Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 303-313

R. PROCESI e R. ROTA (*)

Sui k-insiemi di tipo $(0, m, n)$ di uno spazio di Galois $S_{r,q}$ (**)

Introduzione

In uno spazio proiettivo $S_{r,q}$ un k-insieme di tipo $(0, m, n)$ è un insieme K contenente k punti e tale che ogni retta di $S_{r,q}$ o è esterna a K o incontra K in m o in n punti. Scopo del presente lavoro è quello di studiare quei particolari k-insiemi di tipo $(0, m, n)$ per i quali le 0-secanti sono tutte e sole le rette di due iperpiani fissati.

In **1** abbiamo esaminato tali k-insiemi nel piano proiettivo ed ottenuto limitazioni sui valori possibili per k, m, n, provando la non esistenza di alcune classi di k-insiemi. In **2**, utilizzando i risultati precedenti e quelli noti per il caso affine (cfr. [3]$_3$), abbiamo ottenuto teoremi di non esistenza per i casi $r=3$, q quadrato dispari, $m=(q-\sqrt{q})/2$, $n=(q+\sqrt{q})/2$, $q=2^h$, $q=p^2$ e per $r\geq 4$ per ogni possibile q.

1 - k-insiemi di tipo $(0, m, n)$ in π_q, con due sole rette esterne

Sia K un k-insieme di tipo $(0, m, n)$ con due sole rette 0-secanti r e r' e sia $P=r\cap r'$; per m ed n deve ovviamente risultare

$$1\leq m<n\leq q. \tag{1.1}$$

Si denoti rispettivamente con t_0 il numero delle 0-secanti K, con t_m il numero delle m-secanti e con t_n il numero delle n-secanti; allora si ha (cfr. [3]$_1$)

$$\begin{gathered} t_0+t_m+t_n=q^2+q+1 \\ mt_m+nt_n=k(q+1) \\ m(m-1)\,t_m+n(n-1)\,t_n=k(k-1)\,. \end{gathered} \tag{2.1}$$

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università "La Sapienza", P.le A. Moro 5, 00185 Roma, Italy.

(**) Ricevuto: 26-III-1986.

Sostituendo in questo sistema $t_0 = 2$ ed eliminando t_m e t_n, si ottiene l'equazione

$$k^2 - k[1 + (q+1)(n+m-1)] + mn(q^2+q-1) = 0\,, \tag{3.1}$$

che deve avere soluzioni intere.

Sia ora $Q \in \pi_q - \{K, r, r'\}$ e siano rispettivamente u_0, u_m, u_n i numeri delle rette per Q 0-secanti, m-secanti ed n-secanti K; allora, poichè $u_0 = 0$, $u_m + u_n = q+1$ ed inoltre $mu_m + nu_n = k$, si ha

$$u_m = \frac{n(q+1)-k}{n-m} \qquad u_n = \frac{k-m(q+1)}{n-m}\,. \tag{4.1}$$

Analogamente, se $R \in r$ o $R \in r'$, con $R \neq P$, denotati rispettivamente con u'_0, u'_m, u'_n i numeri delle rette per R, si ha

$$u'_m = \frac{nq-k}{n-m} = u_m - \frac{n}{n-m} \qquad u'_n = \frac{k-mq}{n-m} = u_n + \frac{m}{n-m}\,. \tag{5.1}$$

Se si considera il punto $P = r \cap r'$ e se w_0, w_m, w_n denotano i numeri delle rette per P, risulta

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{n(q-1)-k}{n-m} = u_m - \frac{2n}{n-m} \\ w_n &= \frac{k-m(q-1)}{n-m} = u_n + \frac{2m}{n-m}\,. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Infine, se $T \in K$ e v_m, v_n rappresentano rispettivamente i numeri delle rette per T, otteniamo

