Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 35-40

EZIAMARIA ARAGNO MARAUTA (*)

# Sulla superiore immergibilità di particolari grafi (**)

1 – In una recente Nota [4] è stato esaminato il problema dell'additività del genere massimo di un grafo connesso $\Phi_2$, ottenuto dalla composizione di due dati grafi nel modo seguente

$$\Phi_2 = (G_1 - \{g_1\}) \cup (G_2 - \{g_2\}) \cup \{R_1, H_2\} \cup \{S_1, K_2\}$$

ove $G_1$ e $G_2$ sono grafi finiti e connessi, $g_1 = \{R_1, S_1\}$ e $g_2 = \{H_2, K_2\}$ sono spigoli appartenenti rispettivamente a $G_1$ e a $G_2$ e tali che almeno uno dei due non sia un istmo.

Sempre nella stessa Nota si sono stabilite delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè dalla superiore immergibilità di $G_1$ e $G_2$ discenda quella di $\Phi_2$ e viceversa.

Nel presente lavoro, dopo l'introduzione di alcuni fondamentali richiami (v. 2), la ricerca precedente viene estesa al grafo connesso $\Phi_d$ $(d \geq 3)$, definito per ricorrenza nel modo seguente

$$\Phi_d = (\Phi_{d-1} - \{\varphi_{d-1}\}) \cup (G_d - \{g_d\}) \cup \{R_{d-1}, H_d\} \cup \{S_{d-1}, K_d\}$$

ove: $G_d$ è un grafo connesso, $\varphi_{d-1} = \{R_{d-1}, S_{d-1}\}$ e $g_d = \{H_d, K_d\}$ sono spigoli appartenenti rispettivamente a $\Phi_{d-1}$ e a $G_d$ tali che almeno uno dei due non sia un istmo (v. 3).

Il grafo $\Phi_d$ risulta così ottenuto da una particolare composizione di $d$ dati grafi connessi $G_i$ $(1 \leq i \leq d)$.

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).
Ricevuto: 21-VI-1984.

Si esprimono, inoltre, delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè dalla superiore immergibilità dei $G_i$ ($1 \leq i \leq d$) discenda quella di $\Phi_d$ e viceversa (v. **4**).

**2** – Sia $G$ un grafo finito, connesso ([1]).

Si definisce *genere massimo* $\gamma_M(G)$ di $G$ il massimo dei generi delle superficie compatte connesse chiuse orientabili nelle quali $G$ ha un'immersione cellulare ([2]).

Si dice che $G$ è *superiormente immergibile* se è soddisfatta l'uguaglianza

$$(1) \qquad \gamma_M(G) = \left[\frac{\beta(G)}{2}\right] \quad (^3)$$

ove $\beta(G) = \alpha^1 - \alpha^0 + 1$ ($\alpha^1$ numero degli spigoli, $\alpha^0$ numero dei vertici di $G$) è il *numero di Betti* di $G$.

Si chiama *istmo* uno spigolo di $G$, la cui soppressione aumenta il numero di componenti connesse di $G$.

Si definisce *coalbero* di $G$ il grafo complementare di un'impalcatura di $G$ ([4]). Ad ogni coalbero $C$ di $G$ si associa il numero $\lambda(C)$ delle componenti connesse dispari di $C$ ([5]).

Si denomina *deficienza di Betti* di $G$ il parametro

$$\lambda(G) = \min_{C \subset G} \lambda(C) .$$

Si dice che $C$ è un *coalbero minimale* di $G$ quando $\lambda(G) = \lambda(C)$. Vale l'uguaglianza [**6**]

$$(2) \qquad \gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - \lambda(G)}{2} .$$

Dalle relazioni (1) e (2) si deduce il seguente

Teorema. *$G$ è superiormente immergibile se e solo se $\lambda(G) = 0$ o $\lambda(G) = 1$, a seconda che $\beta(G)$ sia un numero pari o un numero dispari.*

Sia $\Sigma$ una superficie orientabile di genere $\mu$. Uno spigolo $s$ di $G$ è *$\mu$-regolare* se esiste un'immersione cellulare $I$ di $G$ in $\Sigma$ tale che $s$ compaia sul contorno di due regioni distinte di $I$.

---

([1]) Per la teoria generale dei grafi si fa riferimento ai trattati [3] e [5].

([2]) Per la topologia delle superficie compatte si fa riferimento al trattato [12].

([3]) Con $[x]$ si rappresenta il massimo intero non superiore a $x$.

([4]) Per *impalcatura* di $G$ si intende un sottografo che è un albero ed ha gli stessi vertici di $G$.

