Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 283-288

S. DAOUD (*)

Ordres des fonctions entières définies par des séries de Dirichlet de deux variables complexes (II) (**)

1 - Ordres

Soit X, l'espace de toutes les fonctions entières f définies par des séries de Dirichlet dans $\boldsymbol{C}^2$; fonctions du type $[2]_1$

$$f(s_1, s_2) = \sum_{m,n} a_{m,n} \exp(\lambda_m s_1 + \mu_n s_2)$$

où: (m, n) décrit l'ensemble $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ des couples d'entiers $\geqslant 0$; $s = (s_1, s_2) = (\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2) \in \boldsymbol{C}^2$.

Les coefficients $a_{m,n}$ sont réels ou complexes vérifient

$$\limsup_{m+n\to\infty} \frac{\log |a_{m,n}|}{\lambda_m + \mu_n} = -\infty .$$

Les exposantes λ_m, μ_n sont fixées et verifiées

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m \to \infty \text{ avec } m, \qquad 0 = \mu_0 < \nu_1 < \ldots < \mu_n \to \infty \text{ avec } n,$$

$$0 \leqslant \limsup_{m+n\to\infty} \frac{\log(m+n)}{\lambda_m + \mu_n} < +\infty .$$

(*) Indirizzo: dr. Suzanne Meshreky Daoud, Department of Mathematics, University of Assiut, Assiut, Egypt.
(**) Ricevuto: 16-1-86.

Pour $f \in X$ et $(\sigma_1, \sigma_2) \in \boldsymbol{R}^2$, nous définissons les fonctions suivantes

$$M(\sigma_1, \sigma_2) = \sup_{(t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2} |f(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)|$$

$$T(\sigma_1, \sigma_2) = \sup_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 0}} |a_{m,n}| \exp(\lambda_m \sigma_1 + \mu_n \sigma_2)$$

$$S(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 0}} |a_{m,n}| \exp(\lambda_m \sigma_1 + \mu_n \sigma_2) .$$

Lemme 1. *Il existe* $\alpha > 0$ *et* $K > 0$ *tels que, pour tous* σ_1 *et* σ_2,

$$T(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant M(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant S(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant KT(\sigma_1 + \alpha, \sigma_2 + \alpha) .$$

Pour la preuve voir $[2]_2$.

Def. 1 $[2]_2$. Soit $f \in X$, supposée non constante. On dira que f est *d'ordre de Ritt* ρ *et d'ordre inférieur* λ si

$$\rho = \limsup_{\sigma_1, \sigma_2 \to \infty} \frac{\log \log M(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad \lambda = \liminf_{\sigma_1, \sigma_2 \to \infty} \frac{\log \log M(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} .$$

Soient $f \in X$ et $\partial_1 f$ (resp. $\partial_2 f$) la fonction dérivée partielle de f par rapport à sa première variable (resp. deuxième variable). Dans la suite on dira que f dépend effectivement des deux variables (s_1, s_2) si $\partial_1 f \neq 0$ et $\partial_2 f \neq 0$. On notera que f est non constante, équivalent à $\partial_1 f \neq 0$ ou $\partial_2 f \neq 0$.

2 - Une forme pour l'ordre

Def. 2 $[2]_2$. Soit $f \in X$. Pour $\sigma_1 \geqslant 0$, $\sigma_2 \geqslant 0$, on pose

$$I(\sigma_1, \sigma_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2T)^2} \int_{-T}^{T}\!\!\int |f(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)|^2 \, dt_1 \, dt_2 .$$

Lemme 2. (i) *Si f est non constante, on a*

$$\lim_{\sigma_1, \sigma_2 \to \infty} I(\sigma_1, \sigma_2) = + \infty .$$

(ii) *Si f dépend effectivement des deux variables* (s_1, s_2) *on a*

$$\lim_{\sigma_1+\sigma_2\to\infty} I(\sigma_1, \sigma_2) = +\infty.$$

Preuve. (i) Si f est non constante, on sait [2] qu'il existe un coefficient $a_{m,n}$ non nul avec $m+n>0$. L'inégalité

$$I(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant |a_{m,n}|^2 \exp 2(\lambda_m \sigma_1 + \mu_n \sigma_2)$$

qui résulte du Lemme 1 $[2]_2$, montre immédiatement le résultat.

(ii) Si f dépend effectivement des deux variables (s_1, s_2), il existe $a_{m,n} \neq 0$ avec $m>0$ et $a_{p,q}\neq 0$ avec $q>0$. L'inégalité

$$I(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant |a_{m,n}|^2 \exp 2(\lambda_m \sigma_1 + \mu_n \sigma_2) + |a_{p,q}|^2 \exp 2(\lambda_p \sigma_1 + \mu_q \sigma_2)$$

où $\lambda_m > 0$ et $\mu_q > 0$, montre (ii).

Théorème 1 $[2]_2$. *Soit $f \in X$, supposée non constante, d'ordre de Ritt ρ et d'ordre inférieur λ; alors*

$$\lim_{\sigma_1,\sigma_2\to\infty} \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{\log \log I(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1+\sigma_2} = \begin{matrix}\rho\\ \lambda\end{matrix}.$$

3 - Ordres séparés

Déf. 3 $[2]_3$. Soit $f \in X$ non constante. On dira que f est *d'ordre de Ritt séparé* (ρ_1, ρ_2) si

$$\rho_1 = \limsup_{\sigma_2\to\infty} \{\limsup_{\sigma_1\to\infty} \frac{\log\log M(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1}\} \qquad \rho_2 = \limsup_{\sigma_1\to\infty} \{\limsup_{\sigma_2\to\infty} \frac{\log\log M(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_2}\}.$$

Lemme 3. *On a* $\max(\rho_1, \rho_2) \leqslant \rho$.