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{n(q+1)-k-q}{n-m} = u_m - \frac{q}{n-m} \\ v_n &= \frac{k-m(q+1)+q}{n-m} = u_n + \frac{q}{n-m}\,. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Dalla (5.1), dovendo essere $n/(n-m)$ e $m/(n-m)$ degli interi, $n-m$ deve dividere m e n, da cui con facili calcoli si ottiene

$$m = s(n-m) \qquad n = (s+1)(n-m)\,. \tag{8.1}$$

Dalla (7.1), per la stessa ragione, si deduce che $n-m$ deve dividere q; ne segue in particolare che $k=c(n-m)$ e pertanto la (3.1) diventa

$$(n-m)^2 c^2 - (n-m)^2 c[(2s+1)(q+1) - q/(n-m)]$$
$$+ s(s+1)(n-m)^2 (q^2+q-1) = 0\,,$$

cioè

$$c^2 - c[(2s+1)(q+1) - q/(n-m)] + s(s+1)(q^2+q-1) = 0\,. \tag{9.1}$$

Osserviamo che, denotate con k_1, k_2 le soluzioni della (3.1) ed utilizzando un doppio indice per i numeri di rette precedentemente definiti in modo che, per esempio, $u_{m,1}$ denoti il valore u_m relativo a $|K|=k_1$, si ottengono le

$$\begin{gathered} u_{m,1}=v_{n,2} \qquad v_{m,1}=u_{n,2} \qquad u_{n,2}-u_{m,1}=u_{n,1}-u_{m,2} \\ w_{n,2}-w_{m,1}=w_{n,1}-w_{m,2}\,. \end{gathered} \tag{10.1}$$

Dal fatto che $t_m>0$, $t_n>0$, u_m, u_n, u'_m, u'_n, v_m, v_n, w_m, $w_n \geqslant 0$, segue che

$$\begin{gathered} \frac{m(q^2+q-1)}{q+1} < k < \frac{n(q^2+q-1)}{q+1} \qquad m(q+1) \leqslant k \leqslant n(q+1) \\ mq \leqslant k \leqslant nq \qquad m(q+1)-q \leqslant k \leqslant n(q+1)-q \qquad m(q-1) \leqslant k \leqslant n(q-1), \end{gathered} \tag{11.1}$$

onde

$$m(q+1) \leqslant k \leqslant \min\,(n(q-1),\ n(q+1)-q)\,. \tag{12.1}$$

Da quanto detto segue:

I – *Condizione necessaria per l'esistenza in* π_q *di un k-insieme K di tipo* $(0, m, n)$ *con due sole rette* 0*-secanti, è che k soddisfi la* (3.1) *e la* (12.1), *valgano le* (4.1), (5.1), (6.1), (7.1) *e la* (8.1); *inoltre n-m deve dividere q e k.*

Osserviamo che per un punto di π_q diverso da P devono sempre passare almeno una m-secante ed una n-secante. Infatti

$$u_m = 0 \Rightarrow u'_m < 0$$

$$u_n = 0 \Rightarrow k_1 = m(q+1) \qquad k_2 = (q+1)(n-1)+1\,, \qquad \text{da cui}$$

$$n = q(q+1)/(q+2) \quad \text{che implica} \quad q+2|q\,,$$

$$u'_m = 0 \Rightarrow w_m < 0$$

$$u'_n = 0 \Rightarrow u_n < 0$$

$$w_m = 0 \Rightarrow k_1 = n(q-1) \qquad k_2 = m(q+1) - q + 2n, \qquad \text{da cui}$$

$$m = (q-1)(2n-q)/q \quad \text{e quindi} \quad q|2n \leqslant 2q\,,$$

onde $n = q/2$ (q pari) che implica $m = 0$, ovvero $n = q$ che implica $m = q-1$,

$$w_n = 0 \Rightarrow u_n < 0$$

$$v_m = 0 \Rightarrow k_1 = n(q+1) - q \qquad k_2 = m(q+1), \qquad \text{da cui}$$

$$n = q(q+1)/(q+2) \quad \text{che implica} \quad q+2|q\,,$$

$$v_n = 0 \Rightarrow u_n < 0\,.$$

Pertanto:

II – *Se per P non passano m-secanti, allora necessariamente* $n = q$, $m = q-1$, $k = q^2 - q$, $K = \pi_q - \{r, r'\}$.

