Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 399-407

MARCO BARONTI (*)

Algebre di Banach A_p di gruppi localmente compatti (**)

Introduzione

Sia G un gruppo localmente compatto e sia $p \in [1, +\infty)$. Siano inoltre $L^p(G)$ l'usuale spazio complesso di Lebesgue con la misura normalizzata di Haar dx; $C_c(G)$ lo spazio delle funzioni continue su G a valori complessi aventi supporti compatti e $C_0(G)$ lo spazio delle funzioni continue su G che si annullano all'infinito.

Siano $A_p(G)$ l'algebra di Figà-Talamanca di G e $B_p(G)$ lo spazio dei moltiplicatori puntuali di $A_p(G)$ [4].

In [7]$_1$ Lohouè dimostra che se G_1 e G_2 sono due gruppi abeliani localmente compatti tali che $A_p(G_1)$ e $A_p(G_2)$ sono isometricamente isomorfe come algebre di Banach, allora G_1 e G_2 sono isomorfi come gruppi topologici.

In [8] Walter stabilisce un risultato analogo per gruppi localmente compatti (non necessariamente abeliani) nel caso particolare di $p = 2$.

In questo lavoro si dimostra che utilizzando le algebre di Banach $A_p(G)$ e $B_p(G)$ è possibile caratterizzare sia il sottogruppo di G generato da un elemento x, sia l'elemento x^{-1}. Assegnati, inoltre, x e z in G si caratterizza la più piccola classe laterale destra contenente x e z. Infine, supponendo che due gruppi G_1 e G_2 localmente compatti (non necessariamente abeliani) sono tali che le algebre $A_p(G_1)$ e $A_p(G_2)$ sono isometricamente isomorfe, si dimostra l'esistenza di una funzione φ: $G_1 \to G_2$ tale che:

(1) φ è bigettiva;

(2) $\varphi(e_1) = e_2$, dove e_i è l'idendità di G_i;

(3) $\varphi(xzx) = \varphi(x)\varphi(z)\varphi(z)$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 8-IX-1984.

È naturale ritenere che, anche nel caso $p \neq 2$, l'algebra $A_p(G)$ determini la struttura algebrica di G.

1 - Risultati preliminari

Sia X uno spazio di Banach e per ogni $x \in X$ si denota con $\|x\|$ la norma di x. Si dice che X è uniformemente convesso se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ allora $\|x + y\| < 2(1 - \delta)$. Il modulo di convessità dello spazio X è la funzione δ_X: $[0, 2] \to [0, 1]$ così definita $\delta_X(\varepsilon) = \inf \{1 - \|x+y\|/2 : x, y \in X, \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geqslant \varepsilon\}$. Chiaramente, δ_X è una funzione non decrescente e lo spazio X è uniformemente convesso se e solo se $\delta_X(\varepsilon) > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$. Se $p \in (1, + \infty)$ lo spazio di Banach L^p, rispetto ad una misura μ, è uniformemente convesso.

Clarckson e Hanner dimostrarono che per questi spazi il modulo di convessità, δ_p, risulta continuo e la sua funzione inversa soddisfa le seguenti stime asintotiche per valori di δ_p prossimi a 0

$$\varepsilon \sim 2 \sqrt{\frac{2\delta_p(\varepsilon)}{p-1}} \quad \text{se } p \in (1, 2]\,; \quad \varepsilon \sim 2(p\delta_p(\varepsilon))^{1/p} \quad \text{se } p \in (2, + \infty)\,.$$

