Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 409-421

MARIO DE SALVO (*)

Su le potenze ad esponente intero in un ipergruppo e gli r-ipergruppi (**)

Introduzione

Ricordiamo alcune definizioni ed alcune proprietà di carattere introduttivo.

Se A è una parte non vuota di un semi-ipergruppo $H = \langle H, \circ \rangle$, A è *completa* se $\forall n \in N^*$ e $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H^n$ tale che $\circ \prod_{i=1}^{n} x_i \cap A \neq \emptyset$, allora $\circ \prod_{i=1}^{n} x_i \subset A$.

Si dice *chiusura completa* di A in H e si denota con $\mathscr{C}_H(A)$, l'intersezione delle parti di H che sono complete e contengono A. Se $A = \{x\}$, scriviamo $\mathscr{C}_H(x)$ invece di $\mathscr{C}_H(\{x\})$.

Se B è una parte non vuota di un ipergruppo H, allora $\mathscr{C}_H(B) = \bigcup_{b \in B} \mathscr{C}_H(b)$. Se B è un iperprodotto, allora $\mathscr{C}_H(B) = \mathscr{C}_H(x)$ $\forall x \in B$.

Viene denotata con β_H^* la chiusura transitiva della relazione β_H così definita: $x \beta_H\, y$ se, e solo se $\exists n \in N^*$, $\exists (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in H^n$ tale che $\{x, y\} \subset \circ \prod_{i=1}^{n} z_i$.

È noto (vedi [**9**]) che la relazione $x \mathscr{C}_H y$ se, e solo se, $x \in \mathscr{C}_H(y)$ è una equivalenza ed inoltre $\beta_H^* = \mathscr{C}_H$.

Si indica con $\varphi \colon H \to H/\beta_H^*$ la proiezione canonica; se H è un ipergruppo, allora H/β_H^* è un gruppo e quindi ha senso definire il *cuore* di H come nucleo di φ e lo si denota ω_H.

Per ogni elemento x di un ipergruppo H, si dimostra che $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \mathscr{C}_H(x)$. Inoltre, se B è una parte non vuota di un ipergruppo H, si ha $B \circ \omega_H = \omega_H \circ B = \mathscr{C}_H(B)$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via C. Battisti 90, 98100 Messina, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.) —Ricevuto: 24-IX-1984.

Un ipergruppo H è *completo* se $\forall (x, y) \in H^2$ $x \circ y = \mathscr{C}_H(x \circ y)$.

Un ipergruppo H è *regolare* se ha almeno una identità bilatera e ogni elemento ha almeno un inverso bilatero [**3**]$_1$.

Se S è una parte non vuota di un ipergruppo H, si denota con $\langle S \rangle$ il più piccolo sotto-ipergruppo parte completa di H, contenente S. In particolare, diciamo che H è *fortemente ciclico*, con generatore x, se $H = \langle \{x\} \rangle$.

Un semi-ipergruppo H si dice *r-semiipergruppo*, con $r \in N^*$, se $\forall x \in H$ si ha $|\mathscr{C}_H(x)| = r$.

In **1** si introducono le potenze ad esponente nullo o intero negativo in un ipergruppo e si mettono in luce numerose proprietà che le riguardano. Quindi si dà una condizione necessaria e sufficiente perchè un sottoinsieme di un ipergruppo sia sottoipergruppo parte completa.

In **2** si approfondisce la teoria degli r-ipergruppi, ottenendo in particolare risultati sugli r-ipergruppi fortemente ciclici, di cui si determina, tra l'altro, il numero degli elementi che possono fungere da generatori.

1 - Potenze ad esponente intero in un ipergruppo

Supporremo da questo momento in poi che $H = \langle H, \circ \rangle$ sia un ipergruppo. È noto che in un ipergruppo non vi sono necessariamente identità e ogni elemento non ha in generale degli inversi. Possiamo considerare, analogamente al cuore di H, per ogni elemento x di H, l'insieme degli elementi che stanno nella retroimmagine tramite φ dell'elemento $\varphi(x)^{-1}$, e porre $x^{[-1]} = \varphi^{-1}(\varphi(x)^{-1})$. Si possono allora definire in H le potenze ad esponente nullo o intero negativo, di un elemento x, in questa maniera:

Def. 1.1. $x^{[0]} = \omega_H$; $\quad x^{[-m]} = (x^{[-1]})^m \quad \forall m \in N^* - \{1\}$.

Analogamente $\forall A \in \mathscr{P}(H) - \{\emptyset\}$ si pone

Def. 1.2. $A^{[0]} = \omega_H$; $A^{[-1]} = \bigcup_{a \in A} a^{[-1]}$; $A^{[-m]} = (A^{[-1]})^m \quad \forall m \in N^* - \{1\}$.

Si noti che l'esponente nullo o negativo è posto fra parentesi quadre allo scopo di distinguere le potenze ad esponente nullo o negativo in un ipergruppo H da quelle nel gruppo H/β^*_H. Ovviamente se H è un gruppo, allora $\forall m \in N^*$ $x^{[-m]} = x^{-m}$.

Osservazione 1.1. Si osservi che si può dare la seguente notevole caratterizzazione dell'insieme $x^{[-1]}$

$$x^{[-1]} = \{x' \in H / x \circ x' \subset \omega_H\} = \{x'' \in H / x'' \circ x \subset \omega_H\} .$$

Dim. Se $x' \in x^{[-1]}$, allora $\varphi(x') = \varphi(x)^{-1}$, da cui $\varphi(x)\cdot\varphi(x') = 1$, quindi $\varphi(x \circ x') = 1$, cioè $x \circ x' \subset \omega_H$. Analogamente il viceversa e la seconda uguaglianza.

Proviamo il

Lemma 1.1. *$\forall m \in N^*$, $\forall x \in H$ si ha che $x^{[-m]}$ è parte completa di H.*

Dim. $\forall u \in x^{[-1]}$ si ha $x^{[-1]} = \mathscr{C}_H(u)$, quindi $x^{[-1]}$ è parte completa di H. $\forall m > 1$, segue dalla Def. 1.1. che $x^{[-m]}$ è prodotto di parti complete e perciò è parte completa.

