Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 329-343

S. Donnini e V. Mangione (*)

Sulle varietà dotate di una struttura di tipo (V) secondo H. Wakakuwa (**)

1 - Introduzione

Su una varietà differenziabile M di dimensione pari dotata di una struttura di tipo (V) secondo H. Wakakuwa si studia la sottoalgebra $\mathscr{A}$ dell'algebra dei campi di tipo (1.1) definiti su M, generata dalle tre strutture quasi complesse costituenti la struttura di tipo (V).

In **2** si mettono anzitutto in luce alcuni legami fra le strutture del tipo sopra accennato con quelle costituite da due strutture quasi complesse indipendenti e commutanti fra loro [1].

In **4**, dopo un numero dedicato a varie proprietà relative alle algebre del tipo $\oplus^m$ C (prop. $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$, in **3**), si dimostra che la dimensione di $\mathscr{A}$ può essere 6 o 8 e che la sottoalgebra $\mathscr{A}$ risulta, in corrispondenza, isomorfa alle algebre $\oplus^3$ C, $\oplus^4$ C (teoremi $\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$). Il teorema $\mathbf{T}_4$ fornisce un criterio per l'esistenza su M di una struttura di tipo (V) oltre ad invertire, di fatto, il teorema $\mathbf{T}_3$.

Le strutture quasi complesse e quasi prodotto di M appartenenti ad $\mathscr{A}$ vengono individuate ed espresse, in **6**, in funzione delle tre strutture quasi complesse costituenti la struttura di tipo (V) generante $\mathscr{A}$. Risulta inoltre indi-

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.

(**) Ricerca effettuata nell'ambito del Progetto « Geometria delle varietà differenziabili » con fondi M.P.I. Ricevuto: 20-XII-1983.

(1) Si tratta delle strutture di tipo (III) secondo H. Wakakuwa; la sottoalgebra generata dalle due strutture quasi complesse è stata in particolare studiata in [**4**]. Ved. anche [**5**], p. 394.

viduato il numero massimo di strutture dei tipi sopra richiamati, linearmente indipendenti in $\mathscr{A}$ (teoremi $\mathbf{T}_5, \mathbf{T}_6, \mathbf{T}_7$). Sempre in **6** si mostra infine in quanti modi la varietà M, dotata di una struttura di tipo (V), possa essere vista come varietà quasi complessa-prodotto di 1° o 2° tipo (oss. $\mathbf{O}_1$).

In **7** viene introdotta una classificazione per le strutture di tipo (V) (*strutture di tipo* (V) *di prima e di seconda specie*). Le due classi di strutture definite a partire dalle dimensioni ammissibili per la sottoalgebra $\mathscr{A}$ generata da ogni struttura di tipo (V), risultano caratterizzabili in vario modo con condizioni non lineari sulle strutture quasi complesse che le costituiscono (oss. $\mathbf{O}_2$, teorema $\mathbf{T}_9$). La classificazione proposta viene poi collegata in vario modo con la nozione di *dimensione dell'insieme delle strutture quasi complesse di una varietà* introdotta in [**5**]; in particolare, se tale dimensione risulta, su M, esattamente 3, allora le uniche strutture di tipo (V) ammissibili su M sono quelle di prima specie (teorema $\mathbf{T}_8$). Tale risultato riesce di completamento e precisazione al Teorema 6.1 di [**5**] e, insieme al corollario $\mathbf{C}_2$, fornisce una ulteriore caratterizzazione per le strutture di tipo (V) di prima specie.

2 - Preliminari e strutture di tipo (V) su M

Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$ $(n\geqslant 2)$ e classe C^r $(r\geqslant 2)$, $\mathscr{F}$ l'algebra delle funzioni differenziabili di classe C^∞ definite su M a valori reali e $\mathscr{D}^r_s$ l'$\mathscr{F}$-modulo dei campi tensoriali di tipo (r, s); in particolare gli elementi di $\mathscr{D}^1_1$ possono pensarsi come endomorfismi di $\mathscr{D}^1_0$ e quindi $\mathscr{D}^1_1$, rispetto all'ordinaria composizione di endomorfismi, ha la struttura di *algebra su* R (2).

