Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 89-100

BIAGIO MICALE (*)

Sul centralizzatore del sistema di operazioni di certe algebre (**)

Introduzione

In [7] sono state trovate caratterizzazioni di alcune famiglie di Ω-gruppi (Higgins [4]) e di particolari Ω-sottogruppi in termini di invarianza (Dantoni [2]) di opportune relazioni. Proseguendo questa ricerca, nel presente lavoro si dà una caratterizzazione del centralizzatore Ω^* (Cohn [1]) relativo ad un Ω-gruppo $\mathscr{G}$, cioè dell'insieme di tutte le operazioni invarianti sia rispetto a ciascuna delle operazioni $+$, $-$, 0 del gruppo additivo $\mathscr{G}^+$ di $\mathscr{G}$, sia rispetto a ciascuna delle operazioni del sistema Ω (v. 2). Il centralizzatore Ω^* viene quindi caratterizzato nel caso in cui $\mathscr{G}$ è un Ω-gruppo abeliano (v. 3) e nel caso in cui è un Ω-gruppo distributivo (v. 4 e 5).

In **6** si caratterizzano gli Ω-gruppi ad operazioni tutte invarianti, cioè gli Ω-gruppi nei quali si ha $\Omega \cup \{+, -, 0\} \subseteq \Omega^*$ (Plotkin [8]); si dà inoltre una condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni Ω-gruppo abeliano avente un dato gruppo additivo abeliano sia ad operazioni tutte invarianti.

Infine in **7** si studiano le algebre $\mathscr{A} = (A, \Omega)$ col sistema Ω costituito da operazioni tutte di arità $\geqslant 2$, dotate di una identità e che sono ad operazioni tutte invarianti.

1 – Richiamiamo alcune definizioni e alcune proprietà che ci saranno utili nel seguito. Per la notazione e per le definizioni non richiamate rimandiamo a [7].

(a) Sia $\mathscr{A} = (A, \Omega)$ un'algebra avente l'insieme A come sostegno ed Ω come sistema di operazioni. Diremo che una relazione R definita su A è una *relazione*

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 95100 Catania, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) e con contributo finanziario del M.P.I. — Ricevuto: 3-X-1984.

invariante dell'algebra $\mathscr{A}$ (1) quando R è invariante rispetto ad ogni operazione del sistema Ω. Diremo che un'operazione ω^* definita su A è una *operazione invariante dell'algebra* $\mathscr{A}$ quando essa è invariante rispetto ad ogni operazione del sistema Ω. Si chiama *centralizzatore* (2) del sistema Ω, e si indica con Ω^*, l'insieme di tutte le operazioni invarianti dell'algebra $\mathscr{A}$.

Sia $\mathscr{G}$ un Ω-gruppo, G il suo insieme sostegno ed R una relazione definita su G. Diremo che R è una *relazione invariante di* $\mathscr{G}$ quando essa è invariante sia rispetto ad ogni operazione del sistema Ω, sia rispetto a ciascuna delle tre operazioni $+$, $-$, 0 del gruppo additivo $\mathscr{G}^+$. Analogamente diremo che una operazione ω definita su G è una *operazione invariante di* $\mathscr{G}$ quando essa è invariante rispetto a ciascuna delle operazioni del sistema $\Omega \cup \{+, -, 0\}$.

Se $\mathscr{G}$ è un Ω-gruppo, nel seguito indicheremo con Ω^* il centralizzatore del sistema di operazioni $\Omega \cup \{+, -, 0\}$.

(b) Sia $\mathscr{A} = (A, \Omega)$ un'algebra col sistema Ω costituito da operazioni tutte di arità $\geqslant 2$.

Una operazione m-aria ω di Ω la diremo *commutativa* se per ogni $a_1, \dots, a_m \in A$ si ha $a_1 \dots a_m \omega = a_1 \dots a_{i-1} a_j a_{i+1} \dots a_{j-1} a_i a_{j+1} \dots a_m \omega$ per $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Diremo che l'algebra $\mathscr{A}$ è *commutativa* se ogni operazione ω di Ω è commutativa.

Diremo che l'algebra $\mathscr{A}$ è *associativa* se per ogni $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ con ω_1 n-aria e ω_2 m-aria, e per ogni $a_1, \dots, a_{n+m-1} \in \mathrm{A}$ si ha $a_1 \dots a_{n+m-1} \omega_1 \omega_2 = a_1 \dots a_{i-1}(a_i \dots a_{n+i-1} \omega_1) a_{n+i} \dots a_{n+m-1} \omega_2$ per $i = 1, \dots, m-1$.

