Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 143-146

ANNA BENINI (*)

Sui pj-quasi-anelli (**)

Introduzione

In analogia con [1], in questo lavoro si studiano, sotto il nome di pj-quasi-anelli, i quasi anelli N in cui per ogni x, y di N con $x \neq 0 \neq y$ esistono numeri naturali n, m tali che $x^n = y^m$, anche per preparare la caratterizzazione, che comparirà altrove, di quasi-anelli i cui ideali propri siano pj-quasi-anelli.

Si osserva dapprima che tali quasi-anelli, escluso il caso banale del quasi-corpo costante su Z, sono zero-simmetrici e si arriva ad una loro caratterizzazione mostrando che un quasi-anello è un pj-quasi-anello privo di nilpotenti se e solo se è un quasi-corpo di caratteristica prima, tutti i cui elementi sono periodici ed è un pj-quasi-anello dotato di nilpotenti se e solo se è nil.

1 - Struttura dei pj-quasi anelli

Nel seguito indicheremo con N un quasi-anello sinistro e ci riferiremo a [4] per i fatti generali e la nomenclatura.

Def. A. Un quasi-anello N si dice *pj-quasi-anello* se $\forall x, y \in N$ con $x \neq 0 \neq y$ esistono h, k interi positivi tali che $x^h = y^k$.

Osservazione 1. Sia N un pj-quasi-anello, allora: Se n possiede un nilpotente non nullo, N è nil. Ogni divisore destro dello zero è nilpotente.

Sia $a \neq 0$ un nilpotente di N, allora $a^m = 0$ per qualche m intero positivo. Poichè N è pj-quasi-anello, per ogni $x \neq 0$ di N e per qualche h, k intero positivo, sarà $x^h = a^k$ quindi $x^{mh} = a^{mk} = 0 : N$ è nil.

(*) Indirizzo: Facoltà di Ingegneria, Università, Viale Europa 39, 25060 Brescia, Italy.

(**) Lavoro svolto con contributo M.P.I. — Ricevuto: 4-II-1985.

Sia $x \neq 0$ un divisore destro dello zero, allora esiste un y di N con $y \neq 0$ e $yx = 0$. poichè N è pj-quasi-anello, per qualche h, k intero positivo sarà $x^h = y^k$ e se $x^h = 0$, x è nilpotente. Se poi $x^h \neq 0$ allora $x^{h+1} = x^h x = y^k x = y^{k-1}(yx) = 0$ e x è ancora nilpotente.

È ovvia la seguente

Osservazione 2. Sia N un pj-quasi-anello: N contiene al più un elemento costante non nullo. N è costante oppure zerosimmetrico.

Per quanto detto fino ad ora e considerato che un quasi-anello *nil* è ovviamente un pj-quasi-anello, escluderemo tali quasi-anelli dalle successive considerazioni, continuando quindi lo studio per i quasi anelli interi. Ricordiamo in proposito [2] che un quasi-anello intero è costante oppure zerosimmetrico.

Nel caso costante abbiamo il

Teorema 1. *Un quasi anello N è un pj-quasi-anello costante se e solo se N è isomorfo ad $M_c(Z_2)$.*

Da Osservazione 2 segue che $N = \{0, n\}$ con $n \neq 0$ e poichè $n + n = n$ implica $n = 0$, il che non può essere, sarà $n + n = 0$ e N risulta isomorfo al quasi-corpo su Z_2 (cfr. [4]).

Veniamo infine al caso zero-simmetrico.

Lemma 1. *Sia N un pj-quasi-anello intero zero-simmetrico, allora N contiene un N-sottogruppo (non ridotto al solo $\{0\}$) minimale, incluso in tutti gli N-sottogruppi $\neq \{0\}$.*

Sia N_α, $\alpha \in A$, la famiglia di tutti gli N-sottogruppi di N non ridotti al solo $\{0\}$, e sia n un elemento non nullo di N. Poichè N è un pj-quasi-anello, esiste un r intero positivo per cui $n^r \in N_\alpha$, per ogni α di A; sia x_α il più piccolo intero positivo per cui accade ciò.

In A definiamo una relazione R ponendo $\alpha R \alpha'$ quando $x_\alpha = x_{\alpha'}$; tale relazione è di equivalenza; sia $A/R = \{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \dots\}$ l'insieme quoziente.

L'insieme A/R è un insieme bene ordinato ove si definisca $\bar{\alpha} \leqslant \bar{\beta}$ quando $x_\alpha \leqslant x_{\beta}$,; sia $\bar{\alpha}^0$ il suo minimo.

Posto $N_{\bar{\alpha}} = \bigcap_{\alpha \in \bar{\alpha}} N_\alpha$, per ogni $\bar{\alpha} \in A/R$, osserviamo che $N_{\bar{\alpha}}$ è un N-sottogruppo in quanto intersezione di N-sottogruppi, ed è $N_{\bar{\alpha}} \neq \{0\}$ perchè $n^{x_\alpha} \in N_\alpha$ per ogni $\alpha \in \bar{\alpha}$.

