Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1986), 157-165

GIULIANA GIGANTE (*)

Sulla coomologia di varietà pseudohermitiane con torsione nulla (**)

1 - Introduzione

In [5] S. Webster ha preso in considerazione particolari varietà M ($\dim M = 2n+1$) dotate di struttura di Cauchy-Riemann integrabile e non degenere; in particolare esse hanno un sottofibrato del fibrato tangente le cui fibre sono spazi vettoriali complessi di dimensione n. Dopo aver esposto in **1** la struttura pseudohermitiana introdotta da Webster, definiamo in 2 i gruppi di coomologia orizzontale H_h^r e $H_h^{p,q}$ per tali varietà, con l'ulteriore condizione che esse siano fortemente pseudo-convesse e con torsione nulla e proviamo, con l'aiuto di un operatore di Laplace adeguato alla struttura pseudohermitiana, che H_h^r possiede una struttura di Hodge, ovvero che

$$H_h^r = \bigoplus_{p+q=r} H_h^{p,q} \qquad \text{e} \qquad H_h^{p,q} = H_h^{q,p}.$$

In 3 proviamo un teorema di annullamento per H_h^1, sotto ipotesi di positività per la curvatura di Ricci della struttura.

1 - Preliminari

Sia (M, w) una *varietà pseudohermitiana* di dimensione $2n+1$, cioè M è una varietà differenziabile, w è una 1-forma globale reale e, per ogni punto $x \in M$, esiste un intorno aperto U di x ed n 1-forme complesse $w^1,\dots,w^n$ su U in modo tale che $w, w^1,\dots,w^n, w^{\bar 1},\dots,w^{\bar n}$ ($w^{\bar\alpha} = \overline{w^\alpha}$) formi una base per le 1-forme complesse

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 11-II-1985.

su U. Si richiede inoltre la integrabilità della struttura

$$dw = 0 \ \text{mod.}\, w, w^{\gamma} \qquad dw^{\alpha} = 0 \ \text{mod.}\, w, w^{\gamma}$$

e che (M, w) sia non degenere nel senso seguente: se

$$dw = i g_{\alpha\bar{\beta}}\, w^{\alpha} \wedge w^{\bar{\beta}1} + w \wedge (\eta_{\alpha} w^{\alpha} + \eta_{\bar{\alpha}} w^{\bar{\alpha}})$$

con $\eta_{\bar{\alpha}} = \overline{\eta_{\alpha}}$, dove $g_{\alpha\bar{\beta}}$ è hermitiana ($g_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{g_{\beta\bar{\alpha}}} = g_{\bar{\beta}\alpha}$) poichè dw è una 2-forma reale, si richiede che $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ sia non singolare in ogni punto.

Se $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ è definita negativa, (M, w) si dice *fortemente pseudoconvessa*.

Osserviamo che su U è possibile scegliere le $w^1, \dots, w^{\bar{n}}$ in modo tale che si abbia più semplicemente

$$dw = i g_{\alpha\bar{\beta}}\, w^{\alpha} \wedge w^{\bar{\beta}}\,.$$

Infatti, se

$$dw = i g_{\alpha\bar{\beta}}\, w'^{\alpha} \wedge w'^{\bar{\beta}} + w \wedge (\eta_{\alpha} w'^{\alpha} + \eta_{\bar{\alpha}} w'^{\bar{\alpha}}),$$

basta prendere $w^{\alpha} = w'^{\alpha} + v^{\alpha} w$ dove $v^{\alpha} = -i \sum_{\gamma} g^{\bar{\gamma}\alpha} \eta_{\bar{\gamma}}$ e $(g^{\bar{\gamma}\alpha})$ denota la matrice inversa di $(g_{\alpha\bar{\beta}})$.

Osserviamo anche che, se consideriamo ammissibili tutti i dati $(U, w^1, \dots, w^n)$ tali che su U sia $dw = i g_{\alpha\bar{\beta}}\, w^{\alpha} \wedge w^{\bar{\beta}}$, otteniamo una collezione che soddisfa le tre condizioni seguenti:

(1) $$M = \bigcup_i U_i.$$

(2) Per ogni coppia i, j per cui $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, si ha

$$w_i^{\beta} = (A_i^j)_{\beta\alpha}\, w_j^{\alpha} \qquad \text{dove} \qquad A_i^j : U_i \cap U_j \to GL(n, C).$$

(3) La collezione suddetta è massimale tra le collezioni che soddisfano (1) e (2).

