Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 263-274

GIANCARLO CANTARELLI (*)

Sulla stabilità dei moti merostatici generalizzati dei sistemi olonomi reonomi con coordinate ignorabili (**)

1 - Introduzione

In un precedente lavoro [1] abbiamo fornito un metodo per lo studio della stabilità dei moti merostatici generalizzati di sistemi olonomi reonomi con coordinate ignorabili, nel caso particolare in cui si ha $\frac{\partial R_1}{\partial t} \equiv 0$ (dove $R = R_2 + R_1 + R_0$ è la funzione di Routh e R_1 è l'insieme dei termini lineari nelle velocità lagrangiane).

Nel presente lavoro mostriamo che il suddetto metodo è applicabile anche nel caso generale in cui la derivata parziale $\frac{\partial R_1}{\partial t}$ non è identicamente nulla, cambiando opportunamente la funzione di Routh (v. 2). Infatti, sostituendo R con $\tilde{R}$, la quale differisce da R per la derivata totale rispetto al tempo di un'opportuna funzione delle coordinate lagrangiane e del tempo (cfr. la (2.3)), non si alterano le equazioni di Routh del sistema reonomo considerato [2], ed inoltre si eliminano i termini lineari (nelle coordinate e nelle velocità lagrangiane) nello sviluppo secondo McLaurin dell'hamiltoniana $R_2 + \overline{W}$ e della sua derivata totale rispetto al tempo.

Infine in 3, stabiliamo delle nuove condizioni sufficienti per la stabilità dei moti merostatici generalizzati (Teorema 1 e Corollario 1), che risultano più semplici da applicare di quelle fornite in [1], come mostriamo in 4 con un esempio di sistema reonomo con tre gradi di libertà ed una coordinata ignorabile.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 18-IX-1985.

2 - Cambiamento della funzione di Routh

Consideriamo un sistema olonomo *reonomo* S, soggetto a vincoli bilaterali e lisci, con $n+m$ gradi di libertà ($n \geq 1$, $m \geq 1$), con coordinate lagrangiane indipendenti $q^T = (q_1, \ldots, q_n)$, $z^T = (z_1, \ldots, z_m)$, dove le m coordinate $z_1, \ldots, z_m$ sono *ignorabili* (chiameremo *posizionali* le n coordinate $q_1, \ldots, q_n$).

La sollecitazione attiva agente sul sistema reonomo S sia costituita da forze derivanti da un potenziale generalizzato $U(t, \boldsymbol{q})$ e da una sollecitazione dissipativa «ridotta alle sole coordinate ignorabili», cioè con componenti lagrangiane relative alle coordinate ignorabili identicamente nulle, mentre le rimanenti n, relative alle coordinate posizionali, sono funzioni, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, definite e continue nell'insieme $I \times \Omega \times R^n$ (dove $I = (\tau, \infty)$ con $\tau \in R$ e Ω è un sottoinsieme aperto e connesso di R^n, contenente l'origine) con potenza $\boldsymbol{Q}^T(t, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}})\, \dot{\boldsymbol{q}} \leq 0$.

Le m coordinate ignorabili danno luogo ad altrettanti integrali primi dei momenti generalizzati, i quali sono risolubili rispetto alle velocità ignorabili, $\dot{\boldsymbol{z}} = \dot{\boldsymbol{z}}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{c})$, dove $\boldsymbol{c}^T = (c_1, \ldots, c_m)$ sono m costanti arbitrarie. Col cambiamento di variabili $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{z}}) \leftrightarrow (\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{c})$ si passa dalle equazioni di Lagrange a quelle di Routh. Indichiamo con $R = R(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{c})$ la funzione di Routh $R = R_2 + R_1 + R_0$, dove $R_2 = R_2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ è una forma quadratica nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$, mentre $R_1 = \boldsymbol{h}^T(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c})\, \dot{\boldsymbol{q}}$ è lineare nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$ (dove $\boldsymbol{h}^T$ è un n-vettore riga e col simbolo $\boldsymbol{h}^T \dot{\boldsymbol{q}}$ indichiamo il prodotto scalare) ed infine $R_0 = R_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c})$ è indipendente dalle $\dot{\boldsymbol{q}}$ (per l'espressione esplicita dei termini R_2, R_1, R_0, partendo dalla lagrangiana $\mathscr{L}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{z}})$,, cfr. la (1.5) di [**1**]). La funzione scalare R_0, i coefficienti di R_2 e la funzione vettoriale $\boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c})$ siano funzioni di classe $\mathscr{C}^2(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c})$.