III – *Se in π_q esiste un k-insieme K di tipo* $(0, m, n)$ *con due sole rette esterne e $n < q$, allora per ogni punto di π_q devono passare almeno una m-secante ed una n-secante e la* (12.1) *diventa*

$$m(q+1) < k < \min(n(q-1), n(q+1) - q)\,. \tag{13.1}$$

Allo scopo di determinare k-insiemi di tipo $(0, m, n)$ di π_q con due sole rette 0-secanti, ci si pone inizialmente il problema di trovare degli interi m e n soddisfacenti alla (1.1) e alla (8.1), tali che n-m divida q e tali che l'equazione (3.1) ammetta soluzioni intere che verifichino la (12.1). Inoltre i valori di q da considerare devono soddisfare le condizioni del teorema di Bruck-Ryser [1]. I seguenti interi sono accettabili.

q	n	m	k_1	k_2
25	15	10	330	295
32	28	24	844	840
36	24	18	792	726
63	27	18	1566	1251
63	49	42	2919	2842
80	24	16	1672	1488
80	50	40	3800	3410
80	60	50	4650	4180
80	64	56	4928	4712
80	75	70	5890	5775
81	54	45	4122	3915
84	42	28	3388	2478
88	72	64	6112	5904
95	90	85	8415	8290

Osserviamo che per ogni valore di q una terna ammissibile è $(0, q-2, q-1)$, alla quale corrispondono, per la (3.1), i valori $k_1 = q^2 - q - 1$, $k_2 = q^2 - q - 2$. Tali soluzioni però non sono accettabili perchè in questi casi si avrebbe $w_m < 0$.

Per ogni valore di q un'altra terna ammissibile è $(0, q-1, q)$, alla quale corrispondono i valori $k_1 = q^2 - q$, $k_2 = q^2 + q - 1$. La seconda soluzione non è accettabile in quanto implica $t_m < 0$. Se $k = q^2 - q$, allora evidentemente $K = \pi_q - \{r, r'\}$.

IV – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un k-insieme di tipo* $(0, m, n)$ *con due sole rette esterne* r, r' *e* $n - m = 1$, *è che* $m = q - 1$ *e* $n = q$, *onde* $K = \pi'_q - \{r, r'\}$.

Dim. Se $n - m = 1$, allora il discriminante della (3.1) diventa $\Delta = 4m(q+2)(m-q+2)+1$. Se $m \neq q-1$ e $m \neq q-2$ risulta $\Delta < 0$; per $m = q-2$ si ottengono i valori $k_1 = q^2 - q - 1$ e $k_2 = q^2 - q - 2$ non accettabili. Per $m = q-1$ si ha $K = \pi_q - \{r, r'\}$.

Come conseguenza immediata risulta allora

V – *Se q è un numero primo e K è un k-insieme di tipo* $(0, m, n)$ *con due sole rette esterne* r, r', *allora* $m = q - 1$, $n = q$ *e* $K = \pi_q - \{r, r'\}$.

VI – *Se K è un k-insieme di tipo* $(0, m, n)$ *con due sole rette* 0*-secanti e* $m \neq q-1$, $n \neq q$, *allora* $m \geqslant 5$.

Dim. Se $m=1$, per la (8.1) deve essere $n=2$. In tal caso il discriminante della (3.1) diventa $\Delta = -4q^2+4q+17$. Imponendo la condizione $\Delta \geqslant 0$ si vede che l'unico valore possibile per q è 2, onde si ottiene il k-insieme di tipo $(0, q-1, q)$ con $q=2$. Ripetendo in maniera analoga il ragionamento precedente per $m=2, 3, 4$ si trova come unico caso possibile il k-insieme dato dal piano privato di due rette.

VII – *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un k-insieme di tipo* $(0, m, q)$ *in* π_q *è che* $m=q-1$.

Dim. Sia S un punto di π_q diverso da P; allora, per le considerazioni precedenti la II, per S deve passare almeno una q-secante. D'altra parte le q-secanti passano tutte per P e pertanto per P non passano m-secanti, onde $m=q-1$.