([5]) Una componente connessa di $C$ è dispari o pari a seconda che sia dispari o pari il numero dei suoi spigoli.

3 – D'ora in avanti si prenderanno in considerazione i grafi, definiti in **1**, denominati rispettivamente $\Phi_d$ e $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$.

Proposizione 1. *I generi massimi di* $\Phi_d$ *e di* $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ *soddisfano la relazione*

$$\gamma_M(\Phi_d) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_M(G_i) - k \qquad 0 \leqslant k \leqslant d-1\,,$$

*ove* $d-k-1$ *è il numero delle coppie di spigoli* $(\varphi_i - 1,\ g_i)$ *(con* $2 \leqslant i \leqslant d$, $\varphi_1 = g_1$, $\varphi_{i-1} = \{R_{i-1},\ S_{i-1}\}$ $(i \neq 2)$ *e* $g_i = \{H_i,\ K_i\}$*) tali che in ciascuna di esse almeno uno dei due spigoli sia* $\gamma_M$*-regolare.*

Per la dimostrazione basta procedere per ricorrenza, tenendo presenti la Proposizione 1 e la Proposizione 2 del n. 2 della Nota [4].

Proposizione 2. *I numeri di Betti di* $\Phi_d$ *e di* $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ *soddisfano la relazione*

$$\beta(\Phi_d) = \sum_{i=1}^{d} \beta(G_i) - d + 1\,.$$

Si omette la semplice dimostrazione.

Proposizione 3. *Le deficienze di Betti di* $\Phi_d$ *e di* $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ *soddisfano la relazione*

$$\lambda(\Phi_d) = \sum_{i=1}^{d} \lambda(G_i) + 2k - d + 1\,.$$

Per ogni grafo connesso $G$ vale la relazione (2). Si deduce

$$2\sum_{i=1}^{d} \gamma_M(G_i) = \sum_{i=1}^{d} \beta(G_i) - \sum_{i=1}^{d} \lambda(G_i)\,. \tag{3}$$

Per la Proposizione 1 e la Proposizione 2 l'uguaglianza (3) può essere scritta nella forma

$$2\gamma_M(\Phi_d) + 2k = \beta(\Phi_d) + d - 1 - \sum_{i=1}^{d} \lambda(G_i)\,,$$

ovvero

$$2\gamma_M(\Phi_d) = \beta(\Phi_d) - [\sum_{i=1}^{d} \lambda(G_i) + 2k - d + 1]\,.$$

Poichè vale la relazione (2), risulta

$$\lambda(\Phi_d) = \sum_{i=1}^{d} \lambda(G_i) + 2k - d + 1 \ .$$

4 – Lemma. *Se $h$ $(0 \leqslant h \leqslant d)$ è il numero dei grafi $G_i$ per i quali $\beta(G_i)$ è pari, $\beta(\Phi_d)$ è dispari se e solo se $h$ è pari.*

Si omette la semplice dimostrazione.

Proposizione 4. *Sia $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ superiormente immergibile e sia $h$ $(0 \leqslant h \leqslant d)$ il numero dei grafi $G_i$ per i quali $\beta(G_i)$ è pari. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\Phi_d$ sia superiormente immergibile è che sussista la relazione $k = [h/2]$* (6).

*Condizione necessaria.* Essendo $\Phi_d$ superiormente immergibile, si ha

$$\lambda(\Phi_d) = \sum_{i=1}^{d} \lambda(G_i) + 2k - d + 1 = \begin{matrix} 1 & \text{se } h \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } h \text{ è dispari.} \end{matrix} \tag{4}$$

Si deduce

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda(G_i) = \begin{matrix} d - 2k & \text{se } h \text{ è pari} \\ d - 2k - 1 & \text{se } h \text{ è dispari.} \end{matrix} \tag{5}$$

Poichè $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ è superiormente immergibile, risulta

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda(G_i) = d - h \tag{6}$$

e di conseguenza

$$d - 2k = d - h \qquad \text{se } h \text{ è pari} \tag{7}$$

$$d - 2k - 1 = d - h \qquad \text{se } h \text{ è dispari.} \tag{8}$$

Le uguaglianze (7) e (8) implicano $k = [h/2]$.

---

(6) v. nota (3).

*Condizione sufficiente.* Vale la relazione (6) ed inoltre si ha $k=[h/2]$. Si deduce

$$\lambda(\Phi_d)=\sum_{i=1}^{d}\lambda(G_i)+2k-d+1=\begin{array}{ll} d-h+h-d+1=1 & \text{se } h \text{ è pari} \\ d-h+h-1-d+1=0 & \text{se } h \text{ è dispari.}\end{array}$$

Pertanto, $\Phi_d$ è superiormente immergibile.

