Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 203-211

ALFREDO MARZOCCHI (*)

Osservazioni sulla estensione a perturbazioni generalizzate di teoremi di stabilità non lineare per l'equazione di Navier-Stokes (**)

1 - Introduzione

Come è noto, il più classico risultato di stabilità non lineare per le soluzioni dell'equazione di Navier-Stokes è stato dato in [6]. In base al cosiddetto metodo dell'energia, viene stabilito che per valori di viscosità superiori ad un certo limite $\bar{\bar{\nu}}_E$ si hà stabilità asintotica in media delle soluzioni «classiche».

La prima osservazione contenuta in questo lavoro è il fatto che il risultato ottenuto da Serrin si estende senza alcuna modifica al problema della stabilità in presenza di perturbazioni generalizzate nel senso di A. A. Kiselev e O. A. Ladyzhenskaya [4]. Infatti, in base ad un noto risultato dimostrato in [5], nella classe delle perturbazioni generalizzate il funzionale in gioco nel problema ammette un massimo che coincide con l'estremo superiore nella classe delle perturbazioni «classiche» del funzionale stesso. Questo risultato evidenzia che l'ambito delle soluzioni generalizzate si presenta come quello più naturale per lo studio della stabilità.

Ulteriori risultati sul problema della stabilità non lineare per l'equazione di Navier-Stokes sono stati dati in [2]. La formulazione di questi risultati si basa sulla ricerca del massimo di un nuovo funzionale opportunamente definito. Nella seconda osservazione di questo lavoro viene data una dimostrazione dell'esistenza di tale massimo nell'ambito delle soluzioni generalizzate citate sopra, mostrando così che i risultati di Davis e Von Kerczek trovano la loro

---

(*) Indirizzo: Facoltà di Scienze Matematiche, Università Cattolica del S. Cuore, Via Trieste 17, 25121 Brescia, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.) – Ricevuto: 8-V-1985.

formulazione più naturale in detto ambito. Si è inoltre osservato che tale risultato è valido sia in domini limitati, sia per certe classi di domini illimitati.

Si accenna infine ad un teorema di confronto tra i due limiti di viscosità.

2 - Posizione del problema

Indicheremo con $L^2(\Omega)$, $W^2_m(\Omega)$ rispettivamente lo spazio delle funzioni a quadrato integrabili nell'aperto Ω e lo spazio di Sobolev delle funzioni a quadrato integrabili, sempre in Ω, insieme alle loro derivate fino all'ordine m. Come è noto, questi sono spazi di Hilbert dotati rispettivamente dei prodotti scalari

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \qquad (u, v)_m = \sum_{|K|=0}^{m} \int D^k u(x) D^k v(x)\mathrm{d}x \quad \text{in} \quad W^2_m(\Omega).$$

Inoltre sia $V = \{\boldsymbol{u}(x) \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}$ lo spazio delle funzioni solenoidali infinitamente differenziabili a supporto compatto in Ω. Sia poi $H^m(\Omega)$ il completamento di V rispetto alla norma di $W^2_m(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $W^2_m(\Omega)$.

Sia ora $Q_T = \Omega \times [0, T]$ dove T è un numero reale positivo. Un vettore $\boldsymbol{v}(x, t)$ si dirà una soluzione generalizzata dell'equazione di Navier-Stokes se:

(i) $\displaystyle\int_\Omega \sum_{k=1}^{3} v_k^4(x, t)\,\mathrm{d}x \leq C_T \quad \forall t \in [0, T]$,

(ii) possiede derivate generalizzate $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}, \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \in L^2(Q_T)$,

(iii) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{v}|_S = 0 \quad (S = \partial\Omega)$ [1], $\quad \boldsymbol{v}(x, 0) = \boldsymbol{v}_0(x)$,

(iv) verifica l'identità

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nu \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{3} v_k \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_k} - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2}$$

$\forall \boldsymbol{\varphi} \in L^2(Q_T)$ tale che $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_k} \in L^2(Q_T)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$, $\boldsymbol{\varphi}|_S = 0$, dove ν è la viscosità e $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(x, t)$ rappresenta la parte non conservativa della forza di massa.

---

[1] Questa condizione è in generale superflua, ma giacchè, sotto opportune condizioni, $\boldsymbol{v}(x, t)$ risulta essere q.o. uguale ad una funzione continua, la (iii)-2 acquista senso.