Diremo che l'algebra $\mathscr{A}$ è *totalmente commutativa* se per ogni $\omega_1, \dots, \omega_t \in \Omega$, indicate con $f(x_1, \dots, \mathrm{x_m}; \omega_1, \dots, \omega_t)$ e $g(x_1, \dots, x_m; \omega_1, \dots, \omega_t)$ due qualunque espressioni formali (3) nelle indeterminate $x_1, \dots, x_m$ e nei simboli di operazioni $\omega_1, \dots, \omega_t$, tali che ogni simbolo $x_1, \dots, x_m$, $\omega_1, \dots, \omega_t$ compaia lo stesso numero di volte in f e in g, si ha $f(a_1, \dots, a_m; \omega_1, \dots, \omega_t) = g(a_1, \dots, a_m; \omega_1, \dots, \omega_t)$ per ogni $a_1, \dots, a_m \in A$ (4).

Osserviamo che se l'algebra $\mathscr{A}$ è totalmente commutativa allora $\mathscr{A}$ è anche commutativa e associativa, ma in generale non vale il viceversa se in Ω ci sono almeno due operazioni distinte.

(1) Dantoni [2] (pag. 187).

(2) Cohn [1] (pag. 127).

(3) Dantoni [2] (pagg. 191-192).

(4) Osserviamo che se un Ω-anello $\mathscr{G}$ si chiama commutativo (risp. associativo, totalmente commutativo) quando l'algebra (G, Ω) è commutativa (risp. associativa, totalmente commutativa), si ritrovano le definizioni di Ω-anello commutativo e Ω-anello associativo date da Kurosh in [6] (pagg. 10-11), e la definizione di Ω-anello totalmente commutativo data da Strano in [9] (pag. 88).

(c) Sia $\mathscr{G}$ un Ω-gruppo, siano $A_1, \dots, A_n$ sottoinsiemi non vuoti di G e sia $\bar{\omega}$ un'operazione n-aria definita su G. Consideriamo la relazione $(n+1)$-aria $R_{A_1 \dots A_n}$ definita su G nel seguente modo: per $a_1, \dots, a_n, b \in G$ si ha $(a_1, \dots, a_n, b) \in R_{A_1 \dots A_n}$ allora e solo quando è $a_i \in A_i$ $(i = 1, \dots, n)$ e $b = a_1 \dots a_n \bar{\omega}$.

Tale relazione è stata introdotta e studiata in [7], dove è stato dimostrato che

Teorema 1. *La relazione $R_{A_1 \dots A_n}$ è una relazione invariante dell'Ω-gruppo $\mathscr{G}$ allora e solo quando*

(a) *$A_1, \dots, A_n$ sono Ω-sottogruppi di $\mathscr{G}$;*

(b) *per ogni $a_i, a'_i \in A_i$ $(i = 1, \dots, n)$ si ha*

$$(a_1 + a'_1) \dots (a_n + a'_n)\bar{\omega} = a_1 \dots a_n \bar{\omega} + a'_1 \dots a'_n \bar{\omega};$$

(c) *per ogni intero $m \geqslant 1$, per ogni operazione m-aria $\omega \in \Omega$ e per ogni $a_{rs} \in A_s$ $(r = 1, \dots, \mathrm{m};\ s = 1, \dots, n)$, posto $C = \|a_{rs}\|$, si ha $(\omega C)\bar{\omega} = \omega(C\bar{\omega})$.*

2 – Sia $\mathscr{G}$ un Ω-gruppo e sia Ω^* il centralizzatore del sistema $\Omega \cup \{+, -, 0\}$. Si vede immediatamente che *in Ω^* c'è l'operazione nullaria 0 e non ci sono altre operazioni nullarie.* Ci proponiamo di caratterizzare le operazioni di arità $n \geqslant 1$ del sistema Ω^*.

Sia Φ l'insieme degli endomorfismi di $\mathscr{G}$. Fissiamo $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ $(n \geqslant 1)$ e, posto $A_i = G\varphi_i$ $(i = 1, \dots, n)$, consideriamo la relazione $R_{A_1 \dots A_n}$ definita come in **1**, a partire dall'operazione n-aria $\bar{\omega}$ tale che $g_1 \dots g_n \bar{\omega} = g_1 + \dots + g_n$ per ogni $g_1, \dots, g_n \in G$; quindi, per $a_1, \dots, a_n, b \in G$ si ha $(a_1, \dots, a_n, b) \in R_{A_1 \dots A_n}$ allora e solo quando è $a_i \in A_i$ $(i = 1, \dots, n)$ e $b = a_1 + \dots + a_n$.

Teorema 2. *Se $\mathscr{G}$ è un Ω-gruppo e Ω^* è il centralizzatore del sistema $\Omega \cup \{+, -, 0\}$, allora le operazioni $\omega^* \in \Omega^*$ di arità $n \geqslant 1$ sono tutte e solo quelle del tipo*

$$g_1 \dots g_n \omega^* = g_1 \varphi_1 + \dots + g_n \varphi_n \qquad (g_i \in G) \tag{1}$$

con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ endomorfismi di $\mathscr{G}$ tali che la relazione $R_{A_1 \dots A_n}$ è una relazione invariante di $\mathscr{G}$.

Infatti, sia ω^* una operazione di arità $n \geqslant 1$ definita su G del tipo (1) con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ endomorfismi di $\mathscr{G}$ tali che la relazione $R_{A_1 \dots A_n}$ è una relazione invariante di $\mathscr{G}$.