Proposizione 1.1. *$\forall n \in N^*$, $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in H^n$ si ha $(a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_n)^{[-1]} = a_n^{[-1]} \circ a_{n-1}^{[-1]} \circ \ldots \circ a_1^{[-1]}$.*

Dim. Sia $z \in (a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n)^{[-1]}$, allora per la Def. 1.2 esiste $x \in a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$ tale che $z \in x^{[-1]}$, da cui $\varphi(z) = \varphi(x)^{-1}$. Ma $\varphi(x) = \varphi(a_1)\cdot\varphi(a_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(a_n)$, per cui $\varphi(x)^{-1} = \varphi(a_n)^{-1}\cdot\varphi(a_{n-1})^{-1}\cdot\ldots\cdot\varphi(a_1)^{-1}$. Se $b_n \in a_n^{[-1]}$, $b_{n-1} \in a_{n-1}^{[-1]}, \ldots, b_1 \in a_1^{[-1]}$, allora si ha $\varphi(x)^{-1} = \varphi(z) = \varphi(b_n)\cdot\varphi(b_{n-1})\cdot\ldots\cdot\varphi(b_1) = \varphi(b_n \circ b_{n-1} \circ \ldots \circ b_1)$, cioè $z \in \mathscr{C}_H\cdot(b_n \circ b_n{}^{-1} \circ \ldots \circ b_1) = \mathscr{C}_H(b_n) \circ \mathscr{C}_H(b_{n-1}) \circ \ldots \circ \mathscr{C}_H(b_1) \subset \mathscr{C}_H(a_n^{[-1]}) \circ \mathscr{C}_H(a_{n-1}^{[-1]}) \circ \ldots \circ \mathscr{C}_H(a_1^{[-1]})$ (per il Lemma 1.1)$= a_n^{[-1]} \circ a_{n-1}^{[-1]} \circ \ldots \circ a_1^{[-1]}$. Viceversa, sia $w \in a_n^{[-1]} \circ a_{n-1}^{[-1]} \circ \ldots \circ a_1^{[-1]}$, allora esistono $b_n \in a_n^{[-1]}$, $b_{n-1} \in a_{n-1}^{[-1]}, \ldots, b_1 \in a_1^{[-1]}$ tali che $w \in b_n \circ b_{n-1} \circ \ldots \circ b_1$, da cui

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \varphi(b_n)\cdot\varphi(b_{n-1})\cdot\ldots\cdot\varphi(b_1) = \varphi(a_n)^{-1}\cdot\varphi(a_{n-1})^{-1}\cdot\ldots\cdot\varphi(a_1)^{-1} \\ &= \big(\varphi(a_1)\cdot\varphi(a_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(a_n)\big)^{-1} = \big(\varphi(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n)\big)^{-1} = \varphi(x)^{-1} \end{aligned}$$

$\forall x \in a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$. Così $w \in x^{[-1]} \subset (a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n)^{[-1]}$.

Osservazione 1.2. La Proposizione 1.1 si può generalizzare ad n sottoinsiemi qualunque di H, cioè

$$\forall (A_1, A_2, \ldots, A_n) \in [\mathscr{P}(H) - \{\emptyset\}]^n \qquad (A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n)^{[-1]} = A_n^{[-1]} \circ A_{n-1}^{[-1]} \circ \ldots \circ A_1^{[-1]} .$$

Proposizione 1.2.

$$\forall x \in H \quad \textit{si ha} \quad x \circ x^{[-1]} = x^{[-1]} \circ x = \omega_H; \tag{1.1}$$

$$\forall n \in N, \quad \forall x \in H \quad \textit{si ha} \quad x^n \circ x^{[-n]} = x^{[-n]} \circ x^n = \omega_H . \tag{1.2}$$

Dim. Per la Osservazione 1.1, $x \circ x^{[-1]} = \bigcup_{x' \in x^{[-1]}} x \circ x' \subset \omega_H$. Viceversa, sia $u \in \omega_H$.

Allora $\exists y \in H$ tale che $u \in x \circ y$. Applicando φ si ha $\varphi(u) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ cioè $1 = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, da cui $\varphi(y) = \varphi(x)^{-1}$ e pertanto $y \in x^{[-1]}$. Così $u \in x \circ x^{[-1]}$ e resta provata la (1.1). Proviamo la (1.2): per $n = 0$, segue dalla Def. 1.1; per $n = 1$, segue dalla (1.1); per $n = 2$, si ha $x^2 \circ x^{[-2]} = x \circ x \circ x^{[-1]} \circ x^{[-1]} = x \circ (x \circ x^{[-1]}) \circ x^{[-1]} = x \circ \omega_H \circ x^{[-1]} = x \circ \mathscr{C}_H(x^{[-1]}) =$ (per il Lemma 1.1) $= x \circ x^{[-1]} = \omega_H$. Supponiamo che la tesi valga $\forall k < n$; allora $x^n \circ x^{[-n]} = x^n \circ (x^{[-1]})^n = x^n \circ (x^{[-1]})^{n-1} \circ x^{[-1]} = x \circ x^{n-1} \circ x^{[-n+1]} \circ x^{[-1]} =$ (per l'ipotesi induttiva) $= x \circ \omega_H \circ x^{[-1]} = x \circ \mathscr{C}_H(x^{[-1]}) = x \circ x^{[-1]} = \omega_H$. Similmente si prova che $x^{[-n]} \circ x^n = \omega_H$.

Lemma 1.2. *$\forall x \in H$ si ha $(x^{[-1]})^{[-1]} = \mathscr{C}_H(x)$.*

Dim. Sia $z \in (x^{[-1]})^{[-1]}$, allora $\exists x' \in x^{[-1]}$ tale che $z \in (x')^{[-1]}$. Da $x' \in x^{[-1]}$ segue $\varphi(x') = \varphi(x)^{-1}$. Da $z \in (x')^{[-1]}$ segue $\varphi(z) = \varphi(x')^{-1}$. Pertanto $\varphi(z) = \varphi(x)$, ovvero $z \beta_H^* x$, da cui $z \in \mathscr{C}_H(x)$. Viceversa, sia $z \in \mathscr{C}_H(x)$, allora $\varphi(z) = \varphi(x)$. Certamente $\exists z' \in H$ tale che $\varphi(z') = \varphi(z)^{-1}$, per cui $z \in \varphi^{-1}(\varphi(z')^{-1}) = (z')^{[-1]}$. Ma $\varphi(x) = \varphi(z)$ e quindi $\varphi(x)^{-1} = \varphi(z)^{-1} = \varphi(z')$, da cui $z' \in x^{[-1]}$ e così $z \in (x^{[-1]})^{[-1]}$.