Sia G un gruppo localmente compatto con identità e. La lettera e sarà pure usata per il numero di Eulero 2, 7128 ..., ma dal contesto sarà possibile evitare delle confusioni. Si definisce $A_p(G)$ nel seguente modo: $u \in A_p(G)$ se e solo se $u(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i * g_i(x)$, con f_i, g_i in $C_c(G)$ tali da soddisfare la condizione $\sum_{i=1}^{+\infty} \|f_i\|_p \|g_i^v\|_{p'} < + \infty$, dove sono state usate le notazioni $g_i^v(x) = g_i(x^{-1})$, $f_i * g_i(x) = \int_G f_i(xy)\, g_i^v(y)\, dy$, $(1/p) + (1/p') = 1$. Se $u \in A_p(G)$ allora si definisce la norma di u nel modo seguente $\|u\|_{A_p(G)} = \inf \{\sum_{i=1}^{+\infty} \|f_i\|_p \|g_i^v\|_{p'};\ f_i, g_i \in C_c(G)$ tali che $u(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i * g_i(x)$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} \|f_i\|_p \|g_i^v\|_{p'} < + \infty\}$. Sia $B_p(G)$ lo spazio dei moltiplicatori puntuali di $A_p(G)$, e precisamente $g \in B_p(G)$ se e solo se $gf \in A_p(G)$ per ogni $f \in A_p(G)$. Se $g \in B_p(G)$ allora si definisce la norma di g nel modo seguente $\|g\|_{B_p(G)} = \sup \{\|gf\|_{A_p(G)}/\|f\|_{A_p(G)} : f \in A_p(G)\}$. È noto che $A_p(G)$ e $B_p(G)$ sono algebre di Banach ed anche $A_p(G) \subset C_0(G)$ e $A_1(G) = C_0(G)$.

I risultati che seguiranno sono i principali teoremi che saranno usati.

Teorema 1.1 (Fendler [**3**]). « Sia G un gruppo localmente compatto amenabile e sia $f \in B_p(G)$ con $p \in (1, + \infty)$. Allora esistono uno spazio di Banach X, isomorfo ed isometrico ed un sottospazio complementato di uno spazio di Lebesgue $L^p(\mu)$, dove μ è una misura opportuna, una rappresentazione isometrica T di G su X e due vettori ξ, η rispettivamente in X e X^* tali che $f(x) = (T(x)\xi, \eta)$; $\|f\|_{B_p(G)} = \|\xi\|_X \cdot \|\eta\|_{X^*}$ »

Se G è un gruppo discreto allora lo spazio di Banach X può essere scelto isomorfo ed isometrico ad uno spazio di Lebesgue $L^p(\mu)$, dove μ è una misura opportuna. Evidentemente se $f \in B_p(G)$ ha norma 1 allora è possibile scegliere ξ ed η tali che $\|\xi\|_X = \|\eta\|_{X^*} = 1$.

Teorema 1.2 (Herz [**5**]). « Sia G un gruppo localmente compatto ed H un suo sottogruppo. Allora per ogni $y \in G - \bar{H}$ e per ogni $f \in A_p(\bar{H})$ esiste $F \in A_p(G)$ tale che $\|F\|_{A_p(G)} = \|f\|_{A_p(\bar{H})}$; $F_{I\bar{H}} = f$; $F(y) = 0$. »

Teorema 1.3 (Cowling [**1**]). « Sia G un gruppo localmente compatto e sia $x \in G$. Sia H il sottogruppo di G generato da x e siano $y \in \bar{H} - H$ e $a \in (0, 1)$. Allora esiste $f \in A_p(\bar{H})$ tale che $\|f\|_{A_p(\bar{H})} = 1$; $f(e) = 1$; $f(x) = a$; $f(y) = 0$. »

Teorema 1.4 (Lohouè [7]$_1$). « Sia G un gruppo localmente compatto abeliano. Sia $f \in B_p(G)$ un operatore isometrico su $A_p(G)$. Allora esiste un carattere χ di G e un numero complesso λ di modulo 1 tale che $f = \lambda\chi$ ».

Teorema 1.5 (Lohouè [7]$_2$). « Sia $p \in [1, +\infty)$ e sia β: $Z \to K$ un monomorfismo di gruppi abeliani localmente compatti continuo, con immagine densa. Allora la mappa β^* che porta la funzione f definita su K nella funzione $f \circ \beta$ definita su Z applica $B_p(K)$ in $B_p(Z)$ conservando le norme ».

Osservazione. Sia G un gruppo localmente compatto abeliano, sia $x \in G$. Allora x^{-1} è l'unico elemento h in G tale che $f(h) = \overline{f(x)}$ per ogni $f \in B_p(G)$ con $\|f\|_{B_p(G)} = \|f^{-1}\|_{B_p(G)} = f(e) = 1$.