Si può dimostrare (vedi [4]) che, sotto opportune condizioni, $\boldsymbol{v}(x, t)$ è q.o. uguale ad una soluzione classica dell'equazione di Navier-Stokes:

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \boldsymbol{v} - \nu \Delta \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{F}(x, t), \qquad \text{(ii)} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\text{(iii)} \quad \boldsymbol{v}(x, t) = 0 \quad \forall x \in S, \qquad \text{(iv)} \quad \boldsymbol{v}(x, 0) = \boldsymbol{v}_0(x),$$

$$\text{(v)} \quad \boldsymbol{v}(x, t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T), \qquad p(x, t) \in C^{1,1}_{x,t}(Q_T).$$

3 - Teorema di stabilità

Siano $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ due soluzioni generalizzate dell'equazione di Navier-Stokes corrispondenti alla stessa forza $\boldsymbol{f}$. Poniamo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$; sottraendo la (2), scritta per $\boldsymbol{v}'$, dalla stessa scritta per $\boldsymbol{v}$ si giunge a

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 v'_k \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = 0,$$

da cui, ponendo $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u}$, sfruttando le (1) e il teorema della divergenza, si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\boldsymbol{u}\|^2 + \nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \tilde{D} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}x = 0$$

dove $\tilde{D} = \frac{1}{2}[(\nabla \boldsymbol{v}) + (\nabla \boldsymbol{v})^T]$ è il tensore velocità di deformazione del moto base $\boldsymbol{v}$.

Introduciamo il funzionale

$$\mathscr{F}[\boldsymbol{u}, \nu, t] = -\frac{\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \tilde{D} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}x}$$

osservando che $\mathscr{F}$ dipende da ν tramite $\tilde{D}$. S. Rionero ha dimostrato in [5] che per Ω limitato, il funzionale $\mathscr{F}[\boldsymbol{u}, \nu, t]$, per ogni istante t e per ogni coefficiente di viscosità ν, ammette massimo in $H^1(\Omega)$.

Grazie a questo risultato si può facilmente estendere alle soluzioni generalizzate il teorema di Serrin (vedi [6]).

1° *teorema di stabilità*. Supponiamo Ω limitato e che siano verificate le condizioni per l'esistenza di soluzioni generalizzate (si veda ad es. [4]); allora, posto $\nu_E(\nu, t) = \max_{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)} \mathscr{F}[\boldsymbol{u}, \nu, t]$, valgono le seguenti proposizioni:

(i) se è verificata la condizione $\nu > \nu_E(\nu, t')$ per ogni istante $t' < t$, si ha

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 \leq \|\boldsymbol{u}_0\|^2 \exp\left(-\frac{2}{C_\Omega^2} \int_0^t (\nu - \nu_E)\ (\nu, t')\, \mathrm{d}t'\right);$$

(ii) se inoltre vale la condizione

$$\nu > \sup_{t>0} \nu_E(\nu, t) = \bar{\nu}_E(\nu)\,, \tag{3}$$

il moto $\boldsymbol{v}(x, t)$ è asintoticamente stabile;

(iii) se invece all'istante iniziale si ha $\nu < \nu_E(\nu, 0)$, allora si può trovare una condizione iniziale per cui

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\boldsymbol{u}(x, t)\|^2 |_{t=0} \geq 0\,,$$

cioè esiste una perturbazione la cui energia aumenta inizialmente.

Possiamo a questo punto introdurre la viscosità critica associata al primo teorema di stabilità. considerando la funzione $\bar{\nu}_E(\nu)$ definita dalla (3), sia

$$\bar{\bar{\nu}}_E = \inf\{\nu : \nu > \bar{\nu}_E(\nu)\}\,, \tag{4}$$

$\bar{\bar{\nu}}_E$ risulta essere l'estremo inferiore dei valori di ν per cui è verificata la relazione $\nu > \bar{\nu}_E(\nu)$, e nel caso in cui $\bar{\nu}_E(\nu)$ sia continua, $\bar{\bar{\nu}}_E$ è individuato dalla relazione $\bar{\bar{\nu}}_E = \bar{\nu}_E(\bar{\bar{\nu}}_E)$.