In virtù della (b) del Teorema 1, per ogni $g_i, g'_i \in G$ $(i = 1, \ldots, n)$ si ha

$$(g_1 + g'_1) \ldots (g_n + g'_n)\, \omega^* = g_1 \varphi_1 + g'_1 \varphi_1 + \ldots + g_n \varphi_n + g'_n \varphi_n = g_1 \ldots g_n\, \omega^* + g'_1 \ldots g'_n\, \omega^*$$

e questa prova che ω^* è invariante rispetto all'operazione $+$. Da essa inoltre per $g_i = g'_i = 0$ segue $0 \ldots 0 \omega^* = 0$ e per $g'_i = -g_i$ segue $(-g_1) \ldots (-g_n)\, \omega^* = -g_1 \ldots g_n \omega^*$, per cui ω^* è invariante anche rispetto alle operazioni 0 e $-$.

Se ω è una operazione m-aria di Ω, allora in virtù della (c) del Teorema 1 per ogni $g_{rs} \in G$ $(r = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, n)$ si ha

$$\begin{aligned} g_{11} \ldots g_{m1}\, \omega \ldots g_{1n} \ldots g_{mn}\, \omega \omega^* &= g_{11} \varphi_1 \ldots g_{m1}\, \varphi_1\, \omega + \ldots + g_{1n}\, \varphi_n \ldots g_{mn}\, \varphi_n\, \omega \\ &= g_{11} \ldots g_{1n}\, \omega^* \ldots g_{m1} \ldots g_{mn}\, \omega^*\, \omega \end{aligned}$$

e quindi ω^* è invariante rispetto a ω. Pertanto $\omega^* \in \Omega^*$.

Viceversa, sia ω^* un'operazione n-aria $(n \geqslant 1)$ definita su G; supponiamo che $\omega^* \in \Omega^*$ e proviamo che essa è del tipo (1) con $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ endomorfismi di $\mathscr{G}$ tali che la relazione $R_{A_1 \ldots A_n}$ è invariante di $\mathscr{G}$.

Infatti, consideriamo le applicazioni φ_i: $G \to G$ $(i = 1, \ldots, n)$ definite da

$$g\varphi_1 = g0 \ldots 0\omega^* \qquad g\varphi_2 = 0g0 \ldots 0\omega^*, \ldots, \qquad g\varphi_n = 0 \ldots 0g\omega^* \,.$$

Per l'invarianza di ω^* rispetto all'operazione $+$ si ha

$$(g + g')\, \varphi_1 = (g + g')(0 + 0) \ldots (0 + 0)\omega^* = g0 \ldots 0\omega^* + g'\, 0 \ldots 0\omega^* = g\varphi_1 + g'\, \varphi_1$$

per ogni $g, g' \in G$.

Per l'invarianza di ω^* rispetto ad ogni operazione m-aria $\omega \in \Omega$ si ha

$$\begin{aligned} g_1 \ldots g_m\, \omega\varphi_1 &= (g_1 \ldots g_m\, \omega)(0 \ldots 0\omega) \ldots (0 \ldots 0\omega)\, \omega^* \\ &= g_1 0 \ldots 0\omega^* \ldots g_m 0 \ldots 0\omega^*\, \omega = g_1\, \varphi_1 \ldots g_m \varphi_1\, \omega \end{aligned}$$

per ogni $g_1, \ldots, g_m \in G$.

Pertanto φ_1 è un endomorfismo di $\mathscr{G}$. Analogamente si vede che anche $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono endomorfismi di $\mathscr{G}$.

Inoltre, per l'invarianza di ω^* rispetto all'operazione $+$ si ha

$$\begin{aligned} g_1 \ldots g_n\, \omega^* &= (g_1 + 0)(0 + g_2) \ldots (0 + g_n)\, \omega^* \\ &= g_1 0 \ldots 0\omega^* + 0g_2 \ldots g_n\, \omega^* = g_1\, \varphi_1 + (0 + 0)(g_2 + 0) \ldots (0 + g_n)\, \omega^* \\ &= g_1\, \varphi_1 + g_2\varphi_2 + 00g_3 \ldots g_n\, \omega^* = \ldots = g_1\varphi_1 + \ldots + g_n\, \varphi_n \,, \end{aligned}$$

cioè ω^* è del tipo (1).

Resta da verificare che la relazione $R_{A_1 \ldots A_n}$, con $A_i = G\varphi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, è invariante di $\mathscr{G}$, ovvero che valgono le (a), (b) e (c) del Teorema 1.

Poichè φ_i è un endomorfismo si ha che A_i è un Ω-sottogruppo di $\mathscr{G}$, quindi vale la (a). Inoltre, per ogni $g_i\varphi_i, g'_i\varphi_i \in A_i$ $(i = 1, \dots, n)$, dall'invarianza di ω^* rispetto all'operazione $+$ segue che

$$g_1\varphi_1 + g'_1\varphi_1 + \dots + g_n\varphi_n + g'_n\varphi_n = (g_1 + g'_1)\dots(g_n + g'_n)\,\omega^*$$

$$= g_1\dots g_n\,\omega^* + g'_1\dots g'_n\,\omega^* = g_1\varphi_1 + \dots + g_n\varphi_n + g'_1\varphi_1 + \dots + g'_n\varphi_n\,,$$

quindi vale la (b).