Supponiamo che le equazioni di Routh ammettano una soluzione «statica», che, senza perdere in generalità, possiamo supporre che sia $\boldsymbol{q}(t) \equiv 0$, $\dot{\boldsymbol{q}}(t) \equiv 0$, $\boldsymbol{c} = \overline{\boldsymbol{c}}$, cioè che si abbia

$$(2.1) \qquad \left(- \frac{\partial \boldsymbol{h}^T}{\partial t} + \frac{\partial R_0}{\partial \boldsymbol{q}} \right)_{q=0,\ c=\bar{c}} = 0 \qquad \forall\, t \in I.$$

A questa soluzione «statica» corrisponde un *moto merostatico generalizzato* (m.m.g.)

$$(2.2) \qquad \boldsymbol{q}(t) = 0 \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(t) = 0 \qquad \dot{\boldsymbol{z}} = \dot{\boldsymbol{z}}(t, 0, 0, \bar{\boldsymbol{c}}) \qquad \forall\, t \in I,$$

cioè una particolare soluzione delle equazioni di Langrange, di cui vogliamo studiare la stabilità (alla Liapunov) rispetto alle variabili $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{z}}$ o ad una parte di esse.

Osserviamo che, passando dalla funzione di Routh R ad un'altra $\tilde{R} = \tilde{R}_2 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_0$, così definita

$$\tilde{R} = R - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[h^T(t,0,\bar{c})\boldsymbol{q}], \tag{2.3}$$

si ottiene, tenendo presente la (2.1),

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_{q=0,\ c=\bar{c}} = 0 \quad . \quad \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}\right)_{q=0,\ c=\bar{c}} = 0 \qquad \forall\, t \in I \tag{2.4}$$

dove la funzione vettoriale $\tilde{\boldsymbol{h}}$ è il coefficiente di $\tilde{R}_1$. Infatti dalla definizione (2.3) segue che $\tilde{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{h}(t,0,\bar{\boldsymbol{c}})$ e $\tilde{R}_0 = R_0 - \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{h}^T(t,0,\bar{\boldsymbol{c}})\boldsymbol{q}]$, e la verifica è immediata. La sostituzione di R con $\tilde{R}$, definita dalla (2.3), è sempre lecita in quanto *non altera le equazioni di Routh*, perchè $(R - \tilde{R})$ coincide con la derivata totale, rispetto al tempo, di una funzione di $t,\boldsymbol{q}$ (cfr. [2], Cap. I, n. 2, p. 31). Per semplicità, indicheremo col vecchio simbolo R la *nuova* funzione di Routh; le (2.4) si scrivono perciò nel seguente modo

$$\left(\frac{\partial R_0}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_{q=0,\ c=\bar{c}} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}\right)_{q=0,\ c=\bar{c}} = 0 \qquad \forall\, t \in I. \tag{2.5}$$

Infine cosideriamo una particolare classe di sistemi reonomi per i quali si ha

$$\boldsymbol{h}^T(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}_*^T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}) \tag{2.6}$$

dove la funzione scalare $V = V(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{c})$ è continua e di classe $\mathscr{C}^2(t,\boldsymbol{q})$ e la funzione vettoriale $\boldsymbol{h}_*(\boldsymbol{q},\boldsymbol{c})$ è continua e di classe $\mathscr{C}^1(\boldsymbol{q})$. Se il coefficiente di R_1 soddisfa alla condizione (2.6), allora R_1 si può esprimere nel seguente modo

$$R_1 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial V}{\partial t} + \boldsymbol{h}_*^T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{c})\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{2.7}$$

Eliminando il termine inessenziale $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ (cfr. [2]) e conglobando $\left(-\frac{\partial V}{\partial t}\right)$ in R_0, possiamo sostituire la funzione di Routh R con la seguente funzione

$$\tilde{R} = R_2 + \boldsymbol{h}_*^T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{c})\dot{\boldsymbol{q}} + \left(R_0 - \frac{\partial V}{\partial t}\right), \tag{2.8}$$

in cui i termini lineari nelle velocità $\dot{\boldsymbol{q}}$ *non dipendono esplicitamente dal tempo*.