Lemma 1.3. *$\forall A \in \mathscr{P}(H) - \{\emptyset\}$, $\forall m \in N^*$ $A^{[-m]}$ è parte completa di H.*

Dim. $A^{[-1]} = \bigcup_{a \in A} a^{[-1]}$ e poichè $\forall a \in A$ $a^{[-1]}$ è parte completa, segue che $A^{[-1]}$ è parte completa di H. $\forall m > 1$ $A^{[-m]} = (A^{[-1]})^m$ e poichè il prodotto di parti complete è parte completa, segue la tesi.

Lemma 1.4. *$\forall A \in \mathscr{P}(H) - \{\emptyset\}$, $\forall m \in N^*$ si ha $A^m \circ A^{[-m]} = A^{[-m]} \circ A^m \supset \omega_H$.*

Dim. Sia $m = 1$. Allora $\forall a \in A$, segue dalla Proposizione 1.2, $a \circ a^{[-1]} = \omega_H$ e quindi $\omega_H \subset A \circ A^{[-1]}$. $\forall m > 1$, $A^m \circ A^{[-m]} = A^m \circ (A^{[-1]})^m = \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{m-1 \text{ volte}}$ $\circ (A \circ A^{[-1]}) \circ \underbrace{A^{[-1]} \circ A^{[-1]} \circ \ldots \circ A^{[-1]}}_{m-1 \text{ volte}} \supset \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{m-1 \text{ volte}} \circ \omega_H \circ \underbrace{A^{[-1]} \circ A^{[-1]} \circ \ldots \circ A^{[-1]}}_{m-1 \text{ volte}}$.

Poichè $A \circ \omega_H = \omega_H \circ A$, iterando il procedimento, si perviene alla tesi.

Proposizione 1.3. *$\forall (m, n) \in N^* X N^*$, $\forall x \in H$, $\forall A \in \mathscr{P}(H) - \{\emptyset\}$ si ha:*

$$x^{[-m]} \circ x^n = \begin{cases} x^{[-m+n]} & \text{se } m > n \\ \mathscr{C}_H(x)^{n-m} & \text{se } m < n; \end{cases} \tag{1.3}$$

$$A^{[-m]} \circ A^n \supset A^{[-m+n]} \quad \text{se } m > n, \qquad A^{[-m]} \circ A^n \supset \mathscr{C}_H(A)^{n-m} \quad \text{se } m < n; \tag{1.4}$$

(1.5) $x^{[-m]}\circ x^{[-n]} = x^{[-m-n]}$; (1.6) $A^{[-m]}\circ A^{[-n]} = A^{[-m-n]}$;

(1.7) $(x^{[-m]})^n = (x^m)^{[-n]} = x^{[-mn]}$; (1.8) $(A^{[-m]})^n = (A^m)^{[-n]} = A^{[-mn]}$;

(1.9) $(x^{[-m]})^{[-n]} = \mathscr{C}_H(x)^{mn}$; (1.10) $(A^{[-m]})^{[-n]} = \mathscr{C}_H(A)^{mn}$.

Dim.

(1.3) $$x^{[-m]}\circ x^n = (x^{[-1]})^m\circ x^n = \underbrace{x^{[-1]}\circ x^{[-1]}\circ\ldots\circ x^{[-1]}}_{m \text{ volte}}\circ \underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n \text{ volte}}.$$

Allora, se $m > n$, dalla Proposizione 1.2, segue $x^{[-m]}\circ x^n = (x^{[-1]})^{m-n}\circ\omega_H = \mathscr{C}_H(x^{[-1]})^{m-n} = \mathscr{C}_H(x^{[-m+n]}) =$ (per il Lemma 1.1) $x^{[-m+n]}$. Se $m < n$, si ha $x^{[-m]}\circ x^n = \omega_H\circ x^{n-m} = \mathscr{C}_H(x^{n-m}) = \mathscr{C}_H(x)^{n-m}$.

(1.4) Come (1.3), tenendo presenti i Lemmi 1.3 e 1.4.

(1.5) $$x^{[-m]}\circ x^{[-n]} = (x^{[-1]})^m\circ(x^{[-1]})^n = (x^{[-1]})^{m+n} = x^{[-m-n]}.$$

(1.6) Come (1.5).

(1.7) $$(x^{[-m]})^n = \big((x^{[-1]})^m\big)^n = (x^{[-1]})^{mn} = x^{[-mn]};$$

per la Proposizione 1.1

$$(x^m)^{[-n]} = \big((x^m)^{[-1]}\big)^n = \big((x^{[-1]})^m\big)^n = (x^{[-1]})^{mn} = x^{[-mn]}.$$

(1.8) Come (1.7), tenendo conto della Osservazione 1.2.

(1.9) $$(x^{[-m]})^{[-n]} = [(x^{[-1]})^m]^{[-n]} = \{[(x^{[-1]})^m]^{[-1]}\}^n \text{ (per (1.8))}$$

$$= \{[(x^{[-1]})^{[-1]}]^m\}^n = \text{(per il Lemma 1.2)} = \mathscr{C}_H(x)^{mn}.$$

(1.10) $$(A^{[-m]})^{[-n]} = [(A^{[-1]})^m]^{[-n]} = \{[(A^{[-1]})^m]^{[-1]}\}^n = \text{(per (1.8))}$$

$$= \{[(A^{[-1]})^{[-1]}]^m\}^n = \{[(\bigcup_{a\in A} a^{[-1]})^{[-1]}]^m\}^n = \text{(per il Lemma 1.2)}$$

$$= [(\bigcup_{a\in A}\mathscr{C}_H(a))^m]^n = \{[\mathscr{C}_H(A)]^m\}^n = \mathscr{C}_H(A)^{mn}.$$

Nota 1.1. Ricordiamo che si denota $\forall(x,y)\in H^2$ $x/y = \{a\in H / x\in a\circ y\}$, $y\diagdown x = \{b\in H / x\in y\circ b\}$ e

$$\forall(A,B)\in(\mathscr{P}(H)-\{\emptyset\})^2 \quad A/B = \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} a/b, \qquad B\diagdown A = \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} b\diagdown a.$$