VIII – *Condizione necessaria per l'esistenza di un k-insieme di tipo* $(0, m, n)$ *diverso da* $\pi_q - \{r, r'\}$ *è* $n \leqslant q-2$.

Dim. Sia K un k-insieme di π_q di tipo $(0, m, q-1)$ e siano r, r' le due rette 0-secanti K; poichè $n=q-1$, $K \neq \pi_q - \{r, r'\}$. Pertanto esiste $T \in \pi_q - \{K, r, r'\}$; per T passa esattamente una $(q-1)$-secante passante anche per il punto $P = r \cap r'$. Infatti una $(q-1)$-secante s per T non passante per P conterrebbe $P' = s \cap r$, $P'' = s \cap r'$ e $q-1$ punti su K oltre a T e cioè $q+2$ punti, il che è assurdo. Quindi per T è $u_{q-1}=1$, dunque $k = q(m+1)-1$ da cui seguono valori non accettabili per m.

Se in π_q esiste un k-insieme di tipo $(0, m, n)$ con due sole rette esterne e $5 \leqslant m < n \leqslant q-2$, allora è noto che $n-m$ deve dividere q e che il discriminante della (3.1) deve essere un quadrato. Pertanto

$$\Delta = [1+(q+1)(n+m-1)]^2 - 4mn(q^2+q-1) \geqslant 0$$

ovvero

$$\Delta = q^2[(n-m-1)^2-4m] + 2q(m^2+n^2-m-n) + (n+m)^2 + 4mn \geqslant 0 .$$

Poiché il termine noto ed il coefficiente della q sono sempre positivi, se il coefficiente di q^2 è positivo o nullo la condizione $\Delta \geqslant 0$ è sempre verificata. Se invece tale coefficiente è negativo, cioè se $n < (\sqrt{m}+1)^2$, si ha $\Delta \geq 0$ per

$$q \leq \frac{(n+m-n^2-m^2)+2\sqrt{mn(3mn+3m+3n-n^2-m^2-1)}}{(n-m-1)^2-4m}. \tag{14.1}$$

Da ciò segue che deve essere $3mn+3m+3n-m^2-n^2-1 \geq 0$ e quindi $[3(m+1)-\sqrt{5m^2+30m+5}]/2 \leq n < (\sqrt{m}+1)^2$. Pertanto

IX – *Fissati gli interi m, n con $5 \leq m < n \leq q-2$, tali che $n < (\sqrt{m}+1)^2$, condizione necessaria affinché esista in π_q un k-insieme di tipo $(0, m, n)$ è che*

$$q \leq t \qquad e \qquad n \geq [3(m+1)-\sqrt{5m^2+30m+5}]/2$$

dove t è la parte intera del secondo membro della (14.1).

Infine osserviamo che per $q = p^h$ deve risultare $n - m = p^a$, con $1 \leq a \leq h-1$ e quindi $m = sp^a$, $n = (s+1)p^a$, con $1 \leq s \leq p^{h-a}$ e $k = cp^a$ con c intero positivo. La (9.1) diventa in tal caso

$$c^2 - c[(2s+1)(p^h+1) - p^{h-a}] + s(s+1)(p^{2h}+p^h-1) = 0 \tag{15.1}$$

il cui discriminante è

$$\Delta = (p^h+1)[p^h - 2p^{h-a}(2s+1) + (2s+1)^2] + 4s(s+1) + p^{2(h-a)}.$$

2 - k-insiemi di tipo $(0, m, n)$ in $S_{r,q}$, $r \geq 3$, con due soli iperpiani esterni

Cominciamo con l'esaminare il caso $r = 3$. A tal fine sia K un k-insieme di tipo $(0, m, n)$ in $S_{3,q}$ tale che tutte e sole le rette esterne a K siano le rette di due piani π_1 e π_2; sia inoltre $r_0 = \pi_1 \cap \pi_2$.