L'importanza di questa classe di sistemi reonomi è dovuta al fatto che, nella condizione (3.2) del Teorema 1 del successivo paragrafo, non compaiono i termini bilineari in $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ e in $\dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{\beta}$, essendo $\dfrac{\partial R_1}{\partial t} \equiv 0$.

Osserviamo che condizione necessaria e sufficiente affinchè sussista la (2.6) è che la matrice jacobiana $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}\right)$ sia *simmetrica*. Nel caso particolare in cui S possiede una sola coordinata posizionale $q_1 (n=1)$, la (2.6) è sempre soddisfatta con

$$V(t,q_1,c) = \int_0^{q_1} h(t,\xi,c) d\xi \qquad h_*(q_1,c) \equiv 0 \tag{2.9}$$

e quindi, nella nuova funzione di Routh, il termine lineare in $\dot{q}_1$ è identicamente nullo.

3 - Condizioni sufficienti per la stabilità dei moti merostatici generalizzati

Lo studio della stabilità del m.m.g. (2.2) rispetto alle variabili $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{z}}$ è riconducibile a quello della stabilità della soluzione «statica» corrispondente $\boldsymbol{q}(t) \equiv \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{q}}(t) \equiv \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ delle equazioni di Routh, dove abbiamo posto $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{c} - \bar{\boldsymbol{c}}$ (cfr. $[3]_1$). Indichiamo con $\|\boldsymbol{q}\|$, $\|\dot{\boldsymbol{q}}\|$, $\|\boldsymbol{\beta}\|$ la norma euclidea dei vettori $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{\beta}$ rispettivamente, con S_q, $S_{\dot{q}}$, S_β le sfere aperte con centro nell'origine dei rispettivi spazi vettoriali e con raggio $\rho (>0)$ sufficientemente piccolo, con $W = W(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$ la funzione scalare introdotta in $[1]_1$

$$W(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta}) = [-R_0(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}) + R_0(t,\boldsymbol{0},\boldsymbol{c})]_{\boldsymbol{c}=\bar{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\beta}}. \tag{3.1}$$

Infine per $\boldsymbol{\beta} = 0$, poniamo $W(t,\boldsymbol{q},0) = \overline{W}(t,\boldsymbol{q})$. Allora sussiste il seguente

Teorema 1. *Se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

(i) *$R_2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ è definita positiva in $\dot{\boldsymbol{q}}$,*

(ii) *le derivate parziali $\dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ sono limitate in $I \times S_q \times S_\beta$,*

(iii) *la funzione $\overline{W}(t,\boldsymbol{q})$ è definita positiva in $\boldsymbol{q}$,*

(iv) *esistono due funzioni scalari $\lambda = \lambda(t)$, definita e di classe $\mathscr{C}^1$ in I ed ivi limitata, e Φ di classe K tali che nell'insieme $I \times S_q \times S_{\dot{q}} \times S_\beta$ si abbia*

$$\boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial}{\partial t}(R_2 + R_1) + \frac{\partial W}{\partial t} \leq \lambda(t)\, \Phi(\|\boldsymbol{\beta}\|), \tag{3.2}$$

allora il m.m.g. (2.2) *è stabile rispetto alle coordinate e alle velocità posizionali. Se inoltre sono soddisfatte le ulteriori condizioni*

(v) *i coefficienti della forma quadratica* $R_2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ *sono funzioni limitate in* $I\times S_q$ *e le derivate parziali* $\dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}}$ *sono limitate in* $I\times S_q$,

(vi) *gli integrali primi dei momenti generalizzati sono uniformemente continui in corrispondenza al m.m.g.* (2.2) *e se la funzione* $\dot{\boldsymbol{z}}=\dot{\boldsymbol{z}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{c})$ *è uniformemente continua in corrispondenza alla soluzione «statica»* $\boldsymbol{q}=0$, $\dot{\boldsymbol{q}}=0$, $\boldsymbol{c}=\bar{\boldsymbol{c}}$, *allora il m.m.g.* (2.2) *è uniformemente stabile rispetto a tutte le variabili* $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{z}}$.