Una collezione come sopra si dirà *struttura pseudohermitiana*.

Dare una struttura pseudohermitiana equivale a dare un fibrato vettoriale C^{∞} su M, definito dal ricoprimento U_i e da funzioni di transizione (A_i^j). Il fibrato duale definito rispetto allo stesso ricoprimento U_i dalle ${}^t(A_i^j)$ viene denotato con $T^{1,0}$, mentre il fibrato definito da ${}^t(\bar{A}_i^j)$ è $T^{0,1}$.

Il fibrato somma diretta di $T^{1,0}$, $T^{0,1}$ e del fibrato complesso banale di rango 1 è equivalente al complessificato del fibrato tangente di M. Infatti, una struttura pseudohermitiana definisce un campo X di vettori tangenti su tutto M, tale che

$$w(X)=1 \qquad w_i^{\alpha}(X)=0 \qquad w_i^{\bar\alpha}(X)=0 \qquad \text{su ogni } U_i.$$

Il fibrato complesso di rango n dato dalle (A_j^i) è il fibrato delle (0, 1)-forme $\mathscr{U}^{0,1}$, mentre il fibrato coniugato è il fibrato delle (1, 0)-forme $\mathscr{U}^{1,0}$. Nel modo consueto, si ottengono i fibrati delle (p, q)-forme

$$\mathscr{U}^{(p,q)} = \wedge^p\, \mathscr{U}^{(1,0)} \otimes \wedge^q\, \mathscr{U}^{(0,1)}.$$

Notiamo che il fibrato delle r-forme $\mathscr{U}^r$ su M è equivalente a

$$\wedge^r(\boldsymbol{C} \oplus \mathscr{U}^{(1,0)} \oplus \mathscr{U}^{(0,1)}) = \sum_{p+q=r} \mathscr{U}^{(p,q)} + \sum_{p+q=r-1} \mathscr{U}^{(p,q)}.$$

U^r e $U^{(p,q)}$ denoteranno rispettivamente lo spazio delle sezioni di $\mathscr{U}^r$ e di $\mathscr{U}^{(p,q)}$.

Alla nozione di struttura pseudohermitiana è collegata una connessione [5] la cui torsione è data da una (0, 1)-forma. S. Webster prova [5] che su ogni U_i si trovano delle 1-forme $(w_\beta^\alpha)_i$ e delle 1-forme $(\tau^\alpha)_i$ determinate in modo univoco dalle seguenti condizioni

$$dw_i^\alpha = w_i^\beta \wedge (w_\beta^\alpha)_i + w \wedge \tau_i^\alpha \qquad \tau_i^\alpha = 0 \quad \text{mod. } w_i^{\bar\gamma}$$

$$dg_{\alpha\bar\beta} - (w_\alpha^\gamma)_i\, g_{\gamma\bar\beta} - g_{\alpha\bar\gamma}\, (w_{\bar\beta}^{\bar\gamma})_i = 0.$$

In $U_i \cap U_j$ le 1-forme $(w_\beta^\alpha)_i$ si comportano nel seguente modo

$$(A_j^i)_{\gamma\beta}\, (w_\gamma^\alpha)_i + (dA_j^i)_{\alpha\beta} = (w_\beta^\gamma)_j\, (A_j^i)_{\alpha\gamma}\,.$$

Inoltre in [5] viene messo in evidenza il tensore di curvatura definito localmente da $(dw_\beta^\alpha)_{\nu\bar\sigma} = R_{\beta\bar\alpha\nu\bar\sigma} + (w_\beta^\mu \wedge w_\mu^\alpha)_{\nu\bar\sigma}$ dove l'indice $\nu\bar\sigma$ sta ad indicare il coefficiente di $w^{\bar\sigma} \wedge w^\nu$. La condizione di forte pseudoconvessività ci permette di considerare su M la metrica riemmaniana seguente

$$ds^2 = w \otimes w - 1/2\, (g_{\alpha\bar\beta}\, w^\alpha \otimes w^{\bar\beta} + g_{\bar\alpha\beta}\, w^{\bar\alpha} \otimes w^\beta).$$

Nel seguito (M, w) sarà sempre dotata di tale metrica.