Gli elementi J di $\mathscr{D}^1_1$ tali che $J^2 = -I$, dove $I \in \mathscr{D}^1_1$ è l'endomorfismo identico di $\mathscr{D}^1_0$, definiscono altrettante *strutture quasi complesse di* M (3).

Nel seguito la varietà M sarà dotata di una *struttura di tipo* (V) *secondo H. Wakakuwa*; in altri termini, si supporrà esistano su M *tre strutture quasi complesse* J_1, J_2, J_3, *linearmente indipendenti sui reali e commutanti fra loro* (4).

Ognuna delle sottoalgebre $\mathscr{A}_{ij} = \langle J_i, J_j\rangle$ di $\mathscr{D}^1_1$ generate da una coppia di strutture quasi complesse linearmente indipendenti e commutanti fra loro J_i e J_j *ha*, come è noto, *dimensione* 4 e risulta isomorfa a $\oplus^2 \mathsf{C}$ (5). La varietà M è allora rispetto alla coppia di strutture J_i e J_j $(i, j = 1, 2, 3)$, *una varietà quasi complessa-prodotto del* 2° *tipo* (6); sussiste il teorema

(2) Ved. p.e. [**2**], vol. I.

(3) Cfr. nota precedente, vol. II, p. 121.

(4) Ved. [**5**], p. 400.

(5) Ved. [**4**], p. 350, lemma $\mathbf{L}_1$ e teorema $\mathbf{T}_1$: Una base per tale sottoalgebra è costituita dagli elementi I, J_i, J_j, J_iJ_j.

(6) Ved. [**5**], p. 394; [**4**], p. 355. Ved. anche nota (1).

T_1. *Nella sottoalgebra* $\mathcal{A}_{ij} = \langle J_i, J_j \rangle$, *non esistono strutture quasi complesse distinte da* $\pm J_i$, $\pm J_j$.

Indicata poi con J_3 una terza struttura quasi complessa di M, in aggiunta ad una coppia J_1, J_2 del tipo considerato in **T_1**, conviene notare esplicitamente che

C_1. *Le condizioni*: (a) J_3 *è distinto da* $\pm J_1$, $\pm J_2$, (b) J_3 *non appartiene a* $\mathcal{A}_{12}$, (c) J_1, J_2, J_3 *sono linearmente indipendenti, sono fra loro equivalenti.*

Inoltre, se J_3 *commuta con* J_1 *e* J_2, *ognuna delle precedenti condizioni equivale alla condizione*: (d) J_1, J_2, J_3 *costituiscono una struttura di tipo* (V) *secondo H. Wakakuwa.*

Per **T_1**, espresso il generico elemento α di $\mathcal{A}_{ij}$ come combinazione lineare di I, J_i, J_j, J_iJ_j (7), gli α per i quali $\alpha^2 = -I$ risultano individuati, come è facile verificare per via diretta, dai coefficienti reali $(0, \pm 1, 0, 0)$ $(0, 0, \pm 1, 0)$, in armonia con l'enunciato.

C_1 segue da **T_1** e dalla definizione data all'inizio del numero.

3 - Le algebre del tipo $\oplus^m \mathsf{C}$

Intervengono nel seguito algebre isomorfe a $\oplus^3 \mathsf{C}$ e $\oplus^4 \mathsf{C}$ e, di queste ultime, risulterà utile la considerazione degli elementi antiinvolutori, involutori e di alcune loro proprietà. Indichiamo allora con x, y generici elementi di $\oplus^m \mathsf{C}$: la individuazione degli elementi antiinvolutori, involutori di $\oplus^m \mathsf{C}$ equivale a risolvere, ordinatamente, le equazioni

$$x^2 = -1\,, \qquad y^2 = 1\,, \tag{1}$$

avendo indicato con 1 l'elemento unitario di $\oplus^m \mathsf{C} = \mathsf{C}_1 \oplus \mathsf{C}_2 \oplus \dots \oplus \mathsf{C}_m$, con $\mathsf{C}_1 = \mathsf{C}_2 = \dots = \mathsf{C}_m = \mathsf{C}$ (8). Tenuto conto della decomposizione che caratterizza gli elementi di $\oplus^m \mathsf{C}$, gli elementi soddisfacenti le (1) risultano essere tutti e soli quelli del tipo

$$\bar{J} = \pm i_1 \pm \dots \pm i_m\,, \qquad \bar{\bar{H}} = \pm 1_1 \pm \dots \pm 1_m; \tag{2}$$

segue subito, inoltre, che sia gli elementi antiinvolutori che gli involutori di $\oplus^m \mathsf{C}$ sono in numero di 2^m, ordinatamente, a due a due opposti fra loro.