Il teorema si dimostra scegliendo come funzione di Liapunov $\max\{R_2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+W(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})-\lambda(t)\Phi(\|\boldsymbol{\beta}\|),\ \|\boldsymbol{\beta}\|\}$ e verificando che sono soddisfatte tutte le ipotesi del Corollario 5.1 di $[3]_1$. La funzione ausiliaria in questo caso si ottiene dalla funzione ausiliaria utilizzata in [1] data da R_2+W con l'aggiunta del termine $-\lambda(t)\Phi(\|\boldsymbol{\beta}\|)$: questa nuova funzione ausiliaria consente di semplificare la disuguaglianza sulla derivata della funzione di Liapunov (si confrontino la (3.2) con la (1.9) di [1]) e di dimostrare il successivo Corollario 1. In particolare, per la condizione (iv) del Teorema 1 la derivata totale della funzione ausiliaria è semidefinita negativa in tutto l'insieme $I\times S_q\times S_{\dot{q}}\times S_\beta$ essendo

$$(3.3)\qquad \frac{d}{dt}[R_2+W-\lambda(t)\Phi(\|\boldsymbol{\beta}\|)]=\frac{d}{dt}[R_2+W]-\dot{\lambda}(t)\Phi(\|\boldsymbol{\beta}\|)$$

$$=\boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}}-\frac{\partial}{\partial t}(R_2+R_1)+\frac{\partial W}{\partial t}-\dot{\lambda}(t)\Phi(\|\boldsymbol{\beta}\|)\le 0.$$

Osservazione 1. Le condizioni (2.5) del precedente paragrafo sono *necessarie* affinchè l'hamiltoniana $R_2+\overline{W}$ sia definita positiva (condizioni (i) e (iii) del presente Teorema 1) e la sua derivata totale rispetto al tempo sia semidefinita negativa (come si deduce dalla (3.2) per $\boldsymbol{\beta}=0$).

Inoltre osserviamo che la disuguaglianza (3.2) è una conseguenza della seguente condizione (introdotta in $[3]_2$)

$$(3.4)\qquad \boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}}-\frac{\partial}{\partial t}(R_2+R_1)+\frac{\partial W}{\partial t}+\dot{\lambda}(t)[R_2+W-\chi(\|\boldsymbol{\beta}\|)]\le 0$$

dove χ è una funzione di classe K e $\dot{\lambda}(t)\ge 0\ \forall t\in I$ (ma $\lambda(t)$ non è necessariamente limitata). Infatti, per la (ii) si ha $\left\|\dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right\|\le L=\text{cost.}\ (<\infty)$, da cui si deduce (per il teorema di Lagrange) $W(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})\ge\overline{W}(t,\boldsymbol{q})-L\|\boldsymbol{\beta}\|$ ed essendo $R_2+\overline{W}\ge 0$ (per le

(i) e (ii)) si ottiene

$$Q^T\dot{q} - \frac{\partial}{\partial t}(R_2 + R_1) + \frac{\partial W}{\partial t} \leq -\dot{\lambda}(t)\,[R_2 + W - \chi(\|\beta\|)] \leq \dot{\lambda}(t)\,\Phi(\|\beta\|) \tag{3.5}$$

dove $\Phi(\|\beta\|) = L\|\beta\| + \chi(\|\beta\|)$ è una funzione di classe K.

Si ha inoltre il seguente corollario, particolarmente utile nelle applicazioni.