Preuve. On peut supposer $\rho < +\infty$. Soit R un nombre réel tel que $\rho < R$. Par la définition de ρ, il existe $A>0$ tel que

$$\frac{\log\log M(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1+\sigma_2} < R \qquad \text{pour } \sigma_1 \geqslant A \qquad \sigma_2 \geqslant A.$$

Fixons $\sigma_2 \geqslant A$. Pour tout $\sigma_1 \geqslant A$ on a

$$\frac{\log \log M(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1} = \frac{\log \log M(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} (1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}) < R (1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}).$$

Ainsi

$$\limsup_{\sigma_1 \to \infty} \frac{\log \log M(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1} \leqslant R \qquad \sigma_1 \leqslant R;$$

comme la dernière inégalité est vérifiée pour $R > \rho$, on a bien $\rho_1 < \rho$. On montre de même que $\rho_2 < \rho$.

Pour montrer le fait que $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$, il est commode d'utiliser d'autres expressions pour les ordres ρ et (ρ_1, ρ_2). A cet effet reprenons pour $f \in X$, la fonction

$$S(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\substack{m \geqslant 0 \\ n \geqslant 0}} |a_{m,n}| \exp(\lambda_m \sigma_1 + \mu_n \sigma_2).$$

Lemme 4. *Soient A et B deux points de $\boldsymbol{R}^2$, on a*

$$S(P) \leqslant \max(S(A), S(B))$$

pour tout point P du segment $[A, B]$.

Preuve. Il suffit de montrer que S est une fonction convexe sur $\boldsymbol{R}^2$.

Théorème 2. *Soit $f \in X$, non constante, on a*

$$\rho = \limsup_{\sigma_1 \to \infty} \frac{\log \log S(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$\rho_1 = \limsup_{\sigma_2 \to \infty} \{\limsup_{\sigma_1 \to \infty} \frac{\log \log S(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1}\} \qquad \rho_2 = \limsup_{\sigma_1 \to \infty} \{\limsup_{\sigma_2 \to \infty} \frac{\log \log S(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_2}\}.$$

Preuve. On utilisera les inégalités

$$M(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant S(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant KM(\sigma_1 + \alpha, \sigma_2 + \alpha)$$

où K et α sont des constantes positives.

Remarque. Pour le calcul de l'un des ordres $\rho, (\rho_1, \rho_2)$ d'une fonction f, à l'aide des nouvelles formules données, on peut remplacer f par αf où $\alpha \in \mathbf{C}$

(non nul). En particulier on pourra supposer que $S(0,0)=\sum|a_{m,n}|>1$, de sorte que $\log\log S(\sigma_1,\sigma_2)$ est bien défini pour $\sigma_1\geqslant 0, \sigma_2\geqslant 0$.

On notera, chacune des fonctions

$$\varphi(\sigma_2)=\limsup_{\sigma_1\to\infty}\frac{\log\log S(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1} \qquad \psi(\sigma_1)=\limsup_{\sigma_2\to\infty}\frac{\log\log S(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_2}$$

est définie dans $[0,\infty[$ et est croissante.

Théorème 3. *Soit $f\in X$ non constante et soient ρ, (ρ_1,ρ_2) respectivement l'ordre de Ritt de f et son ordre séparé. Alors* $\rho=\max(\rho_1,\rho_2)$.

Preuve. Il reste à montrer que $\rho<\max(\rho_1,\rho_2)$. On peut donc supposer $\rho_1<+\infty$ et $\rho_2<+\infty$. Soit R un nombre réel tel que $R>\max(\rho_1,\rho_2)$. D'après la remarque précédente, on a

$$\max(\varphi(0),\ \psi(0))<R$$

et par conséquent, il existe $A>0$ tel que

$$\frac{\log\log S(\sigma_1,0)}{\sigma_1}<R \quad \text{pour } \sigma_1\geqslant A \qquad \frac{\log\log S(0,\sigma_2)}{\sigma_2}<R \quad \text{pour } \sigma_2\geqslant A;$$

par la convexité de S on a

$$\frac{\log\log S(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1+\sigma_2}<\max\left\{\frac{\log\log S(\sigma_1+\sigma_2,0)}{\sigma_1+\sigma_2},\frac{\log\log S(0,\sigma_1+\sigma_2)}{\sigma_1+\sigma_2}\right\}$$

et par suite

$$\frac{\log\log S(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1+\sigma_2}<R \qquad \text{pour } \sigma_1+\sigma_2\geqslant A;$$

on a donc

$$\rho=\limsup_{\sigma_1,\sigma_2\to\infty}\frac{\log\log S(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1+\sigma_2}\leqslant R.$$

Ceci étant vrai pour tout $R>\max(\rho_1,\rho_2)$, on a bien $\rho\leqslant\max(\rho_1,\rho_2)$.

Références

[1] A. K. Agarwal *On the geometric means of entire functions of several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 651-657

[2] S. DAOUD: $[\cdot]_1$ *Entire functions représented by Dirichlet series of two complex variables*, a paraître dans Port. Math.; $[\cdot]_2$ *Ordre d'une fonction de Dirichlet entière de plusieurs variables complexes*, à paraître dans. Port. Math.; $[\cdot]_3$ *On the mean values of an entire function represented by Dirichlet series of several complex variables*, à paraître dans. Coll. Math..

[3] P. K. KAMTHAN *A note on geometric means of an entire function of several variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **169** (1972), 503-509.

Summary

We consider the space X of entire functions defined by Dirichlet series of two complex variables. In X, we have defined the Ritt order ρ, (ρ_1, ρ_2) *where* ρ_1, ρ_2 *are the Ritt orders with respect to variables* s_1 *and* s_2. *The main result is proved that* $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$.

* * *