Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 51-59

G. AMENDOLA e A. MANES (*)

Su una particolare classe di equazioni differenziali non lineari del secondo ordine (**)

1 - Introduzione

In questo lavoro si prende in esame un particolare tipo di equazioni differenziali non lineari del secondo ordine: si dimostra in 3 l'esistenza e l'unicità della soluzione in corrispondenza ad assegnate condizioni iniziali, e in 4 che le soluzioni sono periodiche.

Tali equazioni differenziali sono una generalizzazione di particolari equazioni che regolano alcuni problemi fisici (v. 2). I risultati ottenuti hanno ovviamente validità ed interesse per lo studio della classe di equazioni non lineari, indipendentemente dalle considerazioni fisiche che le hanno suggerite, anche per la possibilità che a tali equazioni si possa arrivare studiando problemi di natura diversa.

Continui riferimenti sono fatti ai volumi $[2]_{1,2}$ di R. D. Driver e a questi, al libro di G. Sansone e R. Conte [3] e al volume delle comunicazioni del Convegno Equadiff 78 [1] si rimanda per la diffusa bibliografia sugli argomenti trattati.

2 - Posizione del problema

L'equazione di moto di un punto materiale di massa m, supposta per semplicità unitaria, vincolato a muoversi senza attrito in un piano orizzontale

---

(*) Indirizzo degli AA.: G. AMENDOLA, Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini», Facoltà di Ingegneria, Via Diotisalvi 2, I-56100 Pisa. A. MANES, Dipartimento di Matematica, Università, Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del C.N.R. e con il contributo del M.P.I. – Ricevuto: 29-IV-1986.

x, y lungo la curva di equazione $y = ax^n$, quando su di esso agisca una forza elastica, dovuta ad una molla di costante k e lunghezza naturale nulla applicata nell'origine del prefissato sistema di coordinate cartesiane ortogonali, è espressa dalla seguente equazione differenziale

$$(1 + a^2 n^2 x^{2n-2})\ddot{x} + a^2 n^2 (n-1) x^{2n-3} \dot{x}^2 + k(x + a^2 n x^{2n-1}) = 0 \tag{2.1}$$

nella quale la funzione incognita è $x = x(t) \in C^2$,

$$a \in \mathbb{R} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2.2}$$

e k assume un prefissato valore positivo ($k > 0$).

Alle (2.1) vanno associate le condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \tag{2.3}$$

dove di solito è $t_0 = 0$.

Alla (2.1) si perviene facilmente ricorrendo alle equazioni di Lagrange o più semplicemente prendendo in esame l'espressione dell'energia totale

$$E(t) = \frac{1}{2}(1 + a^2 n^2 x^{2n-2}(t))\,\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}k(x^2(t) + a^2 x^{2n}(t)) \tag{2.4}$$

che, per la conservazione dell'energia meccanica, è tale che

$$\dot{E}(t) = 0 \tag{2.5}$$

per cui $E(t)$ è costante e si ha

$$E(t) = C \equiv \frac{1}{2}(1 + a^2 n^2 x_0^{2n-2})\,\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}k(x_0^2 + a^2 x_0^{2n}) \tag{2.6}$$

in base alle condizioni iniziali (2.3).

Qualunque siano i valori di a e di n, per la costante C sussiste la seguente limitazione

$$0 \leq C < +\infty\ ; \tag{2.7}$$

il caso con $C = 0$ si verifica solo per condizioni iniziali nulle. Possiamo anzi escludere tale caso perché in tale situazione, essendo $E(t)$ data dalla somma di termini tutti positivi, dalla (2.4) e $(2.6)_1$ segue che l'unica soluzione del problema è la soluzione banale $x(t) \equiv 0$; pertanto poniamo nella (2.7)

$$C \neq 0 \tag{2.8}$$

per cui le condizioni iniziali x_0 e $\dot{x}_0$ non devono essere contemporaneamente nulle.

3 - Esistenza e unicità della soluzione

Lo studio dell'equazione differenziale non lineare (2.1) con le assegnate condizioni iniziali (2.3) non presenta difficoltà quando in essa si ha

$$a = 0 \qquad \text{oppure} \quad a \neq 0 \qquad n = 0,\ 1 \tag{3.1}$$

perché in tali casi la (2.1) si riduce all'equazione dei moti armonici

$$\ddot{x} + kx = 0\ ; \tag{3.2}$$

supporremo quindi nel seguito

$$a \neq 0 \qquad n > 1\ . \tag{3.3}$$

Ciò premesso, se si pone

$$x_1(t) = x(t) \qquad x_2(t) = \dot{x}(t)\ , \tag{3.4}$$

è possibile trasformare, come è ben noto, l'equazione differenziale (2.1) in un sistema equivalente di due equazioni differenziali del primo ordine; si ha cioè