Corollario 1. *Se sono soddisfatte le prime tre condizioni del Teorema* 1, *ed inoltre esistono due funzioni scalari* $\lambda = \lambda(t)$ *definita e di classe* $\mathscr{C}^1$ *in* I *ed ivi limitata con* $\dot{\lambda}(t) \geq 0\ \forall\, t \in I$, *e* $\eta = \eta(t, q, \dot{q}, \beta)$ *di classe* $\mathscr{C}^1$ *in* $I \times S_q \times S_{\dot{q}} \times S_\beta$, *tali che si abbia*

(a) $$Q^T\dot{q} - \frac{\partial}{\partial t}(R_2 + R_1) + \frac{\partial W}{\partial t} \leq \dot{\lambda}(t)\eta(t, q, \dot{q}, \beta) \quad \text{in} \quad I \times S_q \times S_{\dot{q}} \times S_\beta,$$

(b) $$\eta(t, q, \dot{q}, 0) \leq 0 \qquad \text{in} \quad I \times S_q \times S_{\dot{q}},$$

(c) $$\left\| \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right\| \leq M = \text{cost.}\ (< \infty) \qquad \text{in} \quad I \times S_q \times S_{\dot{q}} \times S_\beta,$$

allora il m.m.g. (2.2) *è stabile rispetto a* $q, \dot{q}$. *Inoltre, se sono soddisfatte anche le condizioni* (v) *e* (vi) *del Teorema* 1, *il* m.m.g. (2.2) *è uniformemente stabile rispetto a tutte le variabili* $q, \dot{q}, \dot{z}$.

Infatti, dalle (b), (c) segue (per il teorema di Lagrange)

$$\eta(t, q, \dot{q}, \beta) \leq \eta(t, q, \dot{q}, 0) + M\|\beta\| \leq M\|\beta\|; \tag{3.6}$$

tenuto conto della (a), si ottiene

$$Q^T\dot{q} - \frac{\partial}{\partial t}(R_2 + R_1) + \frac{\partial W}{\partial t} \leq \dot{\lambda}(t)\,\eta(t, q, \dot{q}, \beta) \leq \dot{\lambda}(t)\,M\|\beta\| \tag{3.7}$$

e la condizione (iv) del Teorema 1 risulta soddisfatta.

Osservazione 2. In particolare per $\eta = -[R_2 + W - \chi(\|\beta\|)]$, la condizione (a) del Corollario 1 coincide con la condizione (3.4) (e in tal caso *non è necessario* supporre che $\lambda(t)$ sia limitata).

4 - Esempio di sistema reonomo con tre gradi di libertà ed una coordinata ignorabile ($n = 2$, $m = 1$).

Consideriamo il sistema piano S, a vincoli lisci costituito da un anello circolare γ di raggio variabile, omogeneo, pesante, di massa $2m$, e da un'asta rettilinea AB, di lunghezza variabile, omogenea, pesante, di massa m, il cui estremo A è vincolato ad appartenere a γ. S appartiene al piano verticale Oxz, il quale è girevole attorno all'asse verticale (discendente) z. La circonferenza γ, fissa nel piano Oxy, ha il centro sovrapposto all'origine O, raggio r variabile in funzione del tempo t secondo la legge $r = r(t) > 0$ $\forall t \geq 0$, la lunghezza dell'asta AB è uguale al doppio del raggio di γ.
Il sistema olonomo reonomo S possiede tre gradi di libertà. Scegliendo come coordinate lagrangiane gli angoli (orientati) θ, φ, ψ, dove i primi due sono quelli formati dal semiasse positivo Oz coi segmenti orientati OA e AB rispettivamente, mentre ψ è l'angolo formato dal piano verticale Oxz con un piano verticale fisso (rispetto al riferimento terrestre), la lagrangiana assume la seguente espressione

$$
\begin{aligned}
(4.1) \qquad \mathscr{L}(t, \theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) &= \frac{1}{2} m r^2(t)\, \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3} m r^2(t)\, \dot{\varphi}^2 \\
&+ m r^2(t)\, \dot{\theta}\, \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) + \frac{1}{2} m r^2(t) \left[1 + (\sin\theta + \sin\varphi)^2 + \frac{1}{3} \sin^2\varphi \right] \dot{\psi}^2 \\
&- m r(t)\, \dot{r}(t) [\dot{\theta} - \dot{\varphi}] \sin(\theta - \varphi) + m g r(t) (\cos\theta + \cos\varphi) + m\, \dot{r}^2(t) \cos(\theta - \varphi).
\end{aligned}
$$