Proposizione 1.4.

$$(1.11) \qquad \forall x \in H \quad si\ ha\ \omega_H/x = x^{[-1]} = x\backslash\omega_H;$$

$$(1.12) \qquad \forall n \in N^*, \quad \forall x \in H \quad si\ ha\ \omega_H/x^n = x^{[-n]} = x^n\backslash\omega_H.$$

Dim. (1.11) Sia $x' \in x^{[-1]}$, allora per la Osservazione 1.1, $x' \circ x \subset \omega_H$, da cui $\exists u \in \omega_H$ tale che $u \in x' \circ x$, quindi $x' \in u/x \subset \omega_H/x$. Viceversa, sia $u \in \omega_H/x$, allora $\exists v \in \omega_H$ tale che $u \in v/x$, da cui $v \in u \circ x$ e applicando φ si ha $\varphi(v) = \varphi(u)\cdot\varphi(x)$ e poichè $\varphi(v) = 1$ ne segue $\varphi(u) = \varphi(x)^{-1}$, cioè $u \in x^{[-1]}$. Pertanto $\omega_H/x = x^{[-1]}$. Analogamente si vede che $x\backslash\omega_H = x^{[-1]}$.

(1.12) Sia $z \in x^{[-n]} = (x^{[-1]})^n$, allora esiste $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset x^{[-1]}$ tale che $z \in a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$, da cui $\varphi(z) = \varphi(a_1)\cdot\varphi(a_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(a_n) = \varphi(x)^{-n}$. Si ha $\varphi(z \circ x^n) = \varphi(z)\cdot\varphi(x^n) = \varphi(x)^{-n}\cdot\varphi(x)^n = 1$, e pertanto $z \circ x^n \subset \omega_H$. Allora $\exists u \in \omega_H$ tale che $u \in z \circ x^n$ e quindi $z \in u/x^n \subset \omega_H/x^n$. Viceversa, sia $u \in \omega_H/x^n$, allora $\exists v \in \omega_H$, $\exists a \in x^n$ tali che $u \in v/a$, da cui $v \in u \circ a$ e applicando φ si ha $\varphi(v) = \varphi(u)\cdot\varphi(a) = \varphi(u)\cdot\varphi(x^n) = \varphi(u)\cdot\varphi(x)^n$ cioè $1 = \varphi(u)\cdot\varphi(x)^n$, da cui $\varphi(u) = \varphi(x)^{-n} = [\varphi(x)^n]^{-1} = [\varphi(x^n)]^{-1}$. Allora $\forall w \in x^n$ $u \in w^{[-1]}$ e perciò $u \in (x^n)^{[-1]} = x^{[-n]}$ ovvero $\omega_H/x^n \subset x^{[-n]}$.

Proposizione 1.5. $\forall (x, y) \in H^2$, $\forall u \in x/y$ *si ha*

$$\mathscr{C}_H(u) = \mathscr{C}_H(x/y) = x/\mathscr{C}_H(y) = \mathscr{C}_H(x)/y = \mathscr{C}_H(x)/\mathscr{C}_H(y).$$

Dim. Certamente $\mathscr{C}_H(u) \subset \mathscr{C}_H(x/y)$. Da $u \in x/y$ segue $x \in u \circ y$, da cui $\varphi(x) = \varphi(u)\cdot\varphi(y)$ e quindi $\varphi(u) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)^{-1}$. Sia $z \in \mathscr{C}_H(x/y)$; allora $\exists w \in x/y$ tale che $z \in \mathscr{C}_H(w)$; da $w \in x/y$ segue $x \in w \circ y$ e quindi $\varphi(w) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)^{-1}$. Pertanto $\varphi(w) = \varphi(u)$, ma $z \in \mathscr{C}_H(w)$ implica $\varphi(z) = \varphi(w)$ e quindi $\varphi(z) = \varphi(u)$ cioè $z \in \mathscr{C}_H(u)$. Resta così provato che

$$(1.13) \qquad \mathscr{C}_H(x/y) = \mathscr{C}_H(u).$$

Sia $u' \in \mathscr{C}_H(x/y)$; allora $\exists v \in x/y$ tale che $u' \in \mathscr{C}_H(v)$; $v \in x/y$ implica $x \in v \circ y$, da cui $\varphi(x) = \varphi(v)\cdot\varphi(y) = \varphi(u')\cdot\varphi(y) = \varphi(u' \circ y)$. Pertanto $x \in \mathscr{C}_H(u' \circ y) = u' \circ \mathscr{C}_H(y)$, da cui $\exists y' \in \mathscr{C}_H(y)$ tale che $x \in u' \circ y'$ e così $u' \in x/y' \subset x/\mathscr{C}_H(y)$. Quindi $\mathscr{C}_H(x/y) \subset x/\mathscr{C}_H(y)$. Viceversa, sia $w \in x/\mathscr{C}_H(y)$; allora $\exists y' \in \mathscr{C}_H(y)$ tale che $w \in x/y'$, da cui $x \in w \circ y'$. Pertanto $\varphi(x) = \varphi(w)\cdot\varphi(y') = \varphi(w)\cdot\varphi(y)$, ovvero $\varphi(w) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)^{-1} = \varphi(u)$. Così $w \in \mathscr{C}_H(u) = \mathscr{C}_H(x/y)$ (per (1.13)). Si è così provato che

$$(1.14) \qquad \mathscr{C}_H(x/y) = x/\mathscr{C}_H(y).$$

Sia $a \in x/\mathscr{C}_H(y)$; allora $\exists y' \in \mathscr{C}_H(y)$ tale che $a \in x/y'$, da cui $x \in a \circ y'$. Perciò $\mathscr{C}_H(x) = \mathscr{C}_H(a) \circ \mathscr{C}_H(y') = \mathscr{C}_H(a) \circ \mathscr{C}_H(y) = \mathscr{C}_H(a \circ y)$, da cui $a \circ y \subset \mathscr{C}_H(x)$; allora $\exists x' \in \mathscr{C}_H(x)$ tale che $x' \in a \circ y$, da cui $a \in x'/y \subset \mathscr{C}_H(x)/y$. Così $x/\mathscr{C}_H(y) \subset \mathscr{C}_H(x)/y$. Viceversa, sia $z \in \mathscr{C}_H(x)/y$; allora $\exists x' \in \mathscr{C}_H(x)$ tale che $z \in x'/y$, da cui $x' \in z \circ y$; perciò $\varphi(x') = \varphi(x) = \varphi(z) \cdot \varphi(y)$, cioè $\varphi(z) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1} = \varphi(u)$ e quindi $z \in \mathscr{C}_H(u) = \mathscr{C}_H(x/y) = x/\mathscr{C}_H(y)$. Pertanto si ha