Dim. Per il Teorema 1.4, l'ipotesi dell'enunciato implica che $\chi(h) = \overline{\chi(x)}$ per ogni χ in $\hat{G}$ e, quindi, $h = x^{-1}$.

2 – In questo paragrafo, dopo qualche considerazione preliminare, si stabiliranno alcuni risultati sui moltiplicatori di $A_p(H)$, dove H è un gruppo localmente compatto discreto.

Sia G un gruppo localmente compatto e sia x in G. Sia $H = \{x^n : n \in Z\}$. Sia f in $B_p(H)$ tale che $\|f\|_{B_p(H)} = 1$, $f(e) = 1$, $f(x) = a \in \boldsymbol{C}$. Poichè $1 = \|f\|_{B_p(H)} \geqslant \|f\|_\infty \geqslant 1$, si ha $\|f\|_\infty = 1$ e $|a| \leqslant 1$. Per il Teorema 1.1 esistono uno spazio di Banach X uniformemente convesso, una rappresentazione T di H su X e due vettori ξ ed η rispettivamente in X e X^* tali che $f(x^n) = (T(x^n)\xi, \eta)$ n in

Z e $\|\xi\|_X = \|\eta\|_{X^*} = 1$. Poichè $f(e) = 1$, $f(x) = a$, si ha $(\xi, \eta) = 1$, $(T(x)\xi, \eta) = a$. Quindi

$$(e^{-i \arg a} T(x)\xi, \eta) = |a| \, (\frac{e^{-i \arg a} T(x)\xi + \xi}{2}, \eta) = \frac{1 + |a|}{2} = 1 - \frac{1 - |a|}{2} .$$

Ponendo $\delta_p(\varepsilon) = (1 - |a|)/2$, si ha $(e^{-i \arg a} T(x)\xi + \xi)/2, \eta) = 1 - \delta_p(\varepsilon)$. Quindi, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$\|\frac{e^{-i \arg a} T(x)\xi + \xi}{2}\|_X \geqslant 1 - \delta_p(\varepsilon) .$$

Applicando i risultati di Clarckson e Hanner si ottiene per valori di $\delta_p(\varepsilon)$ prossimi a 0, e cioè per valori di $|a|$ prossimi a 1, $\varepsilon \sim 2 \cdot (2\delta_p(\varepsilon)/(p-1))^{1/2}$ se $p \in (1, 2]$, $\varepsilon \sim 2(p\delta_p(\varepsilon))^{1/p}$ se $p \in (2, +\infty)$. Dall'uniforme convessità di X segue che $\|e^{-i \arg a} T(x)\xi - \xi\|_X \leqslant \varepsilon$, e precisamente, se a appartiene ad un intorno complesso sufficientemente piccolo di 1 si ha

$$\|e^{-i \arg a} T(x)\xi - \xi\|_X \leqslant \begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{1-|a|}{p-1}} & \text{se } p \in (1, 2] \\ 3\left(p\,\dfrac{1-|a|}{2}\right)^{1/p} & \text{se } p \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Poichè T è una rappresentazione isometrica, si ha

$$\|T(x)\xi - e^{-i \arg a}\xi\|_X \leqslant \begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{1-|a|}{p-1}} & \text{se } p \in (1, 2] \\ 3\left(p\,\dfrac{1-|a|}{2}\right)^{1/p} & \text{se } p \in (2, +\infty). \end{cases}$$

$$\|T(x^{-1})\xi - e^{-i \arg a}\xi\|_X \leqslant \begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{1-|a|}{p-1}} & \text{se } p \in (1, 2] \\ 3\left(p\,\dfrac{1-|a|}{2}\right)^{1/p} & \text{se } p \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Allora si ha pure

$$\|f(x^{-1})| - 1| \leqslant |(T(x^{-1})\xi - e^{-i \arg a}\xi, \eta)| \leqslant \begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{1-|a|}{p-1}} & \text{se } p \in (1, 2] \\ 3\left(p\,\dfrac{1-|a|}{2}\right)^{1/p} & \text{se } p \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Teorema 2.1. *Sia* $p \in (1, +\infty)$. *Sia* G *un gruppo localmente compatto, e sia* $x \in G$. *Sia* $H = \{x^n : n \in Z\}$. *Sia* $f \in B_p(H)$ *tale che* $\|f\|_{B_p(H)} = 1$, $f(e) = |f(x)| = 1$. Allora $f(x^n) = (f(x))^n$ per ogni $n \in Z$.