Vogliamo qui osservare che, con una saggia scelta locale delle forme w^α, possiamo fare in modo che localmente sia $g_{\alpha\bar\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$.

L'operatore $\bar\partial: \mathscr{U}^{(p,q)} \to \mathscr{U}^{(p,q+1)}$ viene definito da $\bar\partial = \pi_{p,q+1}\mathrm{d}$ dove $\pi_{p,q+1}$: $\mathscr{U}^{p+q+1} \to \mathscr{U}^{(p,q+1)}$ è la proiezione canonica.

È facile provare che $\bar\partial^2 = 0$ se $p = 0$, mentre in generale si ha $\bar\partial^2 \neq 0$, eccetto quando la torsione è nulla.
L'operatore $\vartheta: U^{(p,q)} \to U^{(p,q-1)}$ denoterà l'*aggiunto formale* di $\bar\partial$ definito dalla equazione $\langle \bar\partial\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \vartheta\psi \rangle$ per ogni $\varphi \in U^{(p,q-1)}$ dove $\langle\, ,\, \rangle = \int_M \langle\, ,\, \rangle_x \mathrm{d}V$, $\langle\, ,\, \rangle_x$ essendo il prodotto interno indotto sulle forme dalla metrica e $\mathrm{d}V$ l'elemento di volume di M.
L'*operatore di Laplace complesso* è allora definito da

$$\square = \bar\partial\vartheta + \vartheta\bar\partial.$$

In [2] è dimostrato che, se (M, w) è fortemente pseudoconvessa e compatta, allora vale la *decomposizione ortogonale*, ovvero, esiste un operatore $N: U^{(p,q)} \to U^{(p,q)}$ per $q > 1$ completamente continuo e tale che $\varphi = \square N\varphi + H\varphi$ dove $\square H\varphi = 0$. Nel caso in cui M è priva di torsione, la validità della decomposizione ortogonale implica, nel modo consueto, che il gruppo

$$H^{p,q} = \{\varphi \in U^{(p,q)} / \bar\partial\varphi = 0\} / \{\bar\partial\psi / \psi \in U^{(p,q-1)}\}$$

è isomorfo allo spazio $\{\varphi \in U^{(p,q)} / \square\,\varphi = 0\}$. Utilizzeremo tale risultato in 2.

2 - I gruppi di coomologia orizzontale

Sia X il campo di vettori globale definito dalla struttura pseudohermitiana di (M, w). Il prodotto interno i_X e la differenziazione di Lie L_X sono definiti così per ogni $\varphi \in U^r$:

$$(i_X\varphi)(Y_1, \dots, Y_{r-1}) = r\varphi(X, Y_1, \dots, Y_{r-1})$$

$$(L_X\varphi)(Y_1, \dots, Y_r) = X(\varphi(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_i \varphi(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_r)$$

dove $Y_1, \dots, Y_r$ sono campi di vettori tangenti di M. Ricordiamo che

(a) $\quad i_X^2 = 0 \qquad\qquad$ (b) $\quad L_X = i_X\mathrm{d} + \mathrm{d}i_X$.

Def. Una r-forma φ si dice *orizzontale* se $i_X\varphi = 0$ e $L_X\varphi = 0$. Denotiamo con U_h^r lo spazio delle r-forme orizzontali. L'operatore d mappa U_h^r in

U_h^r, infatti

$$i_X \mathrm{d}\varphi = L_X\varphi - \mathrm{d}i_X\varphi = 0 \qquad L_X\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}i_X\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Possiamo allora definire i gruppi di coomologia orizzontale

$$H_h^r = \{\varphi \in U_h^r/\mathrm{d}\varphi = 0\}/\{\mathrm{d}\psi/\psi \in U_h^{r-1}\}.$$

Osservazione. La mappa $j: H_h^r \to H^r$ data da $j([\ ]_h) = [\ ]$ dove $[\ ]$ indica le classi di coomologia, non è in generale iniettiva, come mostra il seguente