Infine, per ogni intero $m \geqslant 1$, per ogni operazione m-aria $\omega \in \Omega$ e per ogni $g_{rs}\varphi_s \in A_s$ $(r = 1, \dots, m;\ s = 1, \dots, n)$, dall'invarianza di ω^* rispetto a ω segue che

$$g_{11}\varphi_1\dots g_{m1}\varphi_1\,\omega + \dots + g_{1n}\varphi_n\dots g_{mn}\varphi_n\omega$$

$$= g_{11}\dots g_{m1}\,\omega\dots g_{1n}\dots g_{mn}\,\omega\omega^* = g_{11}\dots g_{1n}\,\omega^*\dots g_{m1}\dots g_{mn}\,\omega^*\omega$$

$$= (g_{11}\varphi_1 + \dots + g_{1n}\varphi_n)\dots(g_{m1}\varphi_1 + \dots + g_{mn}\varphi_n)$$

quindi vale la (c).

Pertanto, per il Teorema 1, la relazione $R_{A_1\dots A_n}$ è una relazione invariante di $\mathscr{G}$.

Osservazione. Dal Teorema 2 segue in particolare che, qualunque sia l'Ω-gruppo $\mathscr{G}$, *le operazioni unarie di Ω^* sono tutte e solo gli endomorfismi di $\mathscr{G}$.*

Si osservi inoltre che in Ω^* ci sono sempre e per ogni intero $n \geqslant 1$:

— l'operazione n-aria *degenere*, cioè l'operazione ω definita da $g_1\dots g_n\omega = 0$ per ogni $g_1, \dots, g_n \in G$;

— le n operazioni n-arie *unitarie*, cioè le n operazioni $\omega_1, \dots, \omega_n$ definite da $g_1\dots g_n\omega_1 = g_1, \dots, g_1\dots g_n\omega_n = g_n$ per ogni $g_1, \dots, g_n \in G$;

— tutte le operazioni n-arie prodotto di una n-aria unitaria per un endomorfismo di $\mathscr{G}$.

3 – Supponiamo ora che G sia un Ω-gruppo abeliano.

In questa ipotesi per la relazione $R_{A_1\dots A_n}$ $(A_i = G\varphi_i)$ definita in **2** a partire dall'operazione $g_1\dots g_n\bar{\omega} = g_1 + \dots + g_n$ valgono le condizioni (a), (b), (c) del Teorema 1. Quindi $R_{A_1\dots A_n}$ è una relazione invariante di G e quindi, per il Teorema 2, le operazioni ω^* di arità $n \geqslant 1$ del centralizzatore Ω^* sono tutte e solo quelle del tipo (1) con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ endomorfismi di G. Inoltre, essendo G abeliano, ogni operazione n-aria $\omega \in \Omega$ è del tipo $g_1 \dots g_n \omega = g_1 \psi_1 + \dots + g_n \psi_n$ $(g_i \in G)$ con $\psi_1, \dots, \psi_n$ endomorfismi del gruppo G^+ ([5]), quindi un endomorfismo φ di G è un endomorfismo del gruppo G^+ tale che $g_1 \psi_1 \varphi + \dots + g_n \psi_n \varphi = g_1 \varphi \psi_1 + \dots + g_n \varphi \psi_n$ e questa è equivalente alle $\varphi \psi_r = \psi_r \varphi$ per $r = 1, \dots, n$, come si vede ponendo uguali a zero tutti i g_i eccetto g_r.

Da quanto sopra segue che

Teorema 3. *Se G è un Ω-gruppo abeliano, allora le operazioni ω^* di arità $n \geqslant 1$ del centralizzatore Ω^* sono tutte e solo quelle del tipo* (1) *con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ endomorfismi del gruppo additivo G_+ permutabili con ogni endomorfismo ψ_r di G^+ che compare in qualche addendo di qualche operazione del sistema Ω.*

Quando ogni endomorfismo di G^+ compare in qualche addendo di qualche operazione del sistema Ω allora le operazioni n-arie ω^* $(n \geqslant 1)$ di Ω^* sono tutte e solo quelle del tipo (1) con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ elementi del centro dell'anello degli endomorfismi di G^+.

Osservazione. Si noti che, qualunque sia l'Ω-gruppo abeliano G, nel centralizzatore Ω^* ci sono sempre le operazioni n-arie ω^* $(n \geqslant 1)$ del tipo $g_1 \dots g_n \omega^* = k_1 g_1 + \dots + k_n g_n$ $(g_i \in G)$ con $k_1, \dots, k_n$ interi relativi prefissati.

4 – Supponiamo ora che G sia un Ω-gruppo distributivo.