Dim. Sia $a \in \boldsymbol{C}$ con $|a| = 1$ e $f(x) = a$. Per quanto si è precedentemente osservato, si ha $T(x)\xi = a\xi$ e $T(x^{-1})\xi = a^{-1}\xi$. Per induzione, se $n \geqslant 1$ si ha $T(x^n)\xi = a^n\xi$ e $T(x^{-n})\xi = a^{-n}\xi$. Quindi $f(x^n) = (T(x^n)\xi, \eta) = a^n(\xi, \eta) = (f(x))^n$; $f(x^{-n}) = (T(x^{-n})\xi, \eta) = a^{-n}(\xi, \eta) = (f(x))^{-n}$; da cui segue la tesi.

Corollario 2.2. *Sia* $p \in (1, +\infty)$. *Sia* $f \in B_p(Z)$ *tale che* $\|f\|_{B_p(Z)} = 1$, $f(0) = f(1) = 1$. *Allora* $f(n) = 1$ *per ogni* $n \in Z$.

Teorema 2.3. *Sia* G *un gruppo localmente compatto e sia* $x \in G$. *Sia* $H = \{x^n : n \in Z\}$. *Sia* $f \in B_p(H)$ *tale che* $\|f\|_{B_p(H)} = 1$; $f(e) = 1$; $f(x) = a$, $a \in \boldsymbol{C}$. *Allora esiste un intorno complesso di* 1, U, *tale che se* $a \in U$ *valgono le seguenti disuguaglianze*

$$1 - 3|n|\sqrt{\frac{1-|a|}{p-1}} \leqslant |f(x^n)| \leqslant 1 \qquad n \in Z,\ p \in (1, 2]\,,$$

$$1 - 3|n|\left(p\,\frac{1-|a|}{2}\right)^{1/p} \leqslant |f(x^n)| \leqslant 1 \qquad n \in Z,\ p \in (2, +\infty)\,.$$

Dim. Sia $p \in (1, 2]$. Poichè H è un gruppo discreto, per il Teorema 1.1, esistono uno spazio di Banach X, una rappresentazione T di H su X e due vettori ξ ed η rispettivamente in X e X^* tali che $f(x^n) = (T(x^n)\xi, \eta)$; $\|\xi\|_X = \|\eta\|_{X^*} = 1$. Per quanto si è precedentemente osservato, esiste un intorno complesso U di 1 tale che se $a \in U$ si ha $|f(x^{-1})| \geqslant 1 - 3\sqrt{(1-|a|)/(p-1)}$. Sfruttando il fatto che T è una rappresentazione isometrica e per induzione su $n \geqslant 1$ si ha $|f(x^{\pm n})| \geqslant 1 - 3|n|\sqrt{(1-|a|)/(p-1)}$. La dimostrazione nel caso $p \in (2, +\infty)$ è analoga.

3 – In questo paragrafo si caratterizzano sia il sottogruppo di G generato da un suo elemento x, sia l'elemento x^{-1} utilizzando le algebre di Banach $A_p(G)$ e $B_p(G)$.

Teorema 3.1. *Sia* G *un gruppo localmente compatto,* $p \in (1, +\infty)$. *Sia* $x \in G$ e sia $H = \{x^n : n \in Z\}$. *Allora si ha* $G - H = \{y \in G$: *per ogni* $a \in (0, 1)$ *esiste* $f \in A_p(G)$ *con* $\|f\|_{A_p(G)} = 1$, $f(e) = 1$, $f(x) = a$, $f(y) = 0\}$.