Esempio. Sia B una varietà compatta di Hodge; rispetto ad un ricoprimento aperto $\{U_k\}$ di B, la forma di Kähler di B si scrive $\chi_k = i\bar{\partial}\partial \log h_k$, con $h_j = |f_{jk}|^2 h_k$ dove f_{jk} sono funzioni di transizione di un fibrato lineare olomorfo su B. Su $U_k \times C$ consideriamo l'insieme degli zeri di $r_k = h_k|z|^2 - 1$.
Sia M lo spazio ottenuto come quoziente di $\bigcup_i (U_i \times C)$ modulo la relazione $(p,z) \sim (p,z') \Leftrightarrow z = f_{ji} z'$; sia $\pi: M \to B$ la proiezione canonica.

La forma globale w data localmente su M da $i\partial r_i$ e la struttura di Cauchy-Riemann indotta su M da quella di B, mediante π^*, dotano M di una *struttura pseudohermitiana con torsione nulla.* La coomologia orizzontale di (M, w) è isomorfa, tramite π^*, alla coomologia di B. In particolare, la classe di coomologia orizzontale di $\mathrm{d}w$ non è nulla, in quanto la forma di Kähler non è coomologa a zero in B.

In modo analogo alle r-forme, definiamo per le (p, q)-forme

$$U_h^{(p,q)} = \{\varphi \in U^{(p,q)}/L_X\varphi = 0\}.$$

Notiamo ora che, essendo M priva di torsione, L_X commuta con $\bar{\partial}$; infatti L_X commuta con d e con le proiezioni $\pi_{p,q}$, dal momento che si ha

$$L_X w = 0 \qquad L_X w^\alpha = -\,w_\beta^\alpha(X)\, w^\beta.$$

Definiamo allora

$$H_h^{p,q} = \{\varphi \in U_h^{p,q}/\bar{\partial}\varphi = 0\}/\{\bar{\partial}\psi/\psi \in U_h^{p,q-1}\}.$$

L'operatore $\partial: U^{(p,q)} \to U^{(p+1,q)}$ definito da $\partial = \pi_{p+1,q}\mathrm{d}$ commuta con L_X e quindi mappa $U_h^{(p,q)}$ in $U_h^{(p+1,q)}$. Inoltre $\partial^2 = 0$.

Si vede facilmente che l'operatore ϑ, aggiunto di $\bar{\partial}$ in $U^{(p,q)}$ è $-i_X * \partial i_X *$ dove $*$ è l'operatore di Hodge di M; l'aggiunto di ∂ è $\bar{\vartheta} = -i_X * \bar{\partial} i_X *$.
Poiché L_X commuta con i_X, $\partial, \bar{\partial}$, allora esso commuta anche con ϑ e $\bar{\vartheta}$ quando si provi che L_X commuta con $*$.
Ciò risulta evidente se, fissato $x \in M$, scegliamo in un intorno U di x, $w^1, \ldots, w^n$ in modo tale che $w^\alpha_\beta(x) = 0$, $\quad g_{\alpha\bar{\beta}} = -\delta_{\alpha\beta}$ in U.
Di conseguenza, l'operatore di Laplace complesso $\Box = \bar{\partial}\vartheta + \vartheta\bar{\partial}$ ed il suo coniugato $\bar{\Box} = \partial\bar{\vartheta} + \bar{\vartheta}\partial$ operano su $U_h^{(p,q)}$. L'operatore $\triangle$ di Laplace reale su M non opera su U_h^r, ma possiamo definire l'*operatore di Laplace reale orizzontale* $\triangle_h = \delta_h \mathrm{d} + \mathrm{d}\delta_h$ dove $\delta_h = -i_X * \mathrm{d} i_X *$ è l'aggiunto di d su U_h^r.
Osserviamo che $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$ mod. w; pertanto si ha su U_h^r $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$ e $\delta_h = \vartheta + \bar{\vartheta}$.
Dunque, sulle forme appartenenti ad $U_h^{(p,q)}$ si ha

$$\triangle_h = \Box + \bar{\Box} + \partial\vartheta + \vartheta\partial + \overline{\partial\vartheta + \vartheta\partial}.$$