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = -\,a^2 n^2 (n-1)\,\frac{x_1^{2n-3}}{1 + a^2 n^2 x_1^{2n-2}}\,x_2^2 - k\frac{1 + a^2 n x_1^{2n-2}}{1 + a^2 n^2 x_1^{2n-2}}\,x_1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

con le seguenti condizioni iniziali

$$x_1(t_0) = x_0 \qquad x_2(t_0) = \dot{x}_0\ . \tag{3.6}$$

Conviene introdurre la seguente notazione vettoriale

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) &= \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ x_2) \\ f_2(x_1,\ x_2) \end{pmatrix} \qquad (3.7) \\
&= \begin{pmatrix} x_2 \\ -a^2 n^2(n-1) \dfrac{x_1^{2n-3}}{1+a^2 n^2 x_1^{2n-2}} x_2^2 - k \dfrac{1+a^2 n x_1^{2n-2}}{1+a^2 n^2 x_1^{2n-2}} x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

per cui il sistema (3.5) si scrive sinteticamente

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(x(t)) \tag{3.8}$$

e le condizioni iniziali (3.6) assumono la forma

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Indicando poi con J l'insieme di variazione di t e con D l'insieme di variazione di $\boldsymbol{x}$, possiamo assumere

$$J = \mathbb{R} \qquad D = \mathbb{R}^2 \tag{3.10}$$

e considerare come in $[2]_1$

$$\boldsymbol{f}\colon\ J \times D \to \mathbb{R}^2\,. \tag{3.11}$$

Una soluzione di (3.8) e (3.9) sarà dunque una funzione derivabile $\boldsymbol{x}\colon J \to \mathbb{R}^2$ tale che $(t_0,\ \boldsymbol{x}_0) \in J \times D$ e per ogni $t \in J$ si ha $(t,\ \boldsymbol{x}(t)) \in J \times D$ e $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$.

3-a *Unicità della soluzione.* Il sistema (3.8) con le condizioni iniziali (3.9) ammette al più una soluzione su ogni intervallo aperto contenente $t = t_0$, essendo

f: $J \times D \to \mathrm{R}^2$ continua con le derivate parziali prime

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2(n-1)\frac{a^2 n^2 x_1^{2n-3}}{1+a^2 n^2 x_1^{2n-2}} x_2$$

$$\text{(3.12)} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{(1+a^2 n^2 x_1^{2n-2})^2}\{a^2 n^2 (n-1)(2n-3-a^2 n^2 x_1^{2n-2}) x_1^{2n-4} x_2^2$$

$$+ k[1 + a^2 n(-2n^2+5n-1) x_1^{2n-2} + a^4 n^3 x_1^{4n-4}]\}$$

nell'insieme di definizione $J \times D$ (v. [2]$_1$, p. 44, Teorema A).

3-b *Esistenza della soluzione.* Resta da verificare l'esistenza dell'unica soluzione del problema. A tale scopo riprendiamo in esame l'espressione (2.4), che, tenendo presenti le (3.4), può essere scritta nella forma

$$\text{(3.13)} \qquad E(t) = \frac{1}{2}(1 + a^2 n^2 x_1^{2n-2}(t)) x_2^2(t) + \frac{1}{2} k (1 + a^2 x_1^{2n-2}(t)) x_1^2(t) \ .$$

Da tale relazione si ricavano le seguenti disuguaglianze

$$\text{(3.14)} \qquad \frac{1}{2} x_2^2(t) + \frac{1}{2} k x_1^2(t) \leqslant E(t) = C \qquad \text{cioè} \qquad x_1^2(t) \leqslant \frac{2C}{k} \quad x_2^2(t) \leqslant 2C \ ;$$

ma, per semplicità, assumiamo

$$\text{(3.15)} \qquad |x_1(t)| \leqslant M \quad |x_2(t)| \leqslant M \quad \forall t \in J \qquad M = \max(\sqrt{2C/k},\ \sqrt{2C}) \ .$$

In virtù di queste ultime limitazioni per $x_1(t)$ e $x_2(t)$ è possibile verificare che tutte le (3.12) sono limitate in $J \times D$; infatti con qualche calcolo si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \equiv A_{11} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \equiv A_{12} \qquad \left|\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right| \leqslant 2a^2 n^3 M^{2n-2} \equiv A_{22}$$

$$\text{(3.16)} \qquad \left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right| \leqslant k + (n^2 + k)(8 + A_{22}) A_{22} \equiv A_{21}$$

e quindi

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right| \leqslant \bar{A} \quad (i,\ j=1,\ 2) \qquad \bar{A} = \max_{(i,j=1,2)} A_{ij} = \max(A_{12},\ A_{21}) \tag{3.17}$$

qualunque sia $a \neq 0$ e $n > 1$.