Consideriamo ora la famiglia di N-sottogruppi $N_{\bar{\alpha}}$ indiciata in A/R e mostriamo che $\bigcap_{\bar{\alpha} \in A/R} N_{\bar{\alpha}} \neq \{0\}$.

Certamente è $N_{\bar{\alpha}^0} \neq \{0\}$. Supposto poi che, fissato un $\bar{\beta} \in A/R$, sia $\bigcap_{\substack{\bar{\alpha} \in A/R \\ \bar{\alpha} < \bar{\beta}}} N_{\bar{\alpha}} \neq \{0\}$ avremo che esiste un intero positivo $k < x_\beta$ tale che sia $n^k \in \bigcap_{\bar{\alpha} < \bar{\beta}} N_{\bar{\alpha}}$, quindi, a maggior ragione, $n^{x_\beta} \in \bigcap_{\bar{\alpha} < \bar{\beta}} N_{\bar{\alpha}}$, di conseguenza $n^{x_\beta} \in (\bigcap_{\bar{\alpha} < \bar{\beta}} N_{\bar{\alpha}}) \cap N_{\bar{\beta}}$. Per il principio di induzione transfinita possiamo allora concludere che $\bigcap_{\bar{\alpha} \in A/R} N_{\bar{\alpha}} \neq 0$ e poichè ovviamente $\bigcap_{\bar{\alpha} \in A/R} N_{\bar{\alpha}} = \bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha$, sarà $\bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha \neq \{0\}$.

Dunque N ammette un N-sottogruppo minimale, non ridotto al solo $\{0\}$, contenuto in tutti gli N-sottogruppi di N diversi da $\{0\}$.

Lemma 2. *Sia N un pj-quasi-anello intero, zero-simmetrico, allora N è N-semplice.*

Sia N come in ipotesi, allora (Lemma 1) N contiene un N-sottogruppo $N' \neq \{0\}$, contenuto in ogni altro N-sottogruppo diverso da $\{0\}$. Poichè per tutti gli x di N, xN' è un N-sottogruppo, risulta $xN' \supseteq N'$. Sia x un elemento di N, $x \neq 0$ che non appartiene ad N': poichè N è un pj-quasi-anello esiste il più piccolo intero positivo k per cui $x^k \in N$; allora per qualche n' di N' sarà $x^k = x^{k-1} n'$ e, poichè N è intero, è $x = n'$, il che è contro l'ipotesi, quindi $N = N'$ e la tesi.

Teorema 2. *Un quasi-anello N non costante è un pj-quasi-anello intero, se e solo se è un quasi-corpo di caratteristica p numero primo tutti i cui elementi sono periodici.*

Poichè (Lemma 2) N non ha N-sottogruppi propri ed è intero, risulta $xN = N$ per ogni x non nullo di N; avremo dunque $xn = x$ per qualche n di N. Poichè N è un pj-quasi-anello, per ogni y di N esistono interi positivi h, k tali che $y^h = x^k$ e da ciò $y^h n = x^k n = x^{k-1}(xn) = x^{k-1} x = x^k = y^h$, quindi $yn = y$ e n è unità destra. Ora $n \in N_d$ e $N_d \neq \{0\}$ e questo basta (cfr. [3]) per affermare che N è un quasi-corpo.

Sempre dal fatto che N è un pj-quasi-anello deriva poi che ogni elemento è ovviamente periodico.

Sia ora u l'unità di N. Se $u + u = 0$, $\mathrm{car}(u) = 2$ e la caratteristica di u è finita. Se $u + u \neq 0$, esiste un h intero positivo per cui $(u+u)^h = u$, da ciò risulta $(2^h - 1)u = 0$, $\mathrm{car}(u)$ divide $2^h - 1$, e quindi ancora finita. Poichè $\mathrm{car}(u)$ è finita risulta (cfr. [4] pag. 239, 8.9) $\mathrm{car}(u) = \mathrm{car}(N) = p$ numero primo. Il resto è ovvio.

Bibliografia

[1] A. CHERUBINI and A. VARISCO, *Semigroups and rings whose proper one-sided ideals are power joined*, Czechoslovak Math. J. (109) 34 (1984).

[2] H. E. HEATHERLY and H. OLIVIER, *Near integral domains*, Monatsh. Math. 78 (1974), 215-222.
[3] S. LIGH, *On division near-rings*, Canad. J. Mah. 21 (1969), 1366-1371.
[4] G. PILZ, *Near-rings*, North Holland, N.Y., 1977.

Summary

We study here the power joined near-rings N ($\forall x, y \in N$, $n, m \in \mathbf{N}$ *such that* $x^n = y^m$).
We observe that they are zero-symmetric near-ring, except the trivial case of the constant near-field, and we show that a near-ring N is a pj-near-ring without non-zero nilpotent elements if and only if it is a near-field with $\operatorname{char} N = p$ *(with p as prime number) in which each element is periodic, and it is a pj-near-ring with non-zero nilpotent elements if and only if it is nil.*

* * *