Analogamente al caso Kähleriano complesso, definiamo l'operatore ausiliario Λ:

se
$$\varphi = (p!\,q!)^{-1} \Sigma\, \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q} w^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge w^{\bar{\beta}_q},$$

$$\Lambda\varphi = ((p-1)!(q-1)!)^{-1} \Sigma\, i g^{\bar{\beta}\alpha} \varphi_{\alpha\bar{\beta}\alpha_2 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_q} w^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge w^{\bar{\beta}_q}.$$

Scegliendo ancora $w^1, \ldots, w^n$ intorno al punto $x \in M$ in modo che $g_{\alpha\bar{\beta}} = -\delta_{\alpha\beta}$ e $w^\alpha_\beta(x) = 0$, si dimostra facilmente che $L_X\varphi = 0$ implica $L_X\Lambda\varphi = 0$; pertanto Λ mappa $U_h^{(p,q)}$ in $U_h^{(p,q)}$.
Inoltre si verifica, come nel caso Kähleriano, che

$$\partial\Lambda - \Lambda\partial = i\vartheta \qquad \bar{\partial}\Lambda - \Lambda\bar{\partial} = -i\bar{\vartheta},$$

da cui si deduce il seguente

Teorema 1. *Si ha* $\partial\vartheta + \vartheta\partial = 0$, $\quad \Box = \bar{\Box}$, $\quad \Delta_h = 2\Box$.

Teorema 2. *Si ha*

$$H_h^{p,q} = \{\varphi \in U_h^{(p,q)} | \Box\varphi = 0\} \quad \textit{per } q \geq 1, \qquad H_h^r = \{\varphi \in U_h^r | \Delta_h\varphi = 0\}.$$

Dim. Siccome L_X commuta $\Box$, allora $\Box\varphi = 0$ implica che $\Box L_X\varphi = 0$; inoltre, dalla decomposizione ortogonale citata in **1**, si ha: se $L_X\varphi = 0$ e $\varphi = \Box N\varphi + H\varphi$, allora $L_X H\varphi = 0$, ovvero ogni classe di coomologia orizzontale contiene una *forma armonica orizzontale*.

Viceversa, se φ è una forma armonica orizzontale h-coomologa a zero, allora essa è nulla identicamente. Con ciò resta provato il primo fatto.

Sia ora $\varphi \in U_h^r$ e $\Delta_h \varphi = 0$. Essendo $\mathrm{d}\varphi = 0$, $\delta_h \varphi = 0$, $i_X \varphi = 0$, $L_X \varphi = 0$, φ definisce una classe di H_h^r. Se $[\varphi]_h = 0$, allora $\varphi = \mathrm{d}\psi$ con $\delta_h \mathrm{d}\psi = 0$, da cui si deduce $\mathrm{d}\psi = 0$. Viceversa, se φ individua una classe di H_h^r, allora $i_X \varphi = 0$ e $L_X \varphi = 0$. Dunque, $\varphi = \sum_{p+q=r} \alpha_{p,q}$ con $\alpha_{p,q} \in U_h^{(p,q)}$. Sia $H\varphi = \sum_{p+q=r} H\alpha_{p,q}$; si ha

$$\Delta_h H\varphi = \sum_{p+q=r} \Delta_h H\alpha_{p,q} = 2 \sum_{p+q=r} \Box H\alpha_{p,q} = 0$$

ed ovviamente

$$i_X H\varphi = 0 \qquad L_X H\varphi = 0.$$

È ora facile provare il

Teorema 3. *Su una varietà (M, w) compatta, fortemente pseudoconvessa e priva di torsione, si ha*

$$H_h^{p,q} = \overline{H_h^{q,p}} \qquad H_h^r = \bigoplus_{p+q=r} H_h^{p,q}.$$

3 - Un teorema di annullamento per H_h^1

Scopo di questo paragrafo è dimostrare il

Teorema 4. *Sia (M, w) una varietà pseudohermitiana compatta, fortemente pseudoconvessa e con torsione nulla e curvatura di Ricci definita positiva. Allora $H_h^1 = 0$.*

