Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 31-34

GIORDANO GALLINA (*)

Generalizzazioni di quasi-anelli fortemente monogeni (**)

1 - Introduzione

Scopo del lavoro è costruire esempi di quasi-anelli sottodirettamente irriducibili, tutti i cui quozienti propri sono isomorfi ad un quasi-corpo, continuando in un certo senso le ricerche di [4].

Allo scopo, generalizzando un metodo di [2], se ad un gruppo di automorfismi di un gruppo G, avente traiettorie principali, si aggiunge un opportuno endomorfismo di G, si genera un gruppo di endomorfismi di G, che in diversi casi serve come «guida» per la definizione di una particolare operazione di prodotto $\cdot$ sopra G in modo da ottenere quasi-anelli $[G; +, \cdot]$ che ricordano i quasi-anelli planari.

Con l'applicazione di questa tecnica perveniamo ad una costruzione che permette tra l'altro di asserire che se p è un primo dispari e C un quasi-corpo di ordine p^m, il numero dei quasi-anelli non isomorfi sottodirettamente irriducibili N, aventi come sostegno $(\boldsymbol{Z}_{p^n})^m$, e tali che il quoziente di N rispetto al proprio radicale nil sia isomorfo a C, tende all'infinito con n.

2 - Costruzioni

Siano G un gruppo, Φ un suo gruppo di automorfismi, f un suo endomorfismo nilpotente permutabile con tutti gli elementi di Φ. Sia n il minimo intero, tale che $f^n = 0$.

Poniamo $f^0 = \mathrm{id}_G$, $\quad f^i(G) = G_i$.

Supponiamo che sia $G_{i+1} \subseteq G_i \quad \forall i = 0, \ldots, n-1$. Chiamiamo Φ_i la restrizione di Φ a G_i.

Supponiamo che Φ_i abbia un insieme T_i di traiettorie principali contenute in $G_i \setminus G_{i+1} \quad (i = 0, \ldots, n-1)$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro parzialmente finanziato da fondi M.P.I. — Ricevuto: 12-VI-1984.

Supponiamo che f mandi traiettorie di T_i in traiettorie di T_{i+1}, ed inoltre risulti

$f^{-1}(\bigcup_{t_{i+1}\in T_{i+1}} t_{i+1}) = \bigcup_{t_i\in T_i} t_i$.

Sia X un insieme di rappresentanti delle traiettorie di T_0. Scegliamo X in modo tale che, per $i = 0, \ldots, n-1$, ogni traiettoria di T_i contenga uno ed uno solo elemento di $f^i(X)$ (in base alle nostre ipotesi, questa scelta è possibile).

Per ogni i sia $[G_i; +, o_i]$ il quasi-anello costruito su G_i secondo [2] partendo dal gruppo Φ_i e dall'insieme (di unità sinistre) $f^i(X)$.

Se $a \in G$, sia i il massimo intero (certamente esistente, per la nilpotenza di f) tale che $a \in G_i$. Poniamo $\forall x \in G \quad a\cdot x = a o_i f^i(x)$.

Teorema 1. *La struttura* $[G; +, \cdot]$ *è un quasi-anello (ovviamente zero-simmetrico).*

Grazie alle posizioni e alle ipotesi precedenti, è sufficiente mostrare l'associatività del prodotto.

A tale scopo, sia $a_0 \in G$. Mostriamo dapprima che

$$(1) \qquad \forall x \in G \quad \forall i \leqslant n-1, \quad f^i(a_0 x) = a_0 f^i(x), \quad f^i(a_0)\, x = a_0\, f^i(x).$$

Se a_0 divide lo zero a sinistra in $[G; +, o_i]$ entrambi i membri delle (1) sono uguali a zero, poichè allora $f^i(a_0)$ divide lo zero a sinistra in $[G_i; +, o_i]$.

Supponiamo che a_0 non divida lo zero a sinistra in $[G; +, o_0]$.

La prima delle (1) si ottiene subito ricordando che la f è permutabile con tutti gli elementi di Φ.

Allo scopo di provare la seconda delle (1), sia ε l'unità sinistra della traiettoria principale di Φ_0 a cui appartiene a_0, e sia h l'unico elemento di Φ_0 tale che $h(\varepsilon) = a_0$.

Poichè f è permutabile con h, risulta $h(f^i(\varepsilon)) = f^i(h(\varepsilon)) = f^i(a_0)$.