La coordinata ψ è ignorabile e dà luogo all'integrale primo del momento della quantità di moto di S secondo l'asse z

$$
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = c,
$$

che è risolubile rispetto alla velocità ignorabile

$$
\dot{\psi} = \frac{c}{m r^2(t) \left[1 + (\sin\theta + \sin\varphi)^2 + \dfrac{1}{3} \sin^2\varphi \right]}.
$$

La funzione di Routh è per definizione uguale a

$$R = R_2 + R_1 + R_0 = \left[\mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\psi}\right]_{\dot\psi = \frac{c}{mr^2(t)\left[1 + (\sin\theta + \sin\varphi)^2 + \frac{1}{3}\sin^2\varphi\right]}},$$

da cui si deduce

$$(4.2)_1 \qquad R_2 = \frac{1}{2} mr^2(t)\, \dot\theta^2 + \frac{2}{3} mr^2(t)\, \dot\varphi^2 + mr^2(t)\, \dot\theta \dot\varphi \cos(\theta - \varphi)$$

$$(4.2)_2 \qquad R_1 = -mr(t)\, \dot r(t)\, [\dot\theta - \dot\varphi] \sin(\theta - \varphi)$$

$$(4.2)_3 \qquad R_0 = mgr(t)(\cos\theta + \cos\varphi) + m\dot r^2(t) \cos(\theta - \varphi) - \frac{c^2}{2mr^2(t)\left[1 + (\sin\theta + \sin\varphi)^2 + \frac{1}{3}\sin^2\varphi\right]}.$$

Dalla $(4.2)_2$ si ricava l'espressione della funzione vettoriale $\boldsymbol{h}^T(t,\theta,\varphi) = (-mr(t)\dot r(t)\sin(\theta - \varphi), mr(t)\dot r(t)\sin(\theta - \varphi))$ e si riconosce che il coefficiente di R_1 soddisfa alla condizione (2.6) ponendo

$$(4.3) \qquad V(t,\theta,\varphi) = mr(t)\dot r(t)\cos(\theta - \varphi) \qquad h_* \equiv 0.$$

Il sistema S rientra quindi nella particolare classe di sistemi reonomi considerati alla fine di 2, il che ci permette di sostituire la funzione di Routh R con la seguente $\tilde R = \tilde R_2 + \tilde R_1 + \tilde R_0$ dove si ha

$$(4.4) \qquad \tilde R_2 = R_2 \qquad \tilde R_1 \equiv 0 \qquad \tilde R_0 = R_0 - \frac{\partial V}{\partial t}.$$

L'utilità di questa sostituzione apparirà nel seguito quando dovremo riconoscere che $\eta(t,\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi,0) \leq 0$ (cfr. la seguente $(4.11)_2$).

Le equazioni di Routh posseggono le ∞^1 soluzioni «statiche»

$$(4.5) \qquad \theta(t) \equiv 0 \qquad \varphi(t) \equiv 0 \qquad \forall c \in R^1$$

in corrispondenza alle quali risultano soddisfatte le condizioni (2.4).

Applichiamo ora i criteri stabiliti in 3 per studiare la stabilità alla Liapunov dei m.m.g. corrispondenti alle (4.5), limitandoci a considerare, per semplificare i calcoli, il caso in cui il raggio di γ varia secondo la legge esponenziale

$$r(t) = r_0 + a\,\mathrm{e}^{-bt} \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{4.6}$$

dove $a(\neq 0)$, $b > 0$, $r_0 > 0$ sono delle costanti, ed inoltre si ha $r_0 + a > 0$. Le componenti lagrangiane delle forze dissipative siano

$$Q_\theta = -\alpha_1(t,\theta,\varphi)\,\dot\theta \qquad Q_\varphi = -\alpha_2(t,\theta,\varphi)\,\dot\varphi \qquad Q_\psi \equiv 0 \tag{4.7}$$

dove le funzioni α_1, α_2 sono continue e soddisfano alle seguenti condizioni

$$\alpha_1(t,\theta,\varphi) \geq k\,|\dot r(t)| \qquad \alpha_2(t,\theta,\varphi) \geq k\,|\dot r(t)| \tag{4.8}$$

con k opportuna costante positiva.

