^-$, onde straordinarie di discontinuità come nel caso del continuo unidimensionale [1]$_1$.

Bibliografia

[1] C. SILLI: [•]$_1$ *Sulle onde di discontinuità in una particolare classe di continui sottili*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 33 (1984); [•]$_2$ *Ancora sulle onde straordinarie di discontinuità nei continui sottili*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 32 (1983), 276-286; [•]$_3$ *Alcune osservazioni sulle onde straordinarie di discontinuità in una membrana*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 557-565; [•]$_4$ *Sull'esistenza di onde straordinarie di discontinuità in una membrana termoelastica*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 467-480.

[2] T. Y. THOMAS, *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, New York, London, 1961.

Summary

In this paper we show that no extraordinary mechanical waves of discontinuity may occour for a bidimensional continuum whose internal stress may be a pressure.

* * *