Dunque, la restrizione di h a G_i è l'unico elemento di Φ_i che manda $f^i(\varepsilon)$ in $f^i(a_0)$.

Per le nostre definizioni pertanto risulta $f^i(a_0)\cdot x = h(f^i(x)) = a_0\cdot f^i(x)$, da cui la seconda delle (1).

Ciò posto, mostriamo che per $a, b, c \in G$ è $(ab)\,c = a(bc)$.

Se $aG = 0$, l'uguaglianza è banale. Se $bG = 0$, entrambi i membri sono nulli, a causa della particolare scelta delle unità sinistre rispetto alle operazioni o_i.

Supponiamo che $aG \neq 0 \neq bG$. Siano i, j i massimi interi tali che $a \in G_i$, $b \in G_j$.

Da (1) e dalle posizioni iniziali risulta che possiamo scegliere a_0 e b_0 in $G \backslash G_1$ in modo che $f^i(a_0) = a$, $f^j(b_0) = b$; allora $ax = a_0 f^i(x)$ e $bx = b_0 f^j(x) \quad \forall x \in G$, per le (1).

Pertanto $a(bc) = a(b_0 f^j(c)) = a_0(f^i(b_0 f^j(c))) = (a_0\, b_0)\, f^{i+j}(c)$.

D'altra parte $(ab)c = (f^i(a_0) \cdot b) \cdot c = (a_0 f^i(b))c = f^i(a_0 b) \cdot c = f^i(a_0 f^j(b_0)) \cdot c = f^i(f^j(a_0 b_0)) \cdot c = f^{i+j}(a_0 b_0) \cdot c = (a_0 b_0) \cdot f^{i+j}(c)$, per le stesse proprietà usate poco sopra. Ne segue l'asserto.

3 - Applicazioni

Corollario 2. *Sia p un primo dispari e sia C un quasi-corpo di ordine p^m. Il numero dei quasi-anelli non isomorfi sottodirettamente irriducibili, aventi come sostegno $(\boldsymbol{Z}_{p^n})^m$ il cui quoziente rispetto al radicale nil* (1) *sia isomorfo a C, è maggiore o uguale a n^2.*

Sia B_1 il gruppo di automorfismi di C^+, avente per elementi le corrispondenze non nulle $x \to bx$ di C. Sia G_n^+ il gruppo $(\boldsymbol{Z}_{p^n})^m$. In base all'Osservazione 6 di [3], esiste un gruppo B_n di automorfismi di G_n^+, privo di coincidenze non nulle e simile a B_1 sopra ogni quoziente non banale $p^i G_n^+/p^{i+1} G_n^+$.

Per $i = 0, \ldots, n-1$, sia Φ il gruppo di automorfismi di G_n^+ generato da B_n e dall'automorfismo $x \to (1+p)^{p^i} x$, e sia g l'endomorfismo di G_n^+ definito dalla $x \to px$.
Ovviamente, tutti gli automorfismi di G_n^+ sono permutabili con g. Per $j \neq 0$, poniamo $f = g^j$. Consideriamo l'insieme T delle traiettorie di Φ contenute in $G_n^+ \setminus pG_n^+$ (2). Sia n_j il minimo intero tale che $f^{n_j} = 0$. Posto $f^k(G_n^+) = G_{(k)}^+$, risulta che Φ tiene fermi tutti i sottogruppi $G_{(k)}^+$.

Indichiamo con $\Phi^{(k)}$ la restrizione di Φ a $G_{(k)}^+$.

Consideriamo l'insieme T_k delle traiettorie principali di $\Phi^{(k)}$ contenute in $G_{(k)}^+ \setminus pG_{(k)}^+$ $(k = 0, 1, \ldots, n_j - 1)$. Risulta che f manda traiettorie di T_k in traiettorie di T_{k+1}, ed inoltre è $f^{-1}(\bigcup_{t_{k+1} \in T_{k+1}} t_{k+1}) = \bigcup_{t_k \in T_k} t_k$.

Pertanto tutte le premesse del Teorema 1 sono verificate.

In base a tale Teorema si determina un quasi-anello $G_n^{(i,j)}$ sopra G_n^+. Il radicale nil di $G_n^{(i,j)}$ è $pG_n^{(i,j)}$ come risulta subito dal fatto che ogni elemento di $pG_n^{(i,j)}$ è nilpotente, e dal fatto che ogni elemento di $G_n^{(i,j)}/pG_n^{(i,j)}$ non divide lo zero a sinistra. Inoltre $G_n^{(i,j)}/pG_n^{(i,j)}$ è isomorfo a C.