Fissiamo il valore $\bar c$ della costante del momento e studiamo la stabilità del m.m.g. corrispondente alla soluzione «statica» $\theta(t) \equiv 0$, $\varphi(t) \equiv 0$, $c = \bar c$. La funzione W definita dalla (3.1) ha la seguente espressione

$$\begin{aligned} W(t,\theta,\varphi,\beta) = {} & mgr(t)\,(2 - \cos\theta - \cos\varphi) - mr(t)\,\dot r(t)\,(1 - \cos(\theta - \varphi)) \\ & - \frac{(\bar c + \beta)^2}{2mr^2(t)} \left[\frac{3(\sin\theta + \sin\varphi)^2 + \sin^2\varphi}{3 + 3(\sin\theta + \sin\varphi)^2 + \sin^2\varphi} \right]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Per riconoscere se la condizione (iii) del teorema è soddisfatta, sviluppiamo la funzione $\overline{W}(t,\theta,\varphi) = W(t,\theta,\varphi,0)$ secondo la formula di McLaurin. Si ha $\overline{W} = (\theta,\varphi)\,\mathscr{A}(t)\,(\theta,\varphi)^T + \mathscr{R}(t,\theta,\varphi)$ dove $\mathscr{R}(t,\theta,\varphi)$ è il resto. Osserviamo che la matrice $\mathscr{A}(t)$ tende asintoticamente alla matrice limite $\mathscr{A}_*$, la quale è definita positiva se e solo se si ha

$$\bar c^2 < \frac{(7 - \sqrt{37})\, m^2 g r_0^3}{2}. \tag{4.10}$$

Allora, se è soddisfatta questa condizione, anche la matrice $\mathscr{A}(t)$ è definita positiva ($\forall\, t \geq T$, con T sufficientemente grande) e quindi, essendo soddisfatte le condizioni (2.3) del Lemma stabilito in [1] (in particolare essendo limitate le derivate terze di $\overline{W}(t,\theta,\varphi)$ rispetto a θ,φ) la funzione $\overline{W}(t,\theta,\varphi)$ è definita positiva.

Incominciamo a considerare il caso in cui si ha $a > 0$. È facile riconoscere che la prima condizione del Corollario 1 è soddisfatta scegliendo le due funzioni scalari $\lambda(t)$ e $\eta(t,\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi,\beta)$ nel seguente modo

$$
(4.11)\qquad
\begin{aligned}
&\lambda(t) = -\log(r_0 + a\,\mathrm{e}^{-bt})\\
&\eta(t,\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi,\beta) = -kr(t)\,\dot\theta^2 - kr(t)\,\dot\varphi^2 + mr^2(t)\,\dot\theta^2\\
&+\frac{4}{3}mr^2(t)\,\dot\varphi^2 + 2mr^2(t)\,\dot\theta\,\dot\varphi\cos(\theta-\varphi) - mgr(t)\,(2-\cos\theta-\cos\varphi)\\
&+mr(t)(\ddot r(t) + r(t)\,b^2)\,(1-\cos(\theta-\varphi)) - \frac{(\bar c+\beta)^2}{mr(t)^2}\left[\frac{3(\sin\theta+\sin\varphi)^2+\sin^2\varphi}{3+3(\sin\theta+\sin\varphi)^2+\sin^2\varphi}\right].
\end{aligned}
$$