Se consideriamo il generico piano $\bar{\pi}$ del fascio di piani passanti per r_0, l'intersezione $\bar{K} = \bar{\pi} \cap K$ è un $\bar{k}$-insieme di $\bar{\pi}$ di tipo $(0, m, n)$ con una sola retta esterna r_0. Se invece consideriamo un piano generico π_i non contenente la retta r_0, l'intersezione $K_i = \pi_i \cap K$ è un k_i-insieme di tipo $(0, m, n)$ con due sole rette esterne $r_{i,1} = \pi_i \cap \pi_1$, $r_{i,2} = \pi_i \cap \pi_2$. Pertanto, nello studiare i k-insiemi di tipo $(0, m, n)$ in $S_{3,q}$ con due soli piani esterni, dovremo tener conto delle condizioni relative a m, n, q e k ottenute nel paragrafo precedente per i k_i-insiemi $K_i = \pi_i \cap K$ e di quelle note per i $\bar{k}$-insiemi $\bar{K} = \bar{\pi} \cap K$ (cfr. [3]$_3$).

Possiamo quindi trasportare nello spazio i risultati ottenuti nel piano con la seguente proposizione

I – *Se q è primo, allora $m = q - 1$, $n = q$ e quindi $K = S_{3,q} - \{\pi_1 \cup \pi_2\}$. Se q non è primo e K non è lo spazio privato di due piani, allora $5 \leqslant m < n \leqslant q - 2$ e $n - m \geqslant 2$.*

Prima di esaminare alcuni casi di particolare interesse, osserviamo che, se denotiamo con k_1 e k_2 le soluzioni della (3.1), $k_1 \geqslant k_2$, e con $N(M)$ il numero dei piani per una n-secante (m-secante) non intersecante r_0 che intersecano K in un k_1-insieme, otteniamo

$$|K| = Nk_1 + (q + 1 - N)k_2 - nq \qquad |K| = Mk_1 + (q + 1 - M)k_2 - mq\,, \tag{1.2}$$

da cui $k_1 \neq k_2$, poichè altrimenti si avrebbe $n = m$, e

$$N - M = (n - m)q/(k_1 - k_2)\,. \tag{2.2}$$

Dalla (1.2), poichè $n - m$ divide m, n, q, k_1, k_2 segue che $n - m$ divide anche $|K|$; inoltre dalla (2.2) si deduce che

$$N - M = q/\sqrt{\Delta} \tag{3.2}$$

dove Δ è il discriminante della (9.1).

Osserviamo che deve essere $N - M \neq q$; infatti, se fosse $N - M = q$, risulterebbe $N = q + 1$ e $M = 1$, oppure $N = q$ e $M = 0$. Esaminiamo il primo caso, il secondo si tratta in modo analogo. Se $N = q + 1$, allora ogni piano per una n-secante interseca K in un k_1-insieme e ciò implica che ogni piano interseca K in un k_1-insieme. Da ciò seguirebbe $M = q + 1$, che è ovviamente assurdo.

Vogliamo ora esaminare separatamente i casi:

(α) q quadrato dispari, $m = (q - \sqrt{q})/2$, $n = (q + \sqrt{q})/2$; (β) $q = 2^h$;

(γ) $q = p^h$, $h \neq 2$, $p \neq 2$; (δ) $q = p^2$, $p \neq 2$.

(α) Come è noto (cfr. [3]$_3$), se q è un quadrato dispari, $m = (q - \sqrt{q})/2$, $n = (q + \sqrt{q})/2$, risulta $|\tilde{K}| = (q^2 \pm q)/2$; pertanto

$$|K| = (q - 1)\tilde{k}_2 + dq \tag{4.2}$$

dove $\tilde{k}_1 = (q^2 + q)/2$, $\tilde{k}_2 = (q^2 - q)/2$ e d è il numero dei piani $\tilde{\pi}$ per cui $\tilde{K}$ è un $\tilde{k}_1$-insieme.