Dal Teorema 2 segue che

Teorema 4. *Se G è un Ω-gruppo distributivo, allora le operazioni ω^* di arità $n \geqslant 1$ del centralizzatore Ω^* sono tutte e solo quelle del tipo* (1) *con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ endomorfismi di G tali che:*

(a)′ *la relazione $R_{A_1 \dots A_n}$ è una relazione invariante rispetto all'operazione $+$;*

(b)′ $g_1 \varphi_{s_1} \dots g_m \varphi_{s_m} \omega = 0$ *per ogni intero $m \geqslant 2$, per ogni operazione m-aria $\omega \in \Omega$, per ogni $g_1, \dots, g_m \in G$ e per ogni $s_1, \dots, s_m$ interi compresi fra uno ed m e non tutti uguali fra loro.*

Infatti, se ω^* è un'operazione di arità $n \geqslant 1$ appartenente a Ω^*, allora per il Teorema 2, ω^* è del tipo (1) con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ endomorfismi di G tali che la relazione $R_{A_1 \dots A_n}$ è invariante di G. In particolare per $R_{A_1 \dots A_n}$ vale la (c) del Teorema 1. In

---

([5]) Higgins [4] (pag. 383).

essa, se è $m \geqslant 2$, poniamo uguali a zero tutti gli elementi g_{rs} eccetto $g_{1s_1}, \ldots, g_{ms_m}$ con $s_1, \ldots, s_m$ non tutti uguali fra loro. Con questa scelta degli elementi g_{rs} si ha che in ogni riga della matrice $\|a_{rs}\|$ $(a_{rs} = g_{rs}\varphi_s)$ c'è al più un elemento diverso da zero, mentre in ogni colonna della matrice stessa c'è almeno un elemento uguale a zero. Allora dalla (c) del Teorema 1 segue $g_1\varphi_{s_1} \ldots g_m\varphi_{s_m}\omega = 0$ per ogni $s_1, \ldots, s_m$ interi compresi fra uno ed m e non tutti uguali fra loro.

Viceversa, se ω^* è un'operazione di arità $n \geqslant 1$ del tipo (1) con $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ endomorfismi di $\mathscr{G}$ tali che valgano le (a)' e (b)', allora dalla (a)' segue la (b) del Teorema 1 e dalla (b)' segue la (c) del Teorema 1 perchè $\mathscr{G}$ è distributivo. Pertanto per il Teorema 1 la relazione $R_{A_1 \ldots A_n}$ è invariante di $\mathscr{G}$ e quindi, per il Teorema 2, $\omega^* \in \Omega^*$.

Osservazione. Nel caso in cui il gruppo additivo $\mathscr{G}^+$ è abeliano la condizione (a)' del Teorema 4 è verificata, quindi, in particolare, si ha che *se* $\mathscr{G}$ *è un* Ω*-anello allora le operazioni* ω^* *di arità* $n \geqslant 1$ *del centralizzatore* Ω^* *sono tutte e solo quelle del tipo* (1) *con* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *endomorfismi di* $\mathscr{G}$ *tali che* $g_1\varphi_{s_1} \ldots g_m\varphi_{s_m}\omega = 0$ *per ogni intero* $m \geqslant 2$, *per ogni operazione* m*-aria* $\omega \in \Omega$, *per ogni* $g_1, \ldots, g_m \in G$ *e per ogni* $s_1, \ldots, s_m$ *interi compresi fra uno ed* m *e non tutti uguali fra loro.*

5 – In 2 abbiamo osservato che qualunque sia l'Ω-gruppo $\mathscr{G}$ nel centralizzatore Ω^* ci sono tutte le operazioni n-arie $(n \geqslant 1)$ prodotto di un'operazione n-aria unitaria per un endomorfismo di $\mathscr{G}$. Utilizzando il Teorema 4 esaminiamo ora alcuni casi di Ω-gruppi distributivi $\mathscr{G}$ per i quali si ha che ogni operazione n-aria con $n \geqslant 1$ del relativo centralizzatore è prodotto di una operazione n-aria unitaria per un endomorfismo di $\mathscr{G}$.

(a) Sia $\mathscr{G}$ un Ω-gruppo distributivo e sia ω un'operazione m-aria del sistema Ω con $m \geqslant 2$. Diremo che ciascuno degli elementi $g_1, \ldots, g_m \in G$ è un *divisore dello zero rispetto a* ω quando si ha $g_1 \neq 0, \ldots, g_m \neq 0$ e $g_1 \ldots g_m\omega = 0$.

Teorema 5. *Se* $\mathscr{G}$ *è un* Ω*-gruppo distributivo e se in* Ω *esiste un'operazione* ω *di arità* $\geqslant 2$ *rispetto alla quale non ci sono divisori dello zero, allora ogni operazione* $\omega^* \in \Omega^*$ *di arità* $n \geqslant 1$ *è prodotto di un'operazione* n*-aria unitaria per un endomorfismo di* $\mathscr{G}$.