Siamo ora in grado di verificare che $\boldsymbol{f}$ soddisfa la condizione di Lipshitz

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})\| \equiv \sum_{i=1}^{2} |f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\tilde{\boldsymbol{x}})| \leqslant H\,\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| \qquad \forall (t,\ \boldsymbol{x}),\ (t,\ \tilde{\boldsymbol{x}}) \in J \times D \tag{3.18}$$

dove

$$\|\boldsymbol{x}\| = |x_1| + |x_2| \tag{3.19}$$

e la costante di Lipshitz è

$$H = 1 + \bar{A}\ . \tag{3.20}$$

Infatti dalla (3.7) si ha subito

$$|f_1(\boldsymbol{x}) - f_1(\tilde{\boldsymbol{x}})| = |x_2 - \tilde{x}_2|\ , \tag{3.21}$$

mentre dal teorema del valor medio, tenendo presente che tutte le derivate parziali (3.12) sono limitate in $J \times D$ (v. (3.17)), segue che

$$|f_2(\boldsymbol{x}) - f_2(\tilde{\boldsymbol{x}})| \leqslant \bar{A}(|x_1 - \tilde{x}_1| + |x_2 - \tilde{x}_2|) \tag{3.22}$$

e quindi la (3.18), cioè che $\boldsymbol{f}$ è ovunque lipshitziana con costante H data dalla (3.20) (v. $[2]_2$, [4]).

Essendo quindi $\boldsymbol{f}$: $J \times D \to \mathbb{R}^2$ continua e lipshitziana, comunque si fissi $(t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ in $J \times D$ il sistema (3.8) con (3.9) ha una e una sola soluzione $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ su $(\alpha_1,\ \beta_1) \subset J$ tale che $t_0 \in (\alpha_1,\ \beta_1)$ e, se A è un sottinsieme chiuso e limitato di D, allora

$$\boldsymbol{x}(t) \in A \quad \text{per } t_0 \leqslant t < \beta_1 \quad \text{implica } \beta_1 = +\infty,$$

$$\boldsymbol{x}(t) \in A \quad \text{per } \alpha_1 < t \leqslant t_0 \quad \text{implica } \alpha_1 = -\infty$$

(v. $[2]_1$, p. 275, Teorema C).

Anche l'ultima parte di questo teorema è verificata in virtù delle limitazioni (3.15), dalle quali segue che

$$(x_1(t),\ x_2(t)) \in A = [-M,\ M] \times [-M,\ M] \subset D\ , \tag{3.23}$$

per cui l'intervallo di definizione dell'unica soluzione del problema è

$$(\alpha_1,\ \beta_1) = J\ . \tag{3.24}$$

4 - Soluzioni periodiche

L'equazione (2.1) con le condizioni iniziali (2.3) ha dunque una e una sola soluzione, la quale come abbiamo già osservato, è certamente periodica quando nella (2.2) si ponga $a=0$ oppure $a \neq 0$ e $n=0$ oppure 1 (v. (3.1), (3.2)). Consideriamo quindi gli altri casi, quando cioè valgono le (3.3). Riprendiamo in esame la $(2.6)_1$, che, in base alla (3.13), assume la forma

$$(1 + a^2 n^2 x_1^{2n-2})\, x_2^2 + k(1 + a^2 x_1^{2n-2})\, x_1^2 = 2C \tag{4.1}$$

e osserviamo che tale relazione nel piano delle fasi $(x_1,\ x_2)$ rappresenta un luogo di punti, detto traiettoria del sistema (3.5). La traiettoria può essere descritta in funzione del parametro t e, a priori, non è detto che essa coincida con l'intero luogo di punti espresso dalla (4.1).

Il sistema (3.5) ha un solo punto critico che coincide con l'origine (0, 0) del piano delle fasi, come si controlla facilmente risolvendo il sistema algebrico

$$f_1(x_1,\ x_2) = 0 \qquad f_2(x_1,\ x_2) = 0\ . \tag{4.2}$$

Tale punto corrisponde nel piano delle fasi alla soluzione $x_1(t) \equiv 0$ (e quindi $x_2(t) = 0$), che si ha solo in corrispondenza a condizioni nulle e cioè quando $C = 0$; di conseguenza esso non può appartenere all'insieme di punti espresso dalla (4.1) con $C > 0$ (v. (2.8)). Pertanto possiamo affermare che la traiettoria non può ridursi ad un solo punto dell'insieme espresso dalla (4.1) e cioè che essa non è singolare [3].