(7) Cfr. nota (5).
(8) Ved. p.e. [1], p. 106.

Tutto quanto precede conduce anzitutto alla

P$_1$. *Gli elementi antiinvolutori, involutori di* $\oplus^m \mathsf{C}$ *sono ordinatamente espressi, tutti e soli, dalle* (2). *Sia gli uni che gli altri risultano in numero di* 2^m *e opposti due a due.*

Facendo poi uso delle (2), ricordata la commutatività del prodotto e la natura antiinvolutoria degli elementi considerati è immediato riconoscere che

P$_2$. *L'insieme degli elementi antiinvolutori di* $\oplus^m \mathsf{C}$ *è chiuso rispetto al prodotto di un numero dispari qualsiasi di elementi. Risulta, allo stesso modo, chiuso ogni suo sottoinsieme formato da tre elementi distinti e dal loro prodotto. Il prodotto di un numero pari di elementi appartiene, invece, all'insieme degli elementi involutori* (9).

Sulla lineare dipendenza o indipendenza di sottoinsiemi di elementi antiinvolutori o involutori, rispetto a coefficienti reali, conviene infine mettere in evidenza le proprietà

P$_3$. *In* $\oplus^m \mathsf{C}$ *esistono (al più) m-uple di elementi antiinvolutori, involutori linearmente indipendenti.*

P$_4$. *In* $\oplus^m \mathsf{C}$, *coppie (terne) di elementi distinti antiinvolutori, involutori sono linearmente dipendenti se e solo se sono costituite da (contengono una coppia di) elementi opposti.*

L'esistenza di m-uple del tipo indicato in **P**$_3$, linearmente indipendenti, è garantita, p.e., dalla considerazione delle m-uple di elementi individuate, tenuto conto delle (2), dalla matrice di ordine m

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & -1 \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 \cdots & -1 \end{pmatrix} .$$

Essa risulta infatti di rango massimo e pertanto individua m-uple del tipo cercato.

(9) Tale insieme risulta un gruppo abeliano rispetto al prodotto. Anche per gli elementi ad esso appartenenti sussiste la seconda affermazione di **P**$_2$.

Un qualsiasi sottoinsieme di elementi antinvolutori (involutori) distinti a cui appartenga una coppia di elementi opposti riesce linearmente dipendente; per completare la dimostrazione di $\mathbf{P}_3$ è quindi sufficiente far vedere che per la generica $m+1$-upla $\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_{m+1}$ $(\bar{H}_1, \dots, \bar{H}_{m+1})$ di elementi antiinvolutori (involutori) distinti, priva di coppie di elementi opposti, la $d_1\bar{J}_1 + \dots + d_{m+1}\bar{J}_{m+1} = 0$ $(d_1\bar{H}_1 + \dots + d_{m+1}\bar{H}_{m+1} = 0)$, con $0 = 0_1 + \dots + 0_m$, può sussistere con i $d_j \in R$ non tutti nulli. Tenute presenti le (2), a partire dalle relazioni precedenti, si perviene, in entrambi i casi, ad un sistema omogeneo nelle $m+1$ incognite d_j ed in m equazioni che, indipendentemente dalla $m+1$-upla di elementi $\bar{J}_j(\bar{H}_j)$ scelta, risulta al più di rango m. Esistono pertanto delle autosoluzioni e quindi gli $\bar{J}_j(\bar{H}_j)$ risultano linearmente dipendenti. In tal modo $\mathbf{P}_3$ è provata.