Infatti, sia $\mathscr{G}$ un Ω-gruppo distributivo privo di divisori dello zero rispetto all'operazione m-aria $\omega \in \Omega$ $(m \geqslant 2)$ e sia ω^* un'operazione n-aria $(n \geqslant 1)$ del centralizzatore Ω^*; per il Teorema 4 ω^* è del tipo (1) con $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ endomorfismi di $\mathscr{G}$ soddisfacenti le (a)' e (b)'. Degli n endomorfismi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ al più uno può essere diverso da zero, perchè se fosse per esempio $\varphi_1 \neq 0$ e $\varphi_2 \neq 0$ allora, per la (b)', si avrebbe $g'_1\varphi_1 g'_2\varphi_2 g'_3\varphi_2 \dots g'_m\varphi_2\omega = 0$ per ogni $g'_1, \dots, g'_m \in G$, e quindi per qualche $g \in G$ e per qualche $g' \in G$ si avrebbe $g\varphi_1 \neq 0$, $g'\varphi_2 \neq 0$ e $g\varphi_1 g'\varphi_2 g'\varphi_2 \dots g'\varphi_2\omega = 0$, quindi $g\varphi_1$ sarebbe un divisore dello zero rispetto ad ω.

Osservazione. Dal Teorema 5 segue che *in un anello privo di divisori dello zero ogni operazione invariante è prodotto di una operazione unitaria per un endomorfismo dell'anello.*

Teorema 6. *Sia $\mathscr{G}$ un Ω-gruppo distributivo tale che:*

(a)″ *in Ω c'è un'operazione ω non degenere e di arità $m \geqslant 2$;*

(b)″ *ogni endomorfismo non nullo di $\mathscr{G}$ è un'applicazione di G su tutto G.*

In queste ipotesi ogni operazione $\omega^* \in \Omega^*$ di arità $n \geqslant 1$ è prodotto di un'operazione n-aria unitaria per un endomorfismo di $\mathscr{G}$.

Infatti, nelle suddette ipotesi un'operazione $\omega^* \in \Omega^*$ di arità $n \geqslant 1$, per il Teorema 4, è del tipo (1) con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ endomorfismi di $\mathscr{G}$ soddisfacenti le (a)' e (b)'. Degli n endomorfismi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ al più uno può essere diverso da zero, perchè se fosse per esempio $\varphi_1 \neq 0$ e $\varphi_2 \neq 0$ allora fissati comunque $g_1, \dots, g_m \in G$ per l'ipotesi (b)″ potremmo trovare $g'_1, \dots, g'_m \in G$ tali che $g_1 = g'_1\varphi_1, \dots, g_m = g'_m\varphi_2$ e quindi per la (b)' del Teorema 4 si avrebbe $g_1 \dots g_m\omega = g'_1\varphi_1 g'_2\varphi_2 \dots g'_n\varphi_2\omega = 0$ e quindi la ω sarebbe degenere contro l'ipotesi (a)″.

Dal Teorema 6 segue che

Teorema 7. *Sia $\mathscr{G}$ un Ω-gruppo distributivo semplice e finito. Se in Ω c'è un'operazione ω non degenere e di arità $m \geqslant 2$, allora ogni operazione $\omega^* \in \Omega^*$ di arità $n \geqslant 1$ è prodotto di un'operazione n-aria unitaria per un endomorfismo di $\mathscr{G}$.*

Infatti, poichè $\mathscr{G}$ non ha ideali propri ogni endomorfismo non nullo di $\mathscr{G}$ è un isomorfismo di $\mathscr{G}$ in $\mathscr{G}$, anzi, poichè $\mathscr{G}$ è finito, è un automorfismo di $\mathscr{G}$ e quindi è soddisfatta l'ipotesi (b)″ del Teorema 6.

Osservazione. Dai Teoremi 6 e 7 segue che

— *Se $\mathscr{G}$ è un anello non degenere tale che ogni endomorfismo di $\mathscr{G}$ è un'applicazione di G su tutto G, allora ogni operazione invariante è prodotto di una operazione unitaria per un endomorfismo di $\mathscr{G}$.*

— *In un anello non degenere, semplice e finito ogni operazione invariante è prodotto di una operazione unitaria per un endomorfismo dell'anello.*

6 – Vogliamo ora caratterizzare gli Ω-gruppi ad operazioni tutte invarianti, cioè gli Ω-gruppi $\mathscr{G}$ nei quali ogni operazione del sistema $\Omega \cup \{+, -, 0\}$ è un'operazione invariante di $\mathscr{G}$ (6). Si sa che gli Ω-gruppi ad operazioni tutte invarianti sono necessariamente abeliani perchè gli Ω-gruppi per i quali l'operazione $+$ è invariante sono tutti e solo gli Ω-gruppi abeliani (7).

Dal Teorema 3 segue facilmente che

Teorema 8. *Gli Ω-gruppi ad operazioni tutte invarianti sono tutti e solo gli Ω-gruppi abeliani $\mathscr{G}$ tali che se φ e ψ sono endomorfismi di $\mathscr{G}^+$ che compaiono in addendi di operazioni del sistema Ω allora essi sono permutabili* $(\varphi\psi = \psi\varphi)$.