Sviluppando la funzione $\eta(t,\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi,0)$ secondo la formula di McLaurin, si riconosce che i termini di ordine più basso si spezzano nella somma di due forme quadratiche, una in $\dot\theta,\dot\varphi$ e l'altra in θ,φ (se invece non avessimo sostituito la funzione di Routh, avremmo trovato una forma quadratica *completa* nelle quattro variabili $\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi$, il cui studio sarebbe stato molto più complicato). Seguendo il metodo utilizzato per riconoscere la definitezza in segno di $\overline{W}(t,\theta,\varphi)$ si vede che la prima forma quadratica è definita negativa se la dissipazione è «sufficientemente grande», cioè se si ha

$$
(4.12)\qquad k > \frac{(7+\sqrt{37})\,mr_0}{6}
$$

e che la seconda forma quadratica è definita negativa se si ha

$$
(4.13)\qquad \bar c^2 > \frac{1}{2}m^2 r_0^3 (b^2 r_0 - g)
$$

$$
(4.14)\qquad \bar c^2 < \frac{1}{4}m^2 r_0^3 (b^2 r_0 - 7g - \sqrt{b^4 r_0^2 + 37g^2 + 10b^2 g r_0})
$$

oppure

$$
\bar c^2 > \frac{1}{4}m^2 r_0^3 (b^2 r_0 - 7g + \sqrt{b^4 r_0^2 + 37g^2 + 10b^2 g r_0}) .
$$

Quest'ultima condizione esprime il fatto che $\bar c^2$ dev'essere esterno all'intervallo delle radici (distinte) dell'equazione di secondo grado che si ottiene uguagliando a zero il determinante della matrice limite. Senza dilungarci nella discussione della compatibilità delle condizioni (4.10), (4.13), (4.14), ci limiteremo a supporre che l'intervallo J dei valori di $\bar{c}^2$ soddisfacenti a tutte e tre le suddette condizioni *non sia vuoto*, come ad es. avviene quando $2b^2 r_0 < g$ dove si ha

$$J = [0, \frac{(7-\sqrt{37})\, m^2 g r_0^3}{2}].$$

In base al Corollario 1 (essendo soddisfatte sia la condizione (c) $(\frac{\partial \eta}{\partial \beta}$ è limitata), sia le rimanenti condizioni (i), (ii), (v), (vi) del Teorema 1) se la dissipazione è «sufficientemente grande» (cioè se è soddisfatta la (4.12)), *tutti i* m.m.g.

$$\theta(t) \equiv 0 \qquad \varphi(t) \equiv 0 \qquad \dot{\psi}(t) = \frac{\bar{c}}{m(r_0 + a\, e^{-bt})^2},$$

per cui $\bar{c}^2$ *appartiene all'intervallo* J, *sono uniformemente stabili rispetto alle variabili* $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$.

In modo analogo si studia il caso in cui si ha $a < 0$. Si riconosce che tutte le condizioni del Corollario 1 risultano soddisfatte se $\bar{c}$ soddisfa alle condizioni (4.10) e (4.14), unitamente alla seguente

$$\bar{c}^2 < \frac{1}{2} m^2 r_0^3 (b^2 r_0 - g) \qquad \text{con } b^2 r_0 > g. \tag{4.15}$$

Osserviamo che in questo caso la sollecitazione dissipativa può essere del tipo più generale ed anche identicamente nulla.

Bibliografia

[1] G. CANTARELLI, *Metodo per lo studio della stabilità dei moti merostatici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 391-401.

[2] L. D. LANDAU e E. M. LIFSITS, *Fisica teorica* 1 *(Meccanica)*, Editori Riuniti, Edizioni Mir, 1976 (traduzione dal russo).

[3] C. RISITO: $[\cdot]_1$ *Metodi per lo studio della stabilità di sistemi con integrali primi noti*, Ann. Mat. Pura Appl. **107** (1975), 49-94; $[\cdot]_2$ *Stability theorems for the steady motions of rheonomic holonomic systems with ignorable coordinates* (in corso di pubblicazione).

Summary

The method for the stability study of the steady motions of rheonomic holonomic systems with ignorable coordinates, established in the previous paper [1], *is extended to the general case in which* $\partial R_1/\partial t \neq 0$ *(where* $R = R_2 + R_1 + R_0$ *is the Routh function). Moreover, new stability criteria for the stability of the steady motions are given and illustrated by an example of rheonomic system with three degrees of freedom and one ignorable coordinate.*

* * *