Proposizione 5. *Sia $\Phi_d$ superiormente immergibile e sia $h=0{,}1$ il numero dei grafi $G_i$ per i quali $\beta(G_i)$ è pari. Allora, ogni $G_i$ $(1\leqslant i\leqslant d)$ è superiormente immergibile.*

Vale la relazione (5). Poichè, inoltre, sussiste la diseguaglianza $\sum_{i=1}^{d}\lambda(G_i)\geqslant d-h$, risulta

$$d-2k\geqslant d \qquad \text{se } h=0 \tag{9}$$

$$d-2k-1\geqslant d-1 \qquad \text{se } h=1. \tag{10}$$

Essendo $k$ un numero non negativo, le diseguaglianze (9) e (10) implicano $k=0$ e di conseguenza

$$\sum_{i=1}^{d}\lambda(G_i)=\begin{array}{ll} d & \text{se } h=0 \\ d-1 & \text{se } h=1.\end{array}$$

Pertanto, $G_i$ $(1\leqslant i\leqslant d)$ è superiormente immergibile.

Proposizione 6. *Sia $\Phi_d$ superiormente immergibile e sia $h$ $(2\leqslant h\leqslant d)$ il numero dei grafi $G_i$ per i quali $\beta(G_i)$ è pari. Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni $G_i$ sia superiormente immergibile è che sussista la relazione $k=[h/2]$.*

*Condizione necessaria.* v. condizione necessaria della Proposizione 4.

*Condizione sufficiente.* Vale la relazione (4).

Poichè $k=[h/2]$, risulta $\sum_{i=1}^{d}\lambda(G_i)=d-h$. Pertanto, $G_i$ $(1\leqslant i\leqslant d)$ è superiormente immergibile.

I risultati ottenuti si possono applicare ai grafi cubici hamiltoniani, dotati di $d$ classi di concatenazione. Essi forniscono esempi di grafi $\Phi_d$ e i loro grafi semplici sono i $G_i$ $(1\leqslant i\leqslant d)$.

## Bibliografia

[1] A.Andreatta, *Alcuni sviluppi sulla teoria relativa dei singrammi finiti*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **65** (1964), 1-25.

[2] J. Battle, F. Harary, Y. Kodama and J. W. T. Youngs, *Additivity of the genus of a graph*, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 565-568.

[3] C.Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1974.

[4] G.Cantalupi Tazzi e E. Aragno Marauta, *Sul genere massimo di particolari grafi*, Boll. Un. Mat. Ital. (6) 2-B (1983), 857-866.

[5] F.Harary, *Graph theory*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1969.

[6] C.H. C. Little and R. D. Ringeisen, *On additivity for maximum genus of a graph*, Discrete Math. **21** (1978), 69-74.

[7] E.A. Nordhaus, R. D. Ringeisen, B. M. Stewart and A. T. White, *A Kuratowski-type for the maximum genus of a graph*, J. Combin. Theory **12** (1972), 260-267.

[8] E.A. Nordhaus, B. M. Stewart and A. T. White, *On the maximum genus of a graph*, J. Combin. Theory Ser. B **11** (1971), 258-267.

[9] C.Payan and N. H. Xuong, *Upper embeddability and connectivity of graphs*, Discrete Math. **27** (1979), 71-80.

[10] R.D. Ringeisen: $[\bullet]_1$ *Upper and lower embeddable graphs, in graph theory and applications*, Berlin (1972), 261-268; $[\bullet]_2$ *Survey of results on the maximum genus of a graph*, J. Graph Theory **3** (1979), 1-13.

[11] A.G. S. Ventre, *Sulla superiore immergibilità di grafi costituiti da blocchi superiormente immergibili*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12** (1975), 388-397.

[12] A.T. White, *Graphs, groups and surfaces*, North-Holland Pubbl. Comp., Amsterdam, 1973.

[13] N.H. Xuong: $[\bullet]_1$ *Sur les immersions d'un graphe dans les surfaces orientables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), 745-747; $[\bullet]_2$ *Sur quelques classes de graphes possédant des propriétés topologiques remarquables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** A (1976), 813-816; $[\bullet]_3$ *How to determine the maximum genus of a graph*, J. Combin. Theory Ser. B **26** (1979), 217-225; $[\bullet]_4$ *Upper-embeddable graphs and related topics*, J. Combin. Theory Ser. B **26** (1979), 226-232.

## Summary

*In this Note are generalized the results shown in the paper* [4].

* * *