Da questo teorema segue che

Teorema 9. *Sia $\mathscr{G}^+$ un gruppo additivo abeliano. Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni Ω-gruppo abeliano avente $\mathscr{G}^+$ come gruppo additivo sia ad operazioni tutte invarianti è che l'anello degli endomorfismi di $\mathscr{G}^+$ sia commutativo.*

Infatti, se ogni Ω-gruppo abeliano avente $\mathscr{G}^+$ come gruppo additivo è ad operazioni tutte invarianti, allora, in particolare, è ad operazioni tutte invarianti l'Ω-gruppo che ha $\mathscr{G}^+$ come gruppo additivo e ha come operazioni del sistema Ω tutti gli endomorfismi di $\mathscr{G}^+$ e quindi, per il Teorema 8, ogni endomorfismo di $\mathscr{G}^+$ è permutabile con ogni altro endomorfismo di $\mathscr{G}^+$, cioè l'anello degli endomorfismi di $\mathscr{G}^+$ è commutativo. Il viceversa è immediato.

Se $\mathscr{G}^+$ è periodico, poichè in questo caso l'anello degli endomorfismi di $\mathscr{G}^+$ è commutativo allora e solo quando $\mathscr{G}^+$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo moltiplicativo di tutte le radici dell'unità (8), si ha

---

(6) Gli Ω-gruppi che godono di questa proprietà sono detti *commutativi* da Plotkin in [8] (pag. 24), si veda anche Klukovits [5] (pag. 171).

(7) Micale [7].

(8) Fuchs [3] (pag. 218).

Teorema 10. *Se $\mathscr{G}^+$ è un gruppo additivo abeliano periodico, condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni Ω-gruppo abeliano avente $\mathscr{G}^+$ come gruppo additivo sia ad operazioni tutte invarianti è che $\mathscr{G}^+$ sia isomorfo ad un sottogruppo del gruppo moltiplicativo delle radici dell'unità.*

7 – Sia $\mathscr{A} = (A, \Omega)$ un'algebra col sistema Ω costituito da operazioni tutte di arità $\geqslant 2$ e dotata di una *identità* (9), cioè di un elemento 1 tale che per ogni $\omega \in \Omega$ e per ogni $a \in A$ si ha $1 \ldots 1 a 1 \ldots 1 \omega = a$ qualunque sia il posto occupato da a al primo membro.

Evidentemente *se $\mathscr{A}$ è totalmente commutativa allora $\mathscr{A}$ è ad operazioni tutte invarianti*; dimostriamo che

Teorema 11. *Se $\mathscr{A}$ è ad operazioni tutte invarianti allora $\mathscr{A}$ è totalmente commutativa e su A si può definire un'operazione binaria $*$ tale che $(A, *)$ sia un semigruppo abeliano con la stessa identità 1 e tale che per ogni $\omega \in \Omega$ n-aria e per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$ si abbia*

$$a_1 \ldots a_n \omega = a_1 * \ldots * a_n .$$

Infatti, supponiamo che $\mathscr{A}$ sia ad operazioni tutte invarianti. Cominciamo col provare che $\mathscr{A}$ è commutativa. Sia ω una qualunque operazione n-aria del sistema Ω, siano $a_1, \ldots, a_n \in A$ e sia $i \in \{2, \ldots, n\}$. Poichè ω è invariante rispetto a se stessa si ha $(\omega C)\omega = \omega(C\omega)$, essendo $C = \|c_{rs}\|$ con $c_{1i} = a_i$, $c_{i1} = a_1$, $c_{rr} = a_r$ per $r \neq 1, i$ e $c_{rs} = 1$ in tutti gli altri casi. Ne segue che $a_1 \ldots a_n \omega = a_i a_2 \ldots a_{i-1} a_1 a_{i+1} \ldots a_n \omega$ per $i = 2, \ldots, n$ e da questa si deduce facilmente che ω è commutativa. Quindi l'algebra $\mathscr{A}$ è commutativa.

Siano ora $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ con ω_1 di arità n e ω_2 di arità m, e siano $a_1, \ldots, a_{n+m-1}$ elementi qualunque di A. Poichè ω_1 è invariante rispetto a ω_2 si ha $\omega_2(C' \omega_1) = (\omega_2 C')\omega_1$ essendo $C' = \|c'_{rs}\|$, con $c'_{r1} = a_r$ per $r = 1, \ldots, m$, $c'_{ms} = a_{m+s-1}$ per $s = 1, \ldots, n$ e $c'_{rs} = 1$ in tutti gli altri casi. Ne segue che

$$a_1 \ldots a_{n+m-1} \omega_1 \omega_2 = a_1 \ldots a_m \omega_2 a_{m+1} \ldots a_{n+m-1} \omega_1 . \tag{2}$$