Dim. Sia $y \in G - \bar{H}$ e sia $a \in (0, 1)$. È possibile determinare f in $A_p(H)$

tale che $\|f\|_{A_p(H)} = 1$, $f(e) = 1$, $f(x) = a$. Infatti sia χ la funzione caratteristica di $\{x^n\colon -n_0 \leqslant n \leqslant n_0\}$

$$\|\chi\|_{L^p(H)} = (2n_0 + 1)^{1/p}; \qquad \|\chi\|_{L^{p'}(H)} = (2n_0 + 1)^{1/p'}, \qquad \text{dove } (1/p) + (1/p') = 1 .$$

Sia infine $u = \chi/\|\chi\|_{L^p(H)}$ e $v = \chi/\|\chi\|_{L^{p'}(H)}$.

$$\begin{aligned} u * v(x^k) &= \int_H \frac{\chi(x^{k-n})\,\chi(x^n)}{(2n_0+1)}\, dx^n = 1/2n_0 + 1 \int_{\{x^n\colon -n_0 \leqslant n \leqslant n_0\}} \chi(x^{k-n})\, dx^n \\ &= 1 - \frac{K}{2n_0+1} \qquad \text{se } 0 \leqslant k \leqslant 2n_0 \\ &= 0 \qquad \text{se } k > 2n_0 \\ &= 1 + \frac{k}{2n_0+1} \qquad \text{se } -2n_0 \leqslant k \leqslant 0 \\ &= 0 \qquad \text{se } k < -2n_0 . \end{aligned}$$

Se $n_0 \in N$ è tale che $1 - 1/(2n_0 + 1) = a$, si ha

(0) $u * v \in A_p(H)$;
(1) $\|u * v\|_{A_p(H)} = 1$; infatti $u * v(e) = 1 \leqslant \|u * v\|_{A_p(H)} \leqslant 1$;
(2) $u * v(x) = 1 - 1/(2n_0 + 1) = a$.

Allora, per i Teoremi 1.2 e 1.3, esiste $F \in A_p(G)$ tale che $\|F\|_{A_p(G)} = 1$ $F_{|\bar{H}} = f$ $F(y) = 0$. Si ha inoltre $F(e) = 1$, $F(x) = a$.

Nel caso in cui $H \subset \bar{H}$ si supponga che $y \in \bar{H} - H$ e sia $a \in (0, 1)$. Allora, per il Teorema 1.3, esiste $f \in A_p(\bar{H})$ tale che $\|f\|_{A_p(\bar{H})} = 1$, $f(e) = 1$, $f(x) = a$, $f(y) = 0$. Per il Teorema 1.2, esiste $F \in A_p(G)$ tale che $\|F\|_{A_p(G)} = 1$, $F/\bar{H} = f$. Quindi $F(e) = 1$, $F(x) = a$, $F(y) = 0$. Si è dunque dimostrato che $G - H \subseteq \{y \in G\colon$ per $a \in (0, 1)$ esiste $f \in A_p(G)$ con $\|f\|_{A_p(G)} = 1$, $f(e) = 1$, $f(x) = a$, $f(y) = 0\}$. Sia ora $y \in G$ tale che per ogni $a \in (0, 1)$ esiste $f \in A_p(G)$ con $\|f\|_{A_p(G)} = 1$, $f(e) = 1$, $f(x) = a$, $f(y) = 0$. Si supponga per assurdo che esista $n \in Z$ tale che $y = x^n$. È noto che $f_{|\bar{H}} \in B_p(\bar{H})$ e poichè $\|f_{|\bar{H}}\|_{B_p(\bar{H})} \leqslant 1$ e $f(e) = 1$ si ha $\|f_{|\bar{H}}\|_{B_p(\bar{H})} = 1$. Si può allora applicare il risultato del Teorema 1.5 dove $Z = H$, $K = \bar{H}$, e β l'inclusione di H in $\bar{H}$. Allora si ha $\beta^*\colon B_p(\bar{H}) \to B_p(H)$ conserva le norme e $\beta^*(f_{|\bar{H}}) \in B_p(H)$, $\|\beta^*(f_{|\bar{H}})\|_{B_p(H)} = 1$, poichè $\beta^*(f_{|\bar{H}})(e) = 1$, $\beta^*(f_{|\bar{H}})(x) = f_{|\bar{H}}(x) = f(x) = a$. Per il Teorema 2.3, esiste un intorno complesso U

di 1 tale che se $a \in U$ si ha

$$1-3|n|\sqrt{\frac{1-|a|}{p-1}} \leqslant |\beta^*(f_{|\bar{H}})(x^n)| = |f(y)| = 0 \qquad \text{se } p \in (1, 2]\,,$$

$$1-3|n|\left(p\frac{1-|a|}{2}\right)^{1/p} \leqslant |\beta^*(f_{|\bar{H}})(x^n)| = |f(y)| = 0 \qquad \text{se } p \in (2, +\infty)\,.$$

Poichè tali disuguaglianze debbono essere soddisfatte per ogni $a \in U \cap (0, 1)$ si ottiene una contraddizione e ciò completa la dimostrazione.