$$x/\mathscr{C}_H(y) = \mathscr{C}_H(x)/y \,. \tag{1.15}$$

Infine certamente $\mathscr{C}_H(x)/y \subset \mathscr{C}_H(x)/\mathscr{C}_H(y)$. Sia $z \in \mathscr{C}_H(x)/\mathscr{C}_H(y)$; allora $\exists x' \in \mathscr{C}_H(x)$ ed $\exists y' \in \mathscr{C}_H(y)$ tali che $z \in x'/y'$, da cui $x' \in z \circ y'$ e applicando φ si ha $\varphi(x') = \varphi(z) \cdot \varphi(y')$, cioè $\varphi(x) = \varphi(z) \cdot \varphi(y)$, da cui $\varphi(z) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1} = \varphi(u)$ ovvero $z \in \mathscr{C}_H(u) = \mathscr{C}_H(x/y) = x/\mathscr{C}_H(y) = \mathscr{C}_H(x)/y$. Si è pertanto dimostrato che

$$\mathscr{C}_H(x)/y = \mathscr{C}_H(x)/\mathscr{C}_H(y) \,. \tag{1.16}$$

Corollario 1.1. $\forall (x, y) \in H^2$

$$x \circ y^{[-1]} = \mathscr{C}_H(x/y) = \mathscr{C}_H(x)/y = x/\mathscr{C}_H(y) = \mathscr{C}_H(x)/\mathscr{C}_H(y) \,.$$

Dim. Sia $u \in x/y$; allora $x \in u \circ y$ da cui $\varphi(x) = \varphi(u) \cdot \varphi(y)$ e $\varphi(u) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1}$. Sia $z \in x \circ y^{[-1]}$; allora $\exists y' \in y^{[-1]}$ tale che $z \in x \circ y'$, da cui $\varphi(z) = \varphi(x) \cdot \varphi(y') = \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1}$. Pertanto $\varphi(z) = \varphi(u)$, cioè $z \in \mathscr{C}_H(u)$, da cui $x \circ y^{[-1]} \subset \mathscr{C}_H(u)$ $\forall u \in x/y$. Viceversa, sia $u' \in \mathscr{C}_H(u)$; allora $\varphi(u') = \varphi(u) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1}$ = (per qualunque $y' \in y^{[-1]}$) $\varphi(x) \cdot \varphi(y') = \varphi(x \circ y')$, da cui $u' \in \mathscr{C}_H(x \circ y') \subset \mathscr{C}_H(x \circ y^{[-1]}) = x \circ y^{[-1]}$. Pertanto $\mathscr{C}_H(u) = x \circ y^{[-1]}$ $\forall u \in x/y$. Dalla proposizione precedente segue la tesi.

Nota 1.2. Se $H = \langle H, \circ \rangle$ è un ipergruppo regolare, denotiamo con $E(H)$ l'insieme delle identità bilatere di H e $\forall x \in H$ denotiamo con $i(x)$ l'insieme degli inversi di x, cioè

$$E(H) = \{e \in H / \forall x \in H \;\; x \in (e \circ x) \cap (x \circ e)\}\,;$$

$$i(x) = \{x' \in H / \exists e \in E(H) \text{ tale che } e \in (x \circ x') \cap (x' \circ x)\} \,.$$

Proposizione 1.6. (a) *Se H è un ipergruppo regolare, allora* $\forall x \in H$ $i(x) \subset x^{[-1]}$; (b) *se H è un ipergruppo completo, allora* $\forall x \in H$ $i(x) = x^{[-1]}$.

Dim. (a) Sia $x' \in i(x)$; allora $\exists e \in E(H)$ tale che $e \in x \circ x'$, da cui $\varphi(e) = \varphi(x) \cdot \varphi(x')$, cioè $1 = \varphi(x) \cdot \varphi(x')$. Perciò $\varphi(x') = \varphi(x)^{-1}$ ovvero $x' \in x^{[-1]}$.

(b) Se H è completo, allora H è regolare (vedi [4]), e quindi per (a), basta provare che $x^{[-1]} \subset i(x)$. Sia $x' \in x^{[-1]}$, allora, per la completezza di H, si ha $x \circ x' = x \circ \mathscr{C}_H(x')$. Ma, essendo $x' \in x^{[-1]}$, si ha $\mathscr{C}_H(x') = x^{[-1]}$, e così $x \circ x' = x \circ x^{[-1]} = \omega_H$ per la Proposizione 1.2. Ma è noto che in un ipergruppo completo, $\omega_H = E(H)$, vedi [4], e pertanto $x' \in i(x)$. Così $i(x) = x^{[-1]}$.

Osservazione 1.3. Si noti che in generale, essendo $\forall (x, y) \in H^2$ $x/y \subset \mathscr{C}_H(x/y)$, segue dal Corollario 1.1, $x/y \subset x \circ y^{[-1]}$. Tuttavia, *se H è un ipergruppo completo, allora* $\forall (x, y) \in H^2$, $x/y = x \circ y^{[-1]}$; infatti è noto, da (25) di [1], che $\forall y' \in i(y)$ si ha $x/y = x \circ y'$. Pertanto $x \circ i(y) = \bigcup\limits_{y' \in i(y)} x \circ y' = x/y$. Ma, per la Proposizione 1.6, $i(y) = y^{[-1]}$ e quindi $x \circ y^{[-1]} = x/y$.