A questo punto studiamo la (3.1) per i valori suddetti di m e n; essa diventa in tal caso

$$k^2 - kq^2 + 1/4(q^4 - 2q^2 + q) = 0\,.$$

Pertanto $k_i = (q^2 \pm \sqrt{q}\sqrt{2q-1})/2$; da ciò segue che $2q - 1$ deve essere un quadrato. Osserviamo inoltre che per un k-insieme di tipo $(0, m, n)$ in $S_{3,q}$ con due soli piani esterni deve aversi

$$t_0 + t_m + t_n = (q^3 + q^2 + q + 1)(q^2 + q + 1)/(q + 1)$$

(5.2)

$$mt_m + nt_n = k(q^2 + q + 1) \qquad m(m-1)\,t_m + n(n-1)\,t_n = k(k-1)\,,$$

da cui si ottiene

$$k^2 - k[1 + (q^2 + q + 1)(n + m - 1)] + nm(q^4 + q^3 - q) = 0\,. \tag{6.2}$$

Sostituendo nella (6.2) i valori $m = (q - \sqrt{q})/2$, $n = (q + \sqrt{q})/2$, si ottiene $k = (q^3 \pm q\sqrt{q^2 + q - 1}\,)/2$; pertanto $q^2 + q - 1$ deve essere un quadrato.

Dalla (4.2) segue che

$$(q^3 \pm q\sqrt{q^2 + q - 1}\,)/2 = (q-1)(q^2 - q)/2 + dq\,,$$

da cui $q = (5 + 8d \pm \sqrt{16d^2 + 32d + 1}\,)/6$. Deve quindi risultare $16d^2 + 32d + 1 = a^2$ che implica $d = (-4 \pm \sqrt{15 + a^2}\,)/4$. Pertanto $15 + a^2 = b^2$, da cui segue che gli unici valori possibili per d sono 0 e 1 che forniscono valori non accettabili per q. Quanto detto si può riassumere come segue.

II – *Non esistono k-insiemi di tipo $(0, m, n)$ in $S_{3,q}$ con due soli piani esterni, q quadrato dispari, $m = (q - \sqrt{q})/2$, $n = (q + \sqrt{q})/2$.*

(β) Consideriamo ora il caso $q = 2^h$. Osserviamo che $n - m = 2^a$ e che $1 \leq a \leq h - 1$. La (15.1) diventa in tal caso

$$c^2 - c[(2s + 1)(2^h + 1) - 2^{h-a}] + s(s + 1)(2^{2h} + 2^h - 1) = 0$$

il cui discriminante è

$$\Delta = [(2s + 1)(2^h + 1) - 2^{h-a}]^2 - 4s(s + 1)(2^{2h} + 2^h - 1)\,. \tag{7.2}$$

Dalla (3.2) segue allora che $N-M=2^h/\sqrt{\Delta}$ e pertanto deve essere $\Delta=2^{2z}$, con $1 \leqslant z \leqslant h$, e ciò è assurdo perché il secondo membro della (7.2) è dispari. Pertanto:

III – *Non esistono in* $S_{3,q}$, $q=2^h$, *k-insiemi di tipo* $(0, m, n)$ *con due soli piani esterni.*

(γ) Sia $q=p^h$ con $p \neq 2$ e $h \neq 2$. Per $h=1$ l'unico caso possibile è lo spazio privato di due piani. Sia dunque $h>2$; è possibile ripetere il ragionamento fatto nel caso $q=2^h$ ed ottenere la condizione $\Delta=p^{2z}$ con $1 \leqslant z \leqslant h$, ovvero

$$(p^h+1)[p^h-2p^{h-a}(2s+1)+(2s+1)^2]+(2s+1)^2-1+p^{2h-2a}=p^{2z} \tag{8.2}$$

cioè, ponendo $x=2s+1$,

$$(p^h+2)x^2-2p^{h-a}(p^h+1)x+p^h(p^h+1)+p^{2h-2a}-1-p^{2z}=0\,. \tag{9.2}$$

I valori di x si ottengono in funzione di z dalla (9.2) e risulta $(2s+1, p)=1$. Inoltre dalla (8.2) si ottiene $(p, s)=(p, s+1)=1$. Pertanto:

IV – *Condizione necessaria per l'esistenza di un k-insieme di tipo* $(0, m, n)$ *in* $S_{3,q}$, $q=p^h$, *è che* $(2s+1, p)=(s, p)=(s+1, p)=1$, *con* $2s+1$ *soddisfacente la* (9.2).