Dato un elemento x del gruppo G si può caratterizzare x^{-1} nel seguente modo. Si supponga dapprima che $\bar{H} = \overline{\{x^n : n \in Z\}}$ sia compatto. È noto allora che $A_p(\bar{H}) = B_p(\bar{H}) = A_p(G)_{|\bar{H}}$. Sia $I_p(\bar{H}) = \{f \in B_p(\bar{H}) : \|f\|_{B_p(\bar{H})} = \|f^{-1}\|_{B_p(\bar{H})} = 1, f(e) = 1\}$ (¹). Si supponga ora che $\bar{H}$ non sia compatto. Ciò implica che $H = \bar{H}$ (v. [**6**]). Poichè, assegnato l'elemento x in G, è possibile caratterizzare il sottogruppo $H = H(e, x)$ generato da x, si può caratterizzare x^{-1} come l'unico elemento z di H, $z \neq x$, tale che $H(e, z) = H$. Ciò perchè se $z = x^n$, con $|n| > 1$, allora $H(e, z) \neq H(e, x)$.

4 - In questo paragrafo, dati due elementi x e z in G, si caratterizzano la più piccola classe laterale destra contenente x e z e l'elemento $xz^{-1}x$ sempre utilizzando le algebre di Banach $A_p(G)$ e $B_p(G)$.

Sia $H = H(e, zx^{-1})$ il sottogruppo di G generato da zx^{-1}. È ovvio che $y \in Hx$ se e solo se $yx^{-1} \in H$. Per il Teorema 3.1, si ha $G - H = \{y \in G$: per ogni $a \in (0, 1)$ esiste $f \in A_p(G)$ $\|f\|_{A_p(G)} = 1$, $f(zx^{-1}) = a$, $f(e) = 1$, $f(y) = 0\}$. Sia $\varrho(x)$ l'operatore di traslazione a destra così definito: $(\varrho(x)f((w) = f(wx)$. Poichè $A_p(G)$ è invariante per traslazioni, si ha

$$f \in A_p(G)\,, \quad \|f\|_{A_p(G)} = 1\,, \quad f(e) = 1\,, \quad f(zx^{-1}) = a\,, \quad f(yx^{-1}) = 0$$

se e solo se $\varrho(x^{-1})f \in A_p(G)$, $\|\varrho(x)f\|_{A_p(G)} = 1$, $(\varrho(x^{-1})f)(x) = 1$, $(\varrho(x^{-1})f)(y) = 0$, $(\varrho(x^{-1})f)(z) = a$. Allora si ha $y \notin Hx$ se e solo se $yx^{-1} \notin H$ se e solo se per ogni $a \in (0, 1)$ esiste $f \in A_p(G)$ $\|f\|_{A_p(G)} = 1$, $f(e) = 1$, $f(zx^{-1}) = a$, $f(yx^{-1}) = 0$. Quindi la classe laterale $Hx = CL(x, z)$ può essere caratterizzata nel modo seguente: $G - CL(x, z) = \{y \in G$: per ogni $a \in (0, 1)$ esiste $f \in A_p(G)$, $\|f\|_{A_p(G)} = 1$, $f(x) = 1$, $f(z) = a$, $f(y) = 0\}$.