Proposizione 1.7. (I) $\forall x \in \omega_H$ $x^{[-1]} = \omega_H$ *e quindi* $\omega_H^{[-1]} = \omega_H$;
(II) $\forall x \in H$ *le condizioni seguenti sono equivalenti*:

(1.17) $x^{[-1]} = \mathscr{C}_H(x)$; (1.18) $x \in x^{[-1]}$;

(1.19) $p(x) \leqslant 2$ (*ove con $p(x)$ si indica il* periodo *di x, cioè il più piccolo intero positivo n tale che $x^n \subset \omega_H$*)

Dim. (I). $\forall x \in \omega_H$ $\varphi(x) = 1 = \varphi(x)^{-1}$, da cui $x \in x^{[-1]}$. Ma $\mathscr{C}_H(x) = x^{[-1]}$ e quindi $\omega_H = x^{[-1]}$.

(II) (1.17) implica (1.18) banalmente; (1.18) implica (1.19); infatti: se $x \in \omega_H$ allora $p(x) = 1$; se $x \notin \omega_H$, da $x \in x^{[-1]}$ segue $\varphi(x) = \varphi(x)^{-1}$, cioè $\varphi(x^2) = 1$, da cui $x^2 \subset \omega_H$, ovvero $p(x) = 2$. Proviamo infine che (1.19) implica (1.17): se $p(x) = 1$, allora $x \in \omega_H$, da cui per (I) si ha $x^{[-1]} = \omega_H = \mathscr{C}_H(x)$; se $p(x) = 2$, allora $x \circ x \subset \omega_H$, da cui $x \in x^{[-1]}$ e $x^{[-1]} = \mathscr{C}_H(x)$.

Proposizione 1.8. $\forall (x, y) \in H^2$ $x^{[-1]} = y^{[-1]}$ *se, e solo se*, $x \beta_H^* y$.

Dim. $x \beta_H^* y$ implica $\varphi(x) = \varphi(y)$, da cui $\varphi(x)^{-1} = \varphi(y)^{-1}$; ma allora $\varphi^{-1}(\varphi(x)^{-1}) = \varphi^{-1}(\varphi(y)^{-1})$, cioè $x^{[-1]} = y^{[-1]}$. Analogamente si prova il viceversa.

Proposizione 1.9. *Se K è un sottoinsieme di H, allora K è un sotto-*

ipergruppo parte completa di H se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti tre condizioni.

(1.20) $\omega_H \subset K$; (1.21) $\forall (a, b) \in K^2 \quad a \circ b \subset K$; (1.22) $a \in K$ *implica* $a^{[-1]} \subset K$.

Dim. Sia K sottoipergruppo parte completa di H; è noto (vedi [**3**]$_4$) che il cuore di un ipergruppo è l'intersezione di tutti i suoi sottoipergruppi parte completa e quindi vale la (1.20). La condizione (1.21) è banalmente soddisfatta. La condizione (1.22) segue dal Lemma 1.1 di [**6**]$_3$. Viceversa, per (1.21), K è sottosemipergruppo di H. Sia $\{a, b\} \subset K$. Certamente esiste $x \in H$ tale che $a \in b \circ x$, da cui $\varphi(a) = \varphi(b) \cdot \varphi(x)$ e $\varphi(x) = \varphi(b)^{-1} \cdot \varphi(a)$. Sia $b' \in b^{[-1]}$, allora $\varphi(b') = \varphi(b)^{-1}$, per cui $\varphi(x) = \varphi(b') \cdot \varphi(a) = \varphi(b' \circ a)$; ma per (1.22), $b' \in K$ e per (1.21), $b' \circ a \subset K$, da cui $\varphi(x) \in \varphi(K)$, cioè $x \in \varphi^{-1}\varphi(K) = \mathscr{C}_H(K) = \omega_H \circ K$; ma $\omega_H \subset K$ e così $x \in K$. Analogamente si prova che esiste $w \in K$ tale che $a \in w \circ b$. Così K è sottoipergruppo. Per (1.20), $\mathscr{C}_H(K) = K \circ \omega_H = K$ e quindi K è parte completa.

Corollario 1.2. *Se K è un sottoinsieme di H, allora K è un sottoipergruppo parte completa di H se, e solo se, vale la condizione seguente*

$$\forall (a, b) \in K^2 \qquad a \circ b^{[-1]} \subset K . \tag{1.23}$$

Dim. Sia K sottoipergruppo parte completa di H e sia $\{a, b\} \subset K$. Per (1.22), $b^{[-1]} \subset K$ e quindi da (1.21) segue $a \circ b^{[-1]} \subset K$. Viceversa, sia $a \in K$, allora da (1.23) segue $a \circ a^{[-1]} \subset K$, cioè, per la Proposizione 1.2, $\omega_H \subset K$ e così vale la (1.20). Sia $x \in a^{[-1]}$, allora $x \in \mathscr{C}_H(x) = x \circ \omega_H \subset a^{[-1]} \circ \omega_H \subset a^{[-1]} \circ K \subset$ (per (1.23)) $\subset K$. Quindi vale la (1.22). Sia $\{a, b\} \subset K$; allora $a \circ b \subset a \circ \mathscr{C}_H(b) =$ (per il Lemma 1.2) $a \circ (b^{[-1]})^{[-1]} = \bigcup_{t \in b^{[-1]}} a \circ t^{[-1]}$, ma da (1.22) segue $b^{[-1]} \subset K$ e quindi, per (1.23), $a \circ t^{[-1]} \subset K$ $\forall t$. Pertanto $a \circ b \subset K$ e vale (1.21). Per la Proposizione 1.9, K è sottoipergruppo parte completa di H.

Proposizione 1.10. (A) *Se* $f \colon H \to H'$ *è un omomorfismo di ipergruppi, allora* $\forall x \in H$ $f(x^{[-1]}) \subset [f(x)]^{[-1]}$. (B) *Se* f *è un isomorfismo, allora* $\forall x \in H$, $f(x^{[-1]}) = [f(x)]^{[-1]}$.

Dim. (A) Sia $z \in f(x^{[-1]})$, allora $\exists x' \in x^{[-1]}$ tale che $z = f(x')$. Proviamo che $\varphi(z) = [\varphi(f(x))]^{[-1]}$; $\varphi(z) \cdot \varphi(f(x)) = \varphi(f(x')) \cdot \varphi(f(x)) = \varphi(f(x') \circ f(x)) = \varphi(f(x' \circ x))$. Per la Osservazione 1.1, $x' \circ x \subset \omega_H$ e pertanto $\varphi(z) \cdot \varphi(f(x)) \subset \varphi(f(\omega_H)) \subset \varphi(\omega_{H'}) = 1$.