4 - Raffinamento dei risultati

Prendiamo ora in considerazione il funzionale introdotto in [2]

$$\mathscr{T}[\boldsymbol{u}, \nu, t, \lambda] = -\frac{\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \tilde{D}\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}x}{\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x}$$

dove λ è un parametro reale positivo. Ricordiamo che $\mathscr{T}$ dipende da ν tramite $\tilde{D}[\boldsymbol{v}]$. Dimostriamo il seguente

Teorema. *Se Ω è un dominio limitato, esiste il massimo del funzionale $\mathscr{T}[\boldsymbol{u}, \nu, t, \lambda]$ rispetto ad $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)$, per ogni istante t, per ogni viscosità ν e per ogni λ.*

Dim. Proviamo dapprima che il funzionale $\mathscr{T}$ è superiormente limitato. Riferiamo per questo il tensore $\tilde{D} = \tilde{D}[\boldsymbol{v}]$ ai suoi assi principali. Si ha allora

$$\boldsymbol{u} \cdot \tilde{D}\boldsymbol{u} = \sum_{i,j=1}^{3} u_i u_j D_{ij} \geqslant |\boldsymbol{u}|^2 \min[D_{11}, D_{22}, D_{33}]$$

essendo D_{11}, D_{22}, D_{33} gli autovalori di $\tilde{D}$. Ma ora, essendo $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{tr} \tilde{D} = \sum_{i=1}^{3} D_{ii} = 0$, almeno uno dei tre autovalori deve essere negativo, per cui, indicando con D_m il più piccolo di essi, si ha integrando su Ω

$$-\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \tilde{D}\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}x \leqslant |D_m| \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x .$$

Dunque, grazie a questa relazione, si ha

$$\mathscr{T}[\boldsymbol{u}, \nu, t, \lambda] \leqslant \frac{\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \tilde{D}\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}x}{\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x} \leqslant |D_m| . \tag{5}$$

Sia dunque, fissati λ e t,

$$l = \sup\{\mathscr{T}[\boldsymbol{u}, \nu, t, \lambda] : \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)\}. \tag{6}$$

Essendo il funzionale continuo e omogeneo di grado zero rispetto ad $\boldsymbol{u}$, esisterà certamente una sucessione $\{\boldsymbol{u}_n\} \subset H^1(\Omega)$ tale per cui

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{T}[\boldsymbol{u}_n] = l \tag{7}$$

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}x = 1. \tag{8}$$

Indicando con $\|\cdot\|_1$ la norma indotta da $W_1^2(\Omega)$ su $H^1(\Omega)$ e sfruttando la disuguaglianza di Poincaré

$$\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x \leqslant C_\Omega^2 \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}x, \tag{9}$$

si ha

$$\|\boldsymbol{u}_n\|_1 = \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{u}|_n^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_n : \nabla \boldsymbol{u}_n \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant (C_\Omega^2 + 1)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Le funzioni $\boldsymbol{u}_n$ hanno allora norma limitata in $H^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ e pertanto la successione è compatta in $L^2(\Omega)$ (si veda ad esempio, [1]), per cui esiste una sottosucessione (che per brevità indicheremo sempre con $\{u_n\}$) convergente in norma di $L^2(\Omega)$. Dimostriamo ora che questa sottosuccessione converge anche in $H^1(\Omega)$. Poniamo per brevità

$$F[\boldsymbol{u}] = -\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \tilde{D}\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}x \qquad B[\boldsymbol{u}] = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}x.$$

Ora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r, s > 0$ tali che

$$\frac{F[u_r] - \lambda B[u_r]}{\| u_r \|^2} > l - \varepsilon \qquad \frac{F[u_s] - \lambda B[u_s]}{\| u_s \|^2} > l - \varepsilon,$$

da cui sommando si può ottenere

$$F[u_r] + F[u_s] - \lambda(B[u_r] + B[u_s]) > (l - \varepsilon)(\| u_r \|^2 + \| u_s \|^2).$$

Considerando ora la nota identità del parallelogramma, che riscriviamo per la sola F,

$$2(F[u_r] + F[u_s]) = F[u_r + u_s] + F[u_r - u_s]$$

ed applicandola ad F, B e $\| \cdot \|^2$ si giunge a

$$\begin{aligned}(11) \qquad & F[u_r + u_s] + F[u_r - u_s] - \lambda B[u_r + u_s] - \lambda B[u_r - u_s] - l \| u_r + u_s \|^2 \\ & > (l - \varepsilon) \| u_r - u_s \|^2 - \varepsilon \| u_r + u_s \|^2.\end{aligned}$$