Al variare di $\langle i, j \rangle$ in $\{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, si determinano n^2 quasi-anelli, il quoziente di ognuno dei quali rispetto al proprio radicale nil è isomorfo a C. Questi, sono due a due non isomorfi.

---

(1) Il *radicale nil* di un quasi-anello è definito come somma degli ideali di N tutti i cui elementi sono nilpotenti.

(2) Sono tutte principali, come discende facilmente dal fatto che, per $a \in G_n^+ \setminus pG_n^+$, la traiettoria H_1 di B_n rappresentata da a e la traiettoria H_2, del gruppo generato dall'automorfismo $x \to (1+p)^{p^i} x$, sono principali ed è $H_1 \cap H_2 = a$.

Consideriamo infatti $G_n^{(i_1,j_1)}$ e $G_n^{(i_2,j_2)}$, con $\langle i_1, j_1\rangle \neq \langle i_2, j_2\rangle$. Sia $i_1 \neq i_2$ e sia a un qualunque elemento di $G_n^+ \backslash pG_n^+$. Il numero degli elementi del tipo xa contenuti in $G_n^+ \backslash pG_n^+$, è in $G_n^{(i_1,j_1)}$, $(p^n - 1)p^{n-1-i_1}$, mentre in $G_n^{(i_2,j_2)}$ è $(p^n - 1)p^{n-1-i_2}$. Pertanto $G_n^{(i_1,j_1)}$ non è isomorfo a $G_n^{(i_2,j_2)}$.
Se $j_1 \neq j_2$, si procede analogamente.

Inoltre, un qualunque $G_n^{(i,j)}$ è sottodirettamente irriducibile, in quanto i suoi ideali sono elementi della catena $0 \subset p^{n-1} G_n^{(i,j)} \subset \ldots \subset G_n^{(i,j)}$.

Teorema 3. *Sia C un quasi-corpo di ordine p^m (p dispari). Esistono almeno sei quasi-anelli sottodirettamene irriducibili due a due non isomorfi, tutti i cui quozienti propri sono isomorfi a C.*

Consideriamo il gruppo $G_2^+ = (\mathbf{Z}_{p^2})^m$. Mediante il Teorema 1 sopra esso si determinano quattro quasi-anelli non isomorfi, soddisfacenti alle condizioni dell'enunciato.

Costruiamo un quasi-anello $[N_1; +, \cdot]$, in cui $N_1^+ = C^+ \times C^+$ ed il prodotto è definito da $\langle a, b\rangle \langle c, d\rangle = \langle ac, bd\rangle$ se $a \neq 0$, $\langle 0, b\rangle \langle c, d\rangle = \langle 0, bc\rangle$.

L'unico ideale proprio di N_1 è $O \times C$ ed $N_1/(O \times C)$ è isomorfo al quasi-corpo C.

Sia A il gruppo di automorfismi di $C^+ \times C^+$ costituito dalle corrispondenze $\langle x, y\rangle \to \langle bx, by\rangle$ $b \neq O$, $b \in C$. Si fissi un $c \neq O$, $c \in C$.

Costruiamo un quasi-anello fortemente monogeno N_2, sopra $C^+ \times C^+$, con il metodo di [1], prendendo: (1) come insieme delle unità sinistre $\{c\} \times C$, (2) come gruppo di automorfismi di $C^+ \times C^+$ il gruppo A.

L'unico ideale proprio di N_2 è $O \times C$ ed $N_2/(O \times C)$ è isomorfo a C. Il quasi-anello N_2 non è isomorfo ad N_1, in quanto N_1 non è fortemente monogeno. Segue la tesi.

Bibliografia

[1] C. Cotti Ferrero e M. G. Rinaldi, *Sugli stems i cui ideali sinistri (destri) propri sono massimali,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 23-33.

[2] G. Ferrero, *Classificazione e costruzione degli stems p-singolari,* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **102** (1968), 597-613.

[3] G. Gallina, *Sui radicali di un S-quasi-anello,* Boll. Un. Mat. Ital. (in corso di stampa).

[4] S. Pellegrini, *Sui quasi-anelli a quozienti propri quasi-corpi,* Boll. Un. Mat. Ital. (6) 1 B (1982), 187-195.

[5] G. Pilz, *Near-rings,* North-Holland, 1977

Summary

We generalize the method of trajectories for the construction of strongly uniform near-rings.