Così $z \in [f(x)]^{[-1]}$. (B) Sia $w \in [f(x)]^{[-1]}$. Allora per la Osservazione 1.1, $w \circ f(x) \subset \omega_{H'}$. Per la surgettività di f, $\exists a \in H$ tale che $w = f(a)$ e così $f(a) \circ f(x) \subset \omega_{H'}$. Poichè f è isomorfismo, $\omega_{H'} = f(\omega_H)$ (vedi (4) di [**1**]), e pertanto $f(a) \circ f(x) = f(a \circ x) \subset f(\omega_H)$, da cui $a \circ x \subset \omega_H$. Ancora per la Osservazione 1.1, $a \in x^{[-1]}$ e quindi $w \in f(x^{[-1]})$.

2 - Alcuni risultati sugli r-ipergruppi

Proposizione 2.1. *Sia H un r-ipergruppo; allora H è un gruppo se, e solo se, $r = 1$.*

Dim. Se H è un gruppo, certamente $\forall x \in H$ $\mathscr{C}_H(x) = \{x\}$ e quindi $r = 1$. Viceversa, sia H un 1-ipergruppo; allora $\forall (x, y) \in H \times H$, se $\{u, v\} \subset x \circ y$, si ha $\mathscr{C}_H(u) = \mathscr{C}_H(x \circ y) = \mathscr{C}_H(v)$ e quindi $u = v$, cioè $|x \circ y| = 1$.

Nota 2.1. Nel seguito considereremo solo r-ipergruppi propri, cioè non aventi struttura di gruppo ($r > 1$).

Lemma 2.1. *Sia H un ipergruppo e siano x, y due elementi di H di periodo finito, tali che $x \beta_n y$; allora $\langle \{x\} \rangle = \langle \{y\} \rangle$.*

Dim. Per il Teorema 1.6 di [**6**]$_3$ si ha $\langle \{x\} \rangle = \bigoplus_{t=1}^{p(x)} \mathscr{C}_H(x^t)$, $\langle \{y\} \rangle = \bigoplus_{t=1}^{p(y)} \mathscr{C}_H(y^t)$, ove con il simbolo $\bigoplus$ si intende unione disgiunta. Per la Proposizione 7 di [**8**]$_1$, $p(x) = p(y) = m$. Inoltre $\forall t \in \{1, 2, \dots, m\}$, poichè esiste un iperprodotto P di elementi di H, tale che $x \in P \ni y$, si ha $\mathscr{C}_H(x^t) = \mathscr{C}_H(P^t)$ e $\mathscr{C}_H(y^t) = \mathscr{C}_H(P^t)$, cioè $\mathscr{C}_H(x^t) = \mathscr{C}_H(y^t)$ e pertanto $\langle \{x\} \rangle = \langle \{y\} \rangle$.

Teorema 2.1. *Sia H un r-ipergruppo fortemente ciclico, generato da un elemento a di periodo finito n; allora $\forall m \in N^*$ tale che m divide n si ha che H ha uno ed un solo sottoipergruppo di ordine rm; e tale sottoipergruppo è fortemente ciclico ed è generato da $\forall u \in a^{n/m}$. Questi sono tutti e soli i sottoipergruppi di H.*

Dim. Per il Corollario 1.3 di [**6**]$_3$, $|H| = |\langle \{a\} \rangle| = rn$. Per la Osservazione 1.3 di [**6**]$_3$, $H/\beta^*_H = \langle \varphi(a) \rangle$. Per il Corollario 1.2 di [**6**]$_3$, $p(\varphi(a)) = p(a) = n$ e quindi $|H/\beta^*_H| = n$. Per il Teorema 1.13 di [**10**], $\forall m \in N^*$ tale che m divide nH/β^*_H ha un solo sottogruppo S di ordine m. Sia $K = \varphi^{-1}(S)$. Per (1) di [**1**], K è sottoipergruppo di H. Per la Osservazione 1.4 di [**6**]$_3$, K è r-ipergruppo e quindi $|K| = rm$, essendo $|\varphi(K)| = |S| = m$. È noto che $S = \langle \varphi(a)^{n/m} \rangle$, quindi $\forall u \in a^{n/m}$, $S = \langle \varphi(u) \rangle$, da cui per la Osservazione 1.3 di [**6**]$_3$, $K = \langle \{u\} \rangle$. Si noti che per il Lemma 2.1, K non dipende dalla scelta dell'elemento u in $a^{n/m}$. Proviamo che K è l'unico sottoipergruppo di cardinalità rm. Sia T un sottoipergruppo di H tale che $|T| = rm$. Per la Osservazione 1.3 di [**6**]$_3$, T è fortemente ciclico e pertanto T/β^*_H è sottogruppo ciclico di H/β^*_H, con $|T/\beta^*_H| = m$, ma allora $T/\beta^*_H = S$, cioè $\varphi(T) = \varphi(K)$, da cui $\varphi^{-1}\varphi(T) = \varphi^{-1}\varphi(K)$, cioè $\mathscr{C}_H(T) = \mathscr{C}_H(K)$; allora dalla Osservazione 1.4 di [**6**]$_3$, segue $T = K$. Per il Teorema 9 di [**8**]$_2$ questi sono tutti e soli i sottoipergruppi di H.

Nota 2.2. Si pone $\forall n \in N^* - \{1\}$, *$\varphi(n)$ uguale al numero degli interi minori di n e primi con n e $\varphi(1) = 1$.* È altresì noto che se S è un gruppo ciclico di ordine n, il numero degli elementi di S che possono fungere da generatori è pari a $\varphi(n)$.

Lemma 2.2. *Se H è un ipergruppo fortemente ciclico, posto $G_H = \{x \in H/ x$ genera $H\}$, si ha $G_H = \bigoplus_{x \in \varphi^{-1}(G_{H/\beta^*_H})} \mathscr{C}_H(x)$.*

Dim. Sia $x \in G_H$, allora per la Osservazione 1.3 di [**6**]$_3$, $\varphi(x) \in G_{H/\beta^*_H}$, e quindi $x \in \varphi^{-1}(G_{H/\beta^*_H})$. Viceversa, sia $z \in \bigoplus_{x \in \varphi^{-1}(G_{H/\beta^*_H})} \mathscr{C}_H(x)$, allora $\exists y \in \varphi^{-1}(G_{H/\beta^*_H})$ tale che $z \in \mathscr{C}_H(y)$. Da $y \in \varphi^{-1}(G_{H/\beta^*_H})$ segue $\varphi(y) \in G_{H/\beta^*_H}$. Da $z \in \mathscr{C}_H(y)$ segue $\varphi(z) = \varphi(y)$, cioè $\varphi(z) \in G_{H/\beta^*_H}$. Pertanto, ancora per la Osservazione 1.3 di [**6**]$_3$, si ottiene $z \in G_H$.