Per provare $\mathbf{P}_4$ siano dapprima $\bar{J}_1, \bar{J}_2$ due elementi antiinvolutori distinti di $\oplus^m \mathsf{C}$. Se è $\bar{J}_1 = a\bar{J}_2$, $a \in R$, tenuto conto del carattere antiinvolutorio di $\bar{J}_1$ e $\bar{J}_2$ segue subito $a = \pm 1$; considerati invece tre elementi $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$ antiinvolutori, se risulta, p.e., $\bar{J}_1 = a\bar{J}_2 + b\bar{J}_3$, segue $(1 - a^2 - b^2)\bar{J}_2 - 2ab\bar{J}_3 = 0$. Ne risulta la dipendenza lineare di $\bar{J}_2$ e $\bar{J}_3$ o, per i valori che annullano i coefficienti nel caso in cui $\bar{J}_2$ e $\bar{J}_3$ risultino linearmente indipendenti, la dipendenza di $\bar{J}_1$ e $\bar{J}_2$ o $\bar{J}_1$ e $\bar{J}_3$. Tenuto conto della prima parte di $\mathbf{P}_4$, segue l'asserto.

4 - L'algebra $\mathscr{A} = \langle J_1, J_2, J_3 \rangle$

Siano ora J_1, J_2, J_3 le tre strutture quasi complesse costituenti una struttura di tipo (V) secondo H. Wakakuwa ed $\mathscr{A}$ la sottoalgebra di $\mathscr{D}_1^1$ da esse generata.

Tenuto conto della nota [5] e della prima parte di $\mathbf{C}_1$ (v. 2), si può anzitutto notare che *gli elementi I, J_1, J_2, J_1J_2, J_3 di $\mathscr{A}$ risultano linearmente indipendenti.* Si consideri ora l'elemento J_1J_3 e si supponga sussista la

$$J_1J_3 = aI + bJ_1 + cJ_2 + dJ_1J_2 + eJ_3\,, \tag{3}$$

con a, b, c, d, e reali opportuni non tutti nulli. Moltiplichiamo per J_1 ambo i membri della (3), si ha

$$J_3 = -aJ_1 + bI - cJ_1J_2 + dJ_2 - eJ_1J_3\,. \tag{4}$$

Sostituendo la (3) nella (4) e raccogliendo opportunamente risulta la $(1+e^2)J_3 + (ae - b)I + (a + be)J_1 + (ce - d)J_2 + (c + de)J_1J_2 = 0$ che, essendo $1 + e^2 \neq 0$, contrasta con la già affermata indipendenza lineare degli elementi di $\mathscr{A}$

che in essa compaiono. La (3) non può quindi sussistere; ne risulta perciò il lemma [10]

L$_1$. *I campi tensoriali* $I, J_1, J_2, J_1J_2, J_3, J_1J_3$ *sono linearmente indipendenti.*

Ciò premesso, un primo tipo di risultati riguardanti la dimensione dell'algebra $\mathscr{A}$ è espresso dal teorema

T$_2$: *La sottoalgebra* $\mathscr{A}$ *di* $\mathscr{D}_1^1$ *è di dimensione* 6, *se e solo se sussiste una delle seguenti condizioni:*

$$J_2J_3 = I + J_1J_2 + J_1J_3 \tag{5.1}$$

$$J_2J_3 = I - J_1J_2 - J_1J_3 \tag{5.2}$$

$$J_2J_3 = -I + J_1J_2 - J_1J_3 \tag{5.3}$$

$$J_2J_3 = -I - J_1J_2 + J_1J_3; \tag{5.4}$$

è di dimensione 8, *se e solo se non sussiste alcuna delle* (5.i), i = 1, 2, 3, 4.

Un secondo tipo di risultati riguardanti alcune notevoli algebre isomorfe ad $\mathscr{A}$ è espresso dal teorema

T$_3$. *La sottoalgebra* $\mathscr{A}$ *di* $\mathscr{D}_1^1$ *è isomorfa a* $\oplus^3 \mathsf{C}$, *se è di dimensione* 6, *mentre è isomorfa a* $\oplus^4 \mathsf{C}$, *se è di dimensione* 8.

In particolare, **T**$_3$ generalizza in parte un noto teorema relativo al caso di due strutture quasi complesse indipendenti e commutanti fra loro su M [11].