Denotiamo con ∇ la connessione definita sul fibrato tangente olomorfo dalle forme w_β^α; cioè se $X, X_1, \dots, X_n, X_{\bar 1}, \dots, X_{\bar n}$ è la base duale di $w, w^1, \dots, w^n$, $w^{\bar 1}, \dots, w^{\bar n}$ in un aperto U di M

$$\nabla X_\alpha = w_\alpha^\beta(X) X_\beta.$$

Sia φ una (0,1)-forma su U: $\varphi = \Sigma \varphi_{\bar\alpha} w^{\bar\alpha}$. Consideriamo il campo di vettori $\Sigma \varphi^\alpha X_\alpha$ dove $\varphi^\alpha = g^{\alpha\bar\beta} \varphi_{\bar\beta}$. In U vale la seguente *identità di Ricci*

$$(\nabla_\alpha \nabla_{\bar\beta} - \nabla_{\bar\beta} \nabla_\alpha) \varphi^\gamma = [X_\alpha, X_{\bar\beta}] \varphi^\gamma - R_{\nu\bar\gamma\alpha\bar\beta} \varphi^\nu - i w_\nu^\gamma(X) g_{\alpha\bar\beta} \varphi^\nu.$$

Infatti

$$\nabla_\alpha \nabla_{\bar\beta} \varphi^\gamma = \nabla_\alpha (X_{\bar\beta} \varphi^\gamma + \varphi^\mu w^\gamma_\mu(X_{\bar\beta}))$$

$$= X_\alpha X_{\bar\beta} \varphi^\gamma + (X_{\bar\beta}\varphi^\mu)\, w^\gamma_\mu(X_\alpha) + (\nabla_\alpha\varphi^\mu)\, w^\gamma_\mu(X_{\bar\beta}) + \varphi^\mu \nabla_\alpha(w^\gamma_\mu(X_{\bar\beta}))$$

$$\nabla_{\bar\beta} \nabla_\alpha \varphi^\gamma = \nabla_{\bar\beta}(X_\alpha \varphi^\gamma + \varphi^\mu w^\gamma_\mu(X_\alpha))$$

$$= X_{\bar\beta} X_\alpha \varphi^\gamma + (X_\alpha\varphi^\mu)\, w^\gamma_\mu(X_{\bar\beta}) + (\nabla_{\bar\beta}\varphi^\mu)\, w^\gamma_\mu(X_\alpha) + \varphi^\mu \nabla_{\bar\beta}(w^\gamma_\mu(X_\alpha));$$

pertanto

$$(\nabla_\alpha \nabla_{\bar\beta} - \nabla_{\bar\beta} \nabla_\alpha)\, \varphi^\gamma$$

$$= [X_\alpha, X_{\bar\beta}]\, \varphi^\gamma + \varphi^\delta [\, \nabla_\alpha w^\gamma_\delta(X_{\bar\beta}) - \nabla_{\bar\beta} w^\gamma_\delta(X_\alpha) + w^\gamma_\mu(X_{\bar\beta})\, w^\mu_\delta(X_\alpha) - w^\gamma_\mu(X_\alpha)\, w^\mu_\delta(X_{\bar\beta})],$$

da cui si ottiene subito la nostra identità tenendo conto della formula che definisce il tensore di curvatura (vedi **1**). Notiamo qui che, se f è una funzione C^∞ su M, prendendo i coefficienti di $w^\alpha \wedge w^{\bar\beta}$ nell'espressione di $d^2 f$ in termini di $w, w^\alpha, w^{\bar\alpha}$ si ha

$$[X_\alpha, X_{\bar\beta}] = -\sum_\gamma (w^\gamma_\alpha)(X_{\bar\beta}) X_\gamma - \sum_\gamma (w^{\bar\beta}_{\bar\gamma})(X_\alpha) X_{\bar\gamma} - i g_{\alpha\bar\beta} X.$$

Dim. del Teorema 4. Per semplificare, scegliamo localmente $w^1, \dots, w^n$ in modo che $g_{\alpha\bar\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$.
Sia φ una $(0,1)$-forma C^∞ su M; definiamo i due campi di vettori dati localmente da

$$\xi = \sum_\alpha \xi^\alpha X_\alpha \quad \text{dove} \quad \xi^\alpha = \nabla_{\bar\gamma} \varphi^\alpha \overline{\varphi^\gamma},$$

$$\eta = \sum_\alpha \eta^{\bar\alpha} X_{\bar\alpha} \quad \text{dove} \quad \eta^{\bar\alpha} = \nabla_\beta \varphi^\beta \, \overline{\varphi^\alpha}.$$