Il luogo di punti (4.1), in base alla (3.14), è contenuto nell'insieme

$$B = [-\sqrt{2C/k},\ +\sqrt{2C/k}] \times [-\sqrt{2C},\ +\sqrt{2C}] \qquad (B \subset A \subset D) \tag{4.3}$$

ed è rappresentato da una curva γ tale che

$$(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2) \in \gamma \Rightarrow (-\bar{x}_1,\ \bar{x}_2),\ (-\bar{x}_1,\ -\bar{x}_2),\ (\bar{x}_1,\ -\bar{x}_2) \in \gamma \tag{4.4}$$

cioè γ è simmetrica rispetto agli assi $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

Inoltre se si risolve la (4.1) rispetto ad x_2, si controlla facilmente che le rette $x_1 = \bar{x}_1$ con $\bar{x}_1$ tale che $2C \geqslant k(1 + a^2 \bar{x}_1^{2n-2})\bar{x}_1^2$ incontrano γ in due soli punti con ordinate

$$(x_2)_{1,2} = + \sqrt{(2C - k(1 + a^2 \bar{x}_1^{2n-2})\,\bar{x}_1^2)/(1 + a^2 n^2 \bar{x}_1^{2n-2})} \tag{4.5}$$

in accordo con le (4.4).

Anche le rette $x_2 = h \gtreqless 0$ $(|h| \leqslant \sqrt{2C})$ incontrano γ in due soli punti simmetrici rispetto all'asse x_2 dal momento che la funzione continua (v. (4.1))

$$g(\xi) = ka^2 \xi^{2n} + a^2 n^2 h^2 \xi^{2n-2} + k\xi^2 + h^2 - 2C \qquad (\xi = x_1) \tag{4.6}$$

è pari, decrescente per $\xi < 0$, crescente per $\xi > 0$ con

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} g(\xi) = +\infty \qquad g(0) = h^2 - 2C \leqslant 0 \qquad (g(0) = 0 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{2C}) \tag{4.7}$$

e quindi si annulla in due soli punti con ascisse opposte.

La curva γ è anche chiusa in quanto essa incontra l'asse x_2 (v. (4.7)) in

$$(0,\ \pm\sqrt{2C}) \in \gamma \tag{4.8}$$

e l'asse x_1 solo nei due punti le cui ascisse annullano il numeratore del radicando della (4.5), come si può controllare studiando la funzione al numeratore nella (4.5) in modo analogo a quanto fatto per $g(\xi)$.

Il moto lungo la traiettoria non si inverte mai in quanto il vettore velocità $\boldsymbol{w} = (\dot{x}_1,\ \dot{x}_2)$ del punto rappresentativo su γ non si annulla; infatti, in base alla (4.1), $x_1(t)$ e $x_2(t)$ non possono annullarsi contemporaneamente e quindi neppure le componenti di $\boldsymbol{w}$ (v. (3.5)).

Infine, osservando che $x_1(t)$ è una funzione crescente per $x_2 > 0$, in base alla $(3.5)_1$, possiamo concludere che la traiettoria coincide con l'intera curva γ, espressa dalla (4.1), orientata in senso orario. Detto pertanto $P_0 \equiv (x_1(t_0),\ x_2(t_0)) = (x_0,\ \dot{x}_0)$ il punto di γ che corrisponde alle condizioni iniziali, il punto rappresentativo si muoverà su γ in senso orario a partire da P_0 e ritornerà in P_0 dopo un certo intervallo di tempo T tale che

$$x(t_0) = x(t_0 + T) \,, \tag{4.9}$$

per cui la funzione $x(t)\colon J \to \mathbb{R}$ è periodica con periodo T (v. $[2]_1$, p. 409, Teorema C).

Ovviamente al variare di C e cioè delle condizioni iniziali si hanno traiettorie diverse, ciascuna delle quali rappresenta nel piano delle fasi una famiglia di soluzioni periodiche, le quali notoriamente differiscono per una traslazione del tempo per la ben nota proprietà dei sistemi differenziali autonomi, quale è (3.5) (v. $[2]_1$, p. 329, Lemma 28-E).

Bibliografia

[1] CONVEGNO EQUADIFF 78, *Equazioni differenziali ordinarie ed equazioni funzionali*, Firenze 24-30 maggio 1978.

[2] R. D. DRIVER: $[\bullet]_1$ *Ordinary and delay differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977; $[\bullet]_2$ *Introduction to ordinary differential equations*, Harper & Row, New York, 1978.

[3] G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Edizioni Cremonese, Roma, 1956.

[4] G. F. SIMMONS, *Introductions to Topology and Modern Analysis*, Mc-Graw, New York, 1963.

Summary

In this work we study the existence and the uniqueness of solutions for a particular class of non-linear differential equations of second order with initial conditions. We show also that the solutions of such equations must be periodic.

***