Dalla (2) segue che per ogni intero $j = 2, \ldots, n+m-1$ si ha

$$a_1 \ldots a_{n+m-1} \omega_1 \omega_2 = a_j a_2 \ldots a_{j-1} a_1 a_{j+1} \ldots a_{n+m-1} \omega_1 \omega_2 , \tag{3}$$

(9) In Kurosh [6] (pag. 10), è data un'analoga definizione nel caso di un Ω-anello.

cioè a_1 può essere permutato con ogni a_j per $j=2,\dots,n+m-1$. Infatti, poichè ω_2 è commutativa, a_1 può essere permutato con ogni a_j per $j=2,\dots,n$; in particolare a_1 può essere permutato con a_m ed inoltre, poichè ω_1 è commutativa, a_m può essere permutato con ogni a_j per $j=m+1,\dots,n+m-1$, quindi a_1 può essere permutato con ogni a_j per $j=m+1,\dots,n+m-1$. Pertanto vale la (3) per ogni intero $j=2,\dots,n+m-1$.

Ne segue che l'elemento $a_1,\dots,a_{n+m-1}\omega_1\omega_2$ non dipende dall'ordine in cui sono scritti $a_1,\dots,a_{n+m-1}$.

Da ciò e dalla (3) segue anche che

$$a_1\dots a_{n+m-1}\,\omega_1\,\omega_2 = a_1\dots a_{n+m-1}\,\omega_2\,\omega_1\ . \tag{4}$$

Infatti, tenendo presente che ω_1 è commutativa, si ha

$$a_1\dots a_{n+m-1}\,\omega_1\,\omega_2 = a_1\dots a_m\,\omega_2\,a_{m+1}\dots a_{n+m-1}\,\omega_1\ .$$

$$= a_{m+1}\dots a_{n+m-1}\,a_1\dots a_m\,\omega_2\,\omega_1 = a_1\dots a_{n+m-1}\,\omega_2\,\omega_1\ .$$

Proviamo ora che l'algebra $\mathscr{A}$ è associativa. Infatti, per ogni intero $i=1,\dots,m-1$, in virtù delle (2), (3) e (4), si ha

$$a_1\dots a_{n+m-1}\,\omega_1\,\omega_2 = a_i\dots a_{i+n-1}\,a_1\dots a_{i-1}\,a_{i+n}\dots a_{n+m-1}\,\omega_2\,\omega_1$$

$$= a_i\dots a_{i+n-1}\,\omega_1\,a_1\dots a_{i-1}\,a_{i+n}\dots a_{n+m-1}\,\omega_2$$

$$= a_1\dots a_{i-1}(a_i\dots a_{i+n-1}\,\omega_1)\,a_{i+n}\,a_{n+m-1}\,\omega_2\ .$$

Poichè l'algebra $\mathscr{A}$ è associativa, procedendo come in Kurosh [6] (§ 6 pag. 10), si dimostra che per ogni $a_1,\ a_2 \in A$ l'elemento $a_1 a_2 1\dots 1\omega$ è indipendente dalla scelta di ω in Ω. Allora, poichè $\mathscr{A}$ è anche commutativa, ponendo $a_1 * a_2 = a_1 a_2 1\dots 1\omega$ per ogni $a_1, a_2 \in A$, $(A, *)$ risulta un semigruppo abeliano e con identità 1. Inoltre, per ogni $\omega\in\Omega$ di arità n e per ogni $a_1,\dots,a_n \in A$ si ha $a_1\dots a_n\omega = a_1 * \dots * a_n$. Da ciò segue facilmente che l'algebra $\mathscr{A}$ è totalmente commutativa.

Bibliografia

[1] P. M. Cohn, *Universal algebra*, Harper and Row, New York, 1965.

[2] G. Dantoni, *Relazioni invarianti di un'algebra universale ed algebre col sistema di operazioni completo rispetto ad una famiglia di relazioni invarianti*, Matematiche (Catania) XXIV (1969), 187-217.

[3] L. FUCHS, *Abelian groups*, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1958.

[4] P. J. HIGGINS, *Groups with multiple operators*, Proc. London Math. Soc. VI (1956), 366-416.

[5] L. KLUKOVITS, *On commutative universal algebras*, Acta Scient. Math. 34 (1973), 171-174.

[6] A. G. KUROSH, *Multioperator rings and algebras*, Russian Math. Surveys, 24: 1 (1969), 1-13.

[7] B. MICALE, *Relazioni invarianti di un'algebra: caratterizzazioni di Ω-gruppi*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena XXXII (1983), 367-378.

[8] B. I. PLOTKIN, *Groups of automorphisms of algebraic systems*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1972.

[9] R. STRANO, *Su alcune proprietà degli Ω-anelli associativi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino 36 (1977-78), 87-102.

Summary

In this paper we characterize the centralizer of the system of all operations of an Ω*-group. We give some applications of this result. Furthermore we study the algebras* (A, Ω) *with identity such that every operation of* Ω *has arity* ≥ 2 *and belongs to the centralizer of* Ω.

* * *