Conviene terminare questo numero proponendo un risultato relativo alla esistenza su M di strutture di tipo (V) secondo H. Wakakuwa e che inverte di fatto il teorema **T**$_3$. Precisamente sussiste il teorema

T$_4$. *Se esiste in* $\mathscr{D}_1^1$ *una sottoalgebra isomorfa a* $\oplus^3 \mathsf{C}$ *o a* $\oplus^4 \mathsf{C}$, *allora su* M *esiste una struttura di tipo* (V) *secondo H. Wakakuwa.*

---

[10] Come risulta evidente dalle considerazioni che lo precedono, **L**$_1$ sussiste indipendentemente dalla commutatività delle tre strutture.

[11] Ved. [4], teor. **T**$_1$, caso (a), p. 352.

5 - Dimostrazioni

Ognuna delle condizioni (5.i), i = 1, 2, 3, 4 di $\mathbf{T}_2$ è sufficiente; è infatti immediato da ognuna di esse dedurre che il campo tensoriale $J_1J_2J_3$ è combinazione lineare di J_1, J_2, J_3; ne segue che il prodotto di due qualsiasi combinazioni lineari di $I, J_1, J_2, J_3, J_1J_2, J_1J_3$ è ancora una loro combinazione lineare. Per $\mathbf{L}_1$ segue allora l'asserto.

Viceversa, supposto che $\mathscr{A}$ sia di dimensione 6 e tenuto conto di $\mathbf{L}_1$, si dovrà in particolare avere

$$J_2J_3 = aI + bJ_1 + cJ_2 + dJ_1J_2 + eJ_3 + fJ_1J_3\,, \tag{6}$$

con a, b, c, d, e, f elementi opportuni di R. Moltiplicando ambo i membri della (6) per J_1, J_3, si ottengono, rispettivamente, le identità

$$J_1J_2J_3 = aJ_1 - bI + cJ_1J_2 - dJ_2 + eJ_1J_3 - fJ_3\,, \tag{7}$$

$$-J_2 = aJ_3 + bJ_1J_3 + cJ_2J_3 + dJ_1J_2J_3 - eI - fJ_1\,. \tag{8}$$

Dalle (6), (7), (8) segue $(ac - bd - c)I + (bc + ad - f)J_1 + (1 + c^2 - d^2)J_2 + 2cdJ_1J_2 + (a + ce - df)J_3 + (b + cf + de)J_1J_3 = 0$.

Per il lemma $\mathbf{L}_1$ deve essere allora, in particolare, $cd = 0$. Se fosse $d = 0$, seguirebbe anche $1 + c^2 = 0$, il che è impossibile. Deve dunque essere $c = 0$ e quindi $d = \pm 1$. Moltiplicando la (6) per J_2 e tenendo conto che $c = 0$ si ottiene

$$-J_3 = aJ_2 + bJ_1J_2 - dJ_1 + eJ_2J_3 + fJ_1J_2J_3\,. \tag{9}$$

Dalla (9) e dalle (6) e (7) per $c = 0$ si ottiene

$$(ae - bf)I + (be - d + af)J_1 + (a - df)J_2 + (b + de)J_1J_2 + (1 + e^2 - f^2)J_3 + 2efJ_1J_3 = 0\,.$$

Sempre per $\mathbf{L}_1$, deve essere allora, in particolare, $ef = 0$. Per $f = 0$ seguirebbe $1 + e^2 = 0$, il che è impossibile. Dunque sarà $e = 0$. Ma deve essere anche $b + de = 0$ e quindi segue che $b = 0$, oltre che essere $f = \pm 1$. La (6) si riduce allora alla

$$J_2J_3 = aI + dJ_1J_2 + fJ_1J_3 \tag{10}$$

con $d, f = \pm 1$. Essendo J_2J_3 involutorio si deve avere allora

$$(a^2 + d^2 + f^2 - 1)I + 2adJ_1J_2 + 2afJ_1J_3 - 2fdJ_2J_3 = 0\,. \tag{11}$$

Dalle (10) e (11) segue

$$(a^2 + d^2 + f^2 - 1 - 2adf)I + 2d(a - df)J_1J_2 + 2f(a - df)J_1J_3 = 0 .$$

Sempre per il lemma $\mathbf{L}_1$, i coefficienti che figurano nella relazione precedente devono essere identicamente nulli. Ricordando che $d, f = \pm 1$, deve allora essere $a = df$. Da ciò segue allora $a^2 + 1 - 2a^2 = 0$ e quindi $a = \pm 1$. Dalle condizioni $a, d, f = \pm 1$ e dalla $a = df$, tenuto conto della (10), seguono le (5.i).