Dalla (9.2) otteniamo la

$$(p^h+1)x^2-2p^{h-a}(p^h+1)x+p^h(p^h+1)+p^{2h-2a}-p^{2z}<0\,, \tag{10.2}$$

che non è mai verificata se il discriminante del trinomio al primo membro è negativo o nullo, e ciò accade per $a \geqslant h/2$ e $z \leqslant h/2$. Pertanto:

V – *Condizione necessaria per l'esistenza di un k-insieme di tipo* $(0, m, n)$ *in* $S_{3,q}$, $q=p^h$, *è che* $a<h/2$ *ovvero* $a \geqslant h/2$ *e* $z>h/2$ $(n-m=p^a,\ \Delta=p^{2z})$.

(δ) Sia $q=p^2$ con $p \neq 2$. La (15.1) diventa in tal caso

$$c^2-c[(2s+1)(p^2+1)-p]+s(s+1)(p^4+p^2-1)=0\,,$$

il cui discriminante è

$$\Delta=(p^2+1)[p-(2s+1)]^2+(2s+1)^2-1+p^2=p^{2z}$$

con $1 \leq z \leq 2$. Il valore $z=1$ evidentemente si elimina; per $z=2$ otteniamo

$$2s+1=[p(p^2+1)\pm\sqrt{p^6-2p^2+2}\,]/(p^2+2)\,.$$

Pertanto p^6-2p^2+2 deve essere un quadrato il che è assurdo, onde

VI – *In* $S_{3,q}$, $q=p^2$, *non esistono k-insiemi di tipo* $(0, m, n)$ *con due soli piani esterni.*

Per finire sia $r \geq 4$ e sia K un k-insieme di tipo $(0, m, n)$ di $S_{r,q}$; denotati con S' e S'' i due iperpiani esterni e con S° la loro intersezione, ogni iperpiano per S° diverso da quelli esterni interseca K in un k-insieme di tipo (m, n) di un $A_{r-1,q}$. Pertanto (cfr. $[3]_3$) gli unici valori possibili per la coppia (m, n) sono $(0, 1)$, $(q-1, q)$ e $((q-\sqrt{q})/2, (q+\sqrt{q})/2)$ con q quadrato dispari. D'altra parte intersecando K con un S_3 che intersechi S° in una retta e che non sia contenuto né in S' né in S'', otteniamo un k-insieme di tipo $(0, m, n)$ con due soli piani esterni. Per quanto visto nelle pagine precedenti, i valori $(0, 1)$ e $((q-\sqrt{q})/2, (q+\sqrt{q})/2)$ non sono accettabili. Pertanto:

VIII – *L'unico k-insieme di tipo* $(0, m, n)$, *possibile in* $S_{r,q}$, $r \geq 4$, *è lo spazio privato di due iperpiani.*

Bibliografia

[1] M. Hall, *Combinatorial theory*, Blaisdell, 1967.

[2] G. Tallini, *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*, Atti Conv. Lincei II (1976), 153-165.

[3] M. Tallini Scafati: $[\cdot]_1$ *Calotte di tipo (m, n) in uno spazio di Galois $S_{r,q}$*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) **53** (1972), 71-81; $[\cdot]_2$ *The k-sets of type (m, n) in a Galois space $S_{r,q}$*, Atti. Conv. Lincei **17**, Tomo II (1976), 459-463; $[\cdot]_3$ *I k-insiemi di tipo (m, n) di uno spazio affine $A_{r,q}$*, Rend. Mat. (VII) **1** (1981), 63-79.

Summary

In this paper we study the k-sets in $S_{r,q}$ of type $(0, m, n)$ with exactly two exterior hyperplanes. For a projective plane we proved non existence theorems in some cases. Furthermore summarizing the results for $r=2$ and those in $[3]_3$, we obtained non existence theorems for the following cases: (a) $r=3$, *q odd square,* $m=(q-\sqrt{q})/2$, $n=(q+\sqrt{q})/2$; (b) $r=3$, $q=2^h$; (c) $r=3$, $q=p^2$; (d) $r \geq 4$ $\forall q$.

* * *

Finito di stampare il 22 ottobre 1987 Tipografia Compositori Bologna