Si supponga dapprima che $\bar{H}$ sia compatto, il che equivale a supporre che $\overline{CL(x, z)}$

(¹) Per il Teorema 1.6 e poichè $B_p(\bar{H}) = A_p(G)|_{\bar{H}}$, si ha che x^{-1} è l'unico elemento z di $\bar{H}$: $f(z) = \overline{f(x)}$ per ogni $f \in I_p(G) = \{f \in A_p(G) : \|f\|_{A_p(G)|\bar{H}} = \|f^{-1}\|_{A_p(G)|\bar{H}} = f(e) = 1\}$.

sia compatto. Allora, per quanto osservato in **3**, xz^{-1} è l'unico elemento h di $\bar{H}$ tale che $f(h) = \overline{f(zx^{-1})}$ per ogni $f \in I_p(G)$, dove $I_p(G) = \{f \in A_p(G) : \|f\|_{A_p(G)|\bar{H}} = \|f^{-1}\|_{A_p(G)|\bar{H}} = 1,\ f(e) = 1\}$ oppure, equivalentemente, xz^{-1} è l'unico h di $\bar{H}$ tale che $f(hx) = \overline{f(z)}$ per ogni $f \in I_p'(G)$, dove $I_p'(G) = \{f \in A_p(G) : \|f\|_{A_p(G)|\bar{H}} = \|f^{-1}\|_{A_p(G)|\bar{H}} = 1,\ f(x) = 1\}$. Quindi, $xz^{-1}x$ è l'unico elemento z^* di $\overline{CL(x, z)}$ tale che $f(z^*) = \overline{f(z)}$ per ogni $f \in I_p'(G)$. Si supponga, invece, che $\overline{CL(x, z)}$ non sia compatto. Allora, se H è il sottogruppo generato da zx^{-1}, si ha pure che $\bar{H}$ è non compatto. Inoltre xz^{-1} è l'unico elemento h di $h \neq zx^{-1}$, tale che se $H(e, h)$ è il sottogruppo generato da h, $H = H(e, h)$. Allora $xz^{-1}x$ è l'unico elemento z^* di $CL(x, z)$, $z^* \neq z$, tale che $CL(x, z^*) = CL(x, z)$.

5 – Siano G_1 e G_2 due gruppi localmente compatti con identità e_1 e e_2 rispettivamente. Si supponga che esista un isomorfismo isometrico di algebre di Banach $i: A_p(G_1) \to A_p(G_2)$ con $p \in (1, +\infty)$. È noto che lo spazio degli ideali massimali di $A_p(G_i)$ è omeomorfo a G_i e quindi i due gruppi G_1 e G_2 risultano omeomorfi come spazi topologici (v. [2]). Quindi se $x \in G_1$, x può essere visto come funzionale moltiplicativo su $A_p(G_1)$, cosicchè, indicato con (x, u) il valore che questo funzionale moltiplicativo assume su $u \in A_p(G_1)$, si può definire $\varphi(x)$ in G_2 come quel funzionale moltiplicativo su $A_p(G_2)$ tale che per ogni $v \in A_p(G_2)$, $(\varphi(x), v) = (x, i^{-1}(v))$. È stata così definita una mappa $\varphi: G_1 \to G_2$ tale che, a meno di traslazioni, $\varphi(e_1) = e_2$. Sia ora $x_1 \in G_1$ e sia $H = \{x_1^n : n \in Z\}$. Allora $f \in A_p(G_1)$, $\|f\|_{A_p(G_1)} = 1$, $f(e_1) = 1$, $f(x_1) = a$, $f(y) = 0$ se e solo se $i(f) \in A_p(G_2)$, $\|i(f)\|_{A_p(G_2)} = 1$, $i(f)(\varphi(e_1)) = (\varphi(e_1), i(f)) = f(e_1) = 1$, $i(f)(\varphi(x_1)) = (\varphi(x_1), i(f)) = f(x_1) = a$, $i(f)(\varphi(y)) = (\varphi(y), i(f)) = f(y) = 0$. È stato provato che $y \in G_1 - H_1$ se e solo se per ogni $a \in (0, 1)$ esiste f in $A_p(G_1)$, $\|f\|_{A_p(G_1)} = 1$, $f(e_1) = 1$, $f(x_1) = a$, $f(y) = 0$. Quindi si ha che se $H_2 = \{(\varphi(x_1))^n : n \in Z\}$, allora $\varphi(H_1) = H_2$. In modo analogo si prova che se x, z sono due elementi di G_1 allora $\varphi(CL(x, z)) = CL(\varphi(x), \varphi(z))$. Se $\overline{CL(x, z)}$ è compatto, $xz^{-1}x$ è l'unico elemento z^* di $\overline{CL(x, z)}$ tale che $f(z^*) = \overline{f(z)}$, per ogni $f \in A_p(G_1)$, $\|f\|_{A_p(G_1)|\bar{H}_1} = \|f^{-1}\|_{A_p(G_1)|\bar{H}_1} = f(x) = 1$. Allora $\varphi(xz^{-1}x)$ è l'unico elemento $\varphi(z^*)$ di $\varphi(\overline{CL(x, z)})$ tale che $i(f)(\varphi(z^*)) = \overline{i(f)(\varphi(z))}$ per ogni $i(f) \in A_p(G_2)$, $\|i(f)\|_{A_p(G_2)|\bar{H}_2} = \|i(f)^{-1}\|_{A_p(G_2)|\bar{H}_2} = i(f)(\varphi(x)) = 1$. Poichè $\varphi(\overline{CL(x, z)}) = \overline{CL(\varphi(x), \varphi(z))}$, si ha che $\varphi(xz^{-1}x) = \varphi(x)\varphi(z)^{-1}\varphi(x)$. Se $\overline{CL(x, z)}$ non è compatto, si ha che $xz^{-1}x$ è l'unico elemento z^* di $CL(x, z)$ $z^* \neq z$, $CL(x, z^*) = CL(x, z)$. Allora $\varphi(xz^{-1}x)$ è l'unico elemento $\varphi(z^*)$ di $\varphi(CL(x, z))$, $\varphi(z^*) \neq \varphi(z)$, tale che $\varphi(CL(x, z^*)) = \varphi(CL(x, z))$. Poichè $\varphi(CL(x, z^*)) = CL(\varphi(x), \varphi(z^*))$ e $\varphi(CL(x, z)) = CL(\varphi(x), \varphi(z))$, si ha ancora $\varphi(xz^{-1}x) = \varphi(x)\varphi(z)^{-1}\varphi(x)$. Sia $x = e_1$, allora si ha $\varphi(z^{-1}) = \varphi(z)^{-1}$. In definitiva, si è provato che la mappa $\varphi: G_1 \to G_2$ soddisfa le seguenti proprietà:

(0) φ è bigettiva;
(i) $\varphi(e_1) = e_2$;
(ii) $\varphi(xzx) = \varphi(x)\varphi(z)\varphi(x)$ per ogni x, z in G_1;
(ii′) $\varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$ per ogni x in G_1 e per ogni n in Z.

Per induzione su n si prova che (ii) $\Rightarrow$ (ii′).

Si può concludere tale paragrafo con la seguente

Congettura. *Sia $p \in (1, +\infty)$. Siano G_1 e G_2 due gruppi localmente compatti tali che $A_p(G_1)$ e $A_p(G_2)$ siano isomorfi isometricamente come algebre di Banach. Allora G_1 e G_2 sono isomorfi o anti-isomorfi come gruppi topologici.*

Bibliografia

[1] M. Cowling, Comunicazione personale.

[2] P. Eymard, *Algebres A_p et convoluteurs de L^p*, Seminaire Bourbaki, 22-ème année, n. 367 (1969/'70).

[3] G. Fendler, Preprint.

[4] A. Figà-Talamanca and G. I. Gaudry, *Density and representation theorems for multipliers of type (p, q)*, J. Austral. Math. Soc. (1965), 1-6.

[5] C. Herz, *Harmonic synthesis for subgroups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23** (1973), 91-123.

[6] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis* (I), Springer-Verlag, Berlin 1963.

[7] N. Lohouè: $[\cdot]_1$ *Sur certaines propriétés remarquables des algèbres $A_p(G)$*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **273** (1971), 893-896; $[\cdot]_2$ *La synthesis des convoluteurs sur un groupe abélien localment compact*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **272** (1971), 27-29.

[8] M. E. Walter, *A duality between locally compact groups and certain Banach algebras*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 131-160.

Abstract

In this work we study Banach algebras A_p and we obtain some characterizations of certain elements of the locally compact group G.

* * *