Teorema 2.2. *Se H è un r-ipergruppo fortemente ciclico, con $|H/\beta^*_H| = n$, allora $|G_H| = r \cdot \varphi(n)$.*

Dim. Subito dal Lemma 2.2, dalla Nota 2.2 e dalla definizione di r-ipergruppo.

Proposizione 2.2. *Se H è un r-ipergruppo finito e a è un elemento di H, allora $p(a)$ divide $|H/\beta^*_H|$.*

Dim. Sia $|H| = n$, $|H/\beta^*_H| = q$. Per il Corollario 1 di [**8**]$_1$, H è di torsione e sia $p(a) = m$. Per il Corollario 1.3 di [**6**]$_3$, si ha che $|\langle\{a\}\rangle| = rm$. Per il Teorema 9 di [**8**]$_2$, $|\langle\{a\}\rangle|$ divide $|H|$, cioè rm divide n, ma $n = rq$ e pertanto m divide q.

Proposizione 2.3. *Sia H un r-ipergruppo e sia $|H/\beta^*_H| = p$, con p numero primo, allora H è fortemente ciclico.*

Dim. Certamente $|H| = rp$. Dalla Proposizione 2.2 segue $\forall a \in H - \omega_H$ $p(a) = p$. Allora $|\langle\{a\}\rangle| = rp = |H|$, pertanto $\langle\{a\}\rangle = H$.

Proposizione 2.4. *In un r-ipergruppo H, ω_H è l'unico sottoipergruppo proprio parte completa se, e solo se, $|H/\beta_H^*| = p$ con p numero primo.*

Dim. Sia $|H/\beta_H^*| = p$ e sia K un sottoipergruppo parte completa di H diverso da ω_H; K è un r-ipergruppo, quindi $|K| = rs$ con $s \in N^* - \{1\}$ (se $s = 1$, poichè $K \supset \omega_H$ e $|\omega_H| = r$ si ha $K = \omega_H$).

Per il Teorema 9 di [**8**]$_2$, $|K|$ divide $|H|$, cioè rs divide rp, da cui, essendo p un primo, si ha $s = p$. Allora $K = H$. Viceversa, sia $a \in H - \omega_H$. Allora, per le ipotesi, $\langle\{a\}\rangle = H$ e quindi H è fortemente ciclico. Per la Osservazione 1.3 di [**6**]$_3$, H/β_H^* è un gruppo ciclico. H/β_H^* non può essere infinito, perchè altrimenti avrebbe infiniti sottogruppi e H, sempre per la Osservazione 1.3 di [**6**]$_3$, avrebbe infiniti sottoipergruppi parte completa, contro le ipotesi. Sia $|H/\beta_H^*| = q$ con q non primo. Allora $q = uv$ con $u > 1$ e $v > 1$. Certamente $H/\beta_H^* = \langle\varphi(a)\rangle$ e quindi per il Corollario 1.2 di [**6**]$_3$ si ha $p(a) = p(\varphi(a)) = q$. Segue pertanto dal Teorema 2.1, che esiste un sottoipergruppo K, parte completa di H, di cardinalità ru e poichè $u > 1$, K è diverso da ω_H, il che è assurdo.

Bibliografia

[1] P. Bonansinga e P. Corsini, *Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi*, Boll. Un. Mat. Ital. (6) **1**-B (1982), 717-727.

[2] R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, Springer 1966.

[3] P. Corsini: [•]$_1$ *Hypergroupes réguliers et hypermodules*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII **20** (1975), 121-135; [•]$_2$ *Sur les semi-hypergroupes*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); [•]$_3$ *Sur les semihypergroupes complètes et les groupoides*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); [•]$_4$ *Contributo alla teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980).

[4] P. Corsini e G. Romeo, *Hypergroupes complètes et $\mathcal{T}$-groupoides*, Atti convegno su sistemi binari e loro applicazioni, Taormina (1978), 129-146.

[5] M. De Salvo: [•]$_1$ *Omomorfismi di sd-ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); [•]$_2$ *Sugli ipergruppi completi finiti*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 269-280.

[6] M. De Salvo e D. Freni: [•]$_1$ *Semi-ipergruppi e ipergruppi ciclici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **30** (1981), 44-59; [•]$_2$ *Sugli ipergruppi ciclici e completi*, Matematiche (Catania) **35** (1980); [•]$_3$ *Ipergruppi finitamente generati*, Riv. Mat. Univ. Parma (in corso di stampa).

[7] M. Dresher and O. Ore, *Theory of multigroups*, Amer. J. Math. **60** (1938).

[8] D. Freni: [•]$_1$ *Ipergruppi ciclici e torsione negli ipergruppi*, Matematiche, (Catania) **35** (1980); [•]$_2$ *Su gli r-ipergruppi e gli ampliamenti*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1982).

[9] M. Koskas, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pures Appl. **49** (1970), 155-192.
[10] A. Machí, *Introduzione alla teoria dei gruppi*, Feltrinelli, Milano 1974.
[11] J. Mittas, *Hypergroupes canoniques*, Math. Balkanica **2** (1972), 165-179.
[12] Y. Sureau, *Thèse de doctorat d'etat*, Universitè de Clermont II (1980).

Summary

In **1** *one introduces the powers of an element* x *of a hypergroup* H, *when the exponent is a negative integer or zero, in this way*: $x^{[0]} = \omega_H$; $x^{[-1]} = \varphi^{-1}(\varphi(x)^{-1})$; $x^{[-m]} = (x^{[-1]})^m$ $\forall m \in N^* - \{1\}$; *and one brings out several properties about them.*

In **2** *one obtains results about hypergroups which have classes* $\mathrm{mod}\,\beta_H^*$ *of constant, finite cardinality* r (r-*hypergroups*).

* * *