A questo punto, per la (6), sarà certamente

$$F[u_r + u_s] - \lambda B[u_r + u_s] - l \| u_r + u_s \|^2 \leqslant 0,$$

quindi, grazie alla (11),

$$F[u_r - u_s] - \lambda B[u_r + u_s] > (l - \varepsilon) \| u_r + u_s \|^2 - \varepsilon \| u_r + u_s \|^2.$$

Da quest'ultima relazione, grazie alla (5), si deduce

$$\begin{aligned}(12) \qquad & \lambda B[u_r - u_s] < F[u_r - u_s] - (l - \varepsilon) \| u_r - u_s \|^2 + \varepsilon \| u_r + u_s \|^2 \\ & \leqslant (|D_m| + |l - \varepsilon|) \| u_r - u_s \|^2 + \varepsilon \| u_r + u_s \|^2 \leqslant 2 |D_m| \| u_r - u_s \|^2 + \varepsilon (\| u_r \|^2 + \| u_s \|^2) \\ & \leqslant 2 |D_m| \| u_r - u_s \|^2 + 2 C_\Omega^2 \varepsilon.\end{aligned}$$

Sfruttando nuovamente la disuguaglianza di Poincaré (9) e la relazione (12), in base alla convergenza di $\{u_n\}$ in $L^2(\Omega)$, per r, s sufficientemente grandi si ha

$$(13) \quad \| u_r - u_s \|_1^2 < (1 + C_\Omega^2) B[u_r - u_s] \leqslant \frac{2}{\lambda} (1 + C_\Omega^2) [|D_m| \| u_r - u_s \|^2 + C_\Omega^2 \varepsilon] < \varepsilon'$$

e dunque la sottosuccessione $\{\boldsymbol{u}_n\}$ è di Cauchy in $H^1(\Omega)$ e ivi convergente verso $\boldsymbol{u}^*$, essendo $H^1(\Omega)$ chiuso in $W_1^2(\Omega)$.

Si ha poi, per la continuità di $\mathscr{T}$ e dell'operatore div,

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{T}[\boldsymbol{u}_n] = \mathscr{T}[\boldsymbol{u}^*] \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^* = 0 \qquad \boldsymbol{u}^*|_S = 0 .$$

Osservazione. La dimostrazione del teorema può essere data senza fare uso della disuguaglianza di Poincaré (9). Infatti, se si pone, invece della (8), la condizione $\int_\Omega |\boldsymbol{u}_n|^2 \mathrm{d}x = 1$ e se si osserva che non è restrittivo supporre

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_n : \nabla \boldsymbol{u}_n \, \mathrm{d}x \leqslant M \qquad \forall n$$

(perchè altrimenti la successione $\{\boldsymbol{u}_n\}$, data la forma di $\mathscr{T}$ e la (5), non potrebbe verificare la (7)), si ottiene $\|\boldsymbol{u}_n\|_1 \leqslant (M+1)^{\frac{1}{2}}$, cioé lo stesso risultato della (10). Procedendo poi in modo anologo al caso precedente, dalla (12) si ottiene, per r, s opportuni,

$$\|\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s\|_1^2 = \|\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s\|^2 + \mathrm{B}[\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s]$$

$$\leqslant \left(1 + 2\frac{|D_m|}{\lambda}\right)\|\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s\|^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s\|^2 \leqslant \left(1 + 2\frac{|D_m|}{\lambda}\right)\|\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}_s\|^2 + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \leqslant \varepsilon' ,$$

che è identico alla (13).

Questo risultato permette di estendere il teorema a quei domini illimitati per i quali valga ancora l'immersione compatta $W_1^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ (si veda [1], pag. 160).

A questo punto poniamo

$$G(\nu, t, \lambda) = \max_{u \in H^1(\Omega)} \mathscr{T}[\boldsymbol{u}, \nu, t, \lambda]$$

ed osserviamo che si ha ovviamente $G(\nu, t, \lambda_1) \leqslant G(\nu, t, \lambda_2)$ per $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$.

Da questo risultato segue immediatamente il teorema di stabilità dato da Davis e Von Kerczek in [6].