È facile verificare che

$$\operatorname{div} \xi = \sum_\alpha \nabla_\alpha \xi^\alpha \qquad \operatorname{div} \eta = \sum_\alpha \nabla_{\bar\alpha} \eta^{\bar\alpha}$$

dove div indica la divergenza nella connessione riemanniana.
Si ha inoltre

$$\text{(A)} \quad \operatorname{div}(\xi - \eta) = \sum_{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \nabla_{\bar\beta} - \nabla_\beta \nabla_\alpha)\, \varphi^\alpha \cdot \overline{\varphi^\beta} - \langle \vartheta\varphi, \vartheta\varphi \rangle_x - \langle \bar\partial\varphi, \bar\partial\varphi \rangle_x + \sum_{\alpha\beta} \nabla_{\bar\beta}\varphi^\alpha \cdot \overline{\nabla_{\bar\beta}\varphi^\alpha}.$$

Infatti si ha

$$\langle \bar\partial\varphi, \bar\partial\varphi\rangle_x = \sum_{\alpha<\beta}(\nabla_{\bar\alpha}\varphi^\beta - \nabla_{\bar\beta}\varphi^\alpha)\,\overline{(\nabla_{\bar\alpha}\varphi^\beta - \nabla_{\bar\beta}\varphi^\alpha)}$$

$$\langle \vartheta\varphi, \vartheta\varphi\rangle_x = \Big(-\sum_\alpha \nabla_\alpha\varphi^\alpha\Big)\cdot\overline{\Big(-\sum_\alpha \nabla_\alpha\varphi^\alpha\Big)}.$$

Fissato $x \in M$, possiamo scegliere U in un intorno V di $x, w^1, \dots, w^n$ in modo che sia ancora $g_{\alpha\bar\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ in U e che inoltre sia $w^{\bar\alpha}_{\bar\beta}(x) = 0$. In tal modo utilizzando l'identità di Ricci e la condizione $L_X\varphi = 0$, la parte destra di (A) diventa, nel punto x,

$$-\langle \bar\partial\varphi, \bar\partial\varphi\rangle_x - \langle \vartheta\varphi, \vartheta\varphi\rangle_x + \sum_{\alpha\beta}\nabla_{\bar\alpha}\varphi^\beta\cdot\overline{\nabla_{\bar\alpha}\varphi^\beta} - R_{\nu\bar\alpha\alpha\bar\beta}\,\varphi^\nu\bar\varphi^{\beta}.$$

Dunque integrando (A) su M e tenendo conto che, per ipotesi $-R_{\nu\bar\alpha\alpha\bar\beta}\,\xi^\nu\bar\xi^{\alpha} > 0$ $\forall \xi \in \boldsymbol{C}^n$, si ottiene $\langle \bar\partial\varphi, \bar\partial\varphi\rangle + \langle \vartheta\varphi, \vartheta\varphi\rangle \geqslant 0$ dove l'uguaglianza vale se e solo se $\varphi \equiv 0$. Se ne deduce che

$$\{\varphi \in U_h^{(0,1)} / \square\varphi = 0\} = \{0\},$$

che implica, in virtù dei risultati di 2, $H_h^1 = 0$.

Bibliografia

[1] K. KODAIRA and I. MORROW, *Complex manifold*, Interscience.

[2] J. J. KOHN, *Boundaries of complex manifolds*, Proceedings of the «Conference on Complex Analysis», Minneapolis, 1964.

[3] R. NIRENBERG, *On the H. Lewy extension phenomenon*, Trans. Amer. Math. Soc. 168 (1972), 337-356.

[4] E. VESENTINI, *Lectures on Levi convexity of complex manifolds and cohomology vanishing theorems*, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1967.

[5] S. M. WEBSTER, *Pseudo-hermitian structures on real hypersurface*, J. Differential Geom. **13** (1978), 25-41.

Summary

After defining the «horizontal cohomology», related to the pseudohermitian structure of a strongly pseudoconvex, compact manifold M with torsion zero, we prove that there is a Hodge structure. Furthermore, we prove a vanishing theorem for the first horizontal cohomology group under positivity condition for the Ricci pseudohermitian curvature of M.

* * *