2° *teorema di stabilità.* Sia Ω un dominio limitato. Valgono i seguenti risultati

$$\text{(i)} \qquad E(t) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(x,t)\|^2 \leqslant E(0) \exp \int_0^t G(\nu, t', \nu) \mathrm{d}t'$$

e quindi il moto $\boldsymbol{v}(x,t)$ risulta asintoticamente stabile se si ha

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega^t G(\nu, t', \nu) \mathrm{d}t' = -\infty ,$$

(ii) per ogni valore di ν, esiste al più un valore $\lambda^*(\nu)$ della costante λ per cui $G(\nu, t, \lambda^*(\nu))$ è integrabile, cioè per cui

$$\left| \int_0^\infty G(\nu, t, \lambda^*(\nu)) \mathrm{d}t \right| < +\infty$$

e quindi, se $\lambda \neq \lambda^*(\nu)$, G non è integrabile.

Omettiamo ovviamente la dimostrazione (si vedano [2] e [3]), osservando comunque che essa sfrutta in modo essenziale l'esistenza del massimo di $\mathscr{T}[\boldsymbol{u}, \nu, t, \lambda]$, esistenza che è stata dimostrata per $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)$.

Sia ora ν un valore della viscosità. Ad esso associamo il numero

$$\bar{\lambda}(\nu) = \inf\{\lambda : \lim_{t\to\infty} \int_0^t G(\bar{\nu}, t', \lambda)\mathrm{d}t' = -\infty \quad \forall \bar{\nu} \geqslant \nu\} \quad (^2), \tag{14}$$

cioè l'estremo inferiore dei valori per cui l'integrale di $G(\bar{\nu}, t, \lambda)$ diverge a $-\infty$ per tutte le viscosità $\bar{\nu}$ maggiori o uguali a ν. È facile constatare che la funzione $\bar{\lambda}(\nu)$ è sempre monotona non crescente.

Mediante la funzione $\bar{\lambda}(\nu)$ è possibile definire una seconda viscosità critica. Sia

$$\nu_E^* = \inf\{\nu : \nu \geqslant \bar{\lambda}(\nu)\}\,. \tag{15}$$

Grazie alla monotonia di $\bar{\lambda}(\nu)$, ν_E^* esiste certamente e nel caso in cui $\bar{\lambda}(\nu)$ sia continua questo valore è individuato dalla relazione $\nu_E^* = \bar{\lambda}(\nu_E^*)$.

Questo secondo limite di viscosità costituisce effettivamente un raffinamento del precedente. Infatti ν_E^* risulta essere minore o uguale di $\bar{\bar{\nu}}_E$. Ciò è stato proposto da Joseph ([3], pag. 19). Alcune imperfezioni nella dimostrazione ivi data sono facilmente superabili rifacendosi alla esistenza del massimo dei funzionali introdotti sopra.

Bibliografia

[1] R. Adams, *Sobolev spaces*, Acad. Press, 1975.

[2] S. H. Davis and C. Von Kerczek, *A reformulation of energy stability theory*, Arch. Rat. Mech. Anal. 52 (1973), 512.

[3] D. D. Joseph, *Stability of fluid motions*, Springer, 1976.

[4] O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon & Breach, 1969.

---

(2) L'introduzione della funzione $\bar{\lambda}(\nu)$ è necessaria per definire correttamente la seconda viscosità critica in quanto $\lambda^*(\nu)$ può non esistere.

[5] S. RIONERO, *Metodi variazionali per la stabilità asintotica in media in Magnetoidrodinamica*, Ann. Mat. Pura Appl. 78 (1968), 339-364.

[6] J. SERRIN, *On the stability of viscous fluid motions*, Arch. Rational Mech. Anal. 3 (1959), 1-13.

[7] R. TEMAN, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, 1980.

Abstract

It is studied the nonlinear stability of the generalized solutions of the Navier-Stokes equations by the energy method introduced in [6] *and improved in* [2], *proving the existence of the maximum of the functional introduced in* [2] *for* $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$. *Moreover, it is given a more correct version of a comparison theorem, proposed in* [3], *between the critical viscosity in Serrin's theory,* $\bar{\bar{\nu}}_E$, *and the critical viscosity* ν_E^* *of the improved theory.*

* * *