Per provare la seconda parte di $\mathbf{T}_2$, conviene anzitutto osservare che dalla parte or ora dimostrata può in particolare dedursi che *i campi tensoriali* $I, J_1, J_2, J_3, J_1J_2, J_1J_3, J_2J_3$ *sono linearmente dipendenti se e solo se sussiste una delle* (5.i). Se $\mathscr{A}$ ha dimensione 8, allora, necessariamente, non può sussistere alcuna delle (5.i).

Viceversa, se non sussiste alcuna delle (5.i), per quanto ricordato poco sopra, $\mathscr{A}$ ha almeno dimensione 7, in quanto $I, J_1, J_2, J_3, J_1J_2, J_1J_3, J_2J_3$ sono linearmente indipendenti. Se si suppone $J_1J_2J_3$ dipendente da essi si avrebbe, poi,

$$J_1J_2J_3 = aI + bJ_1 + cJ_2 + dJ_1J_2 + eJ_3 + fJ_1J_3 + gJ_2J_3 , \tag{12}$$

con a, b, c, d, e, f, g opportuni elementi di R, non tutti nulli. Moltiplicando ambo i membri della (12) per J_1 si ottiene

$$- J_2J_3 = aJ_1 - bI + cJ_1J_2 - dJ_2 + eJ_1J_3 - fJ_3 - gJ_1J_2J_3 ;$$

dalla (12) e dalla precedente si perviene alla $(ga - b)I + (gb + a)J_1 + (gc - d)J_2 + (c + gd)J_1J_2 + (ge - f)J_3 + (e + gf)J_1J_3 + (1 + g^2)J_2J_3 = 0$. Ma avendosi $1 + g^2 \neq 0$, la precedente è, in virtù della indipendenza degli elementi di $\mathscr{A}$ che in essa figurano, assurda. Gli elementi $I, J_1, J_2, J_3, J_1J_2, J_1J_3, J_2J_3, J_1J_2J_3$ sono pertanto linearmente indipendenti; inoltre l'insieme delle combinazioni lineari da esse costituito risulta, tenuto conto della commutatività delle strutture J_1, J_2, J_3, chiuso rispetto al prodotto: la dimensione della sottoalgebra $\mathscr{A}$ risulta allora proprio 8.

Per dimostrare $\mathbf{T}_3$ nel caso della dimensione 8, consideriamo gli elementi

$$v_1 = \tfrac{1}{2}(I - J_1J_2) , \qquad v_2 = \tfrac{1}{2}(J_1J_3 + J_2J_3) , \qquad v_3 = \tfrac{1}{2}(J_1 + J_2) ,$$

$$v_4 = \tfrac{1}{2}(J_3 - J_1J_2J_3) , \qquad v_5 = \tfrac{1}{2}(I + J_1J_2) , \qquad v_6 = \tfrac{1}{2}(J_1J_3 - J_2J_3) ,$$

$$v_7 = \tfrac{1}{2}(J_1 - J_2) , \qquad v_8 = \tfrac{1}{2}(J_3 + J_1J_2J_3)$$ [12] .

[12] È facile mostrare che i v_i costituiscono una base per $\mathscr{A}$.

Tali elementi danno luogo alla seguente tabella moltiplicativa

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	v_1	v_2	v_3	v_4	0	0	0	0
v_2	v_2	v_1	$-v_4$	$-v_3$	0	0	0	0
v_3	v_3	$-v_4$	$-v_1$	v_2	0	0	0	0
v_4	v_4	$-v_3$	v_2	$-v_1$	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	v_5	v_6	v_7	v_8
v_6	0	0	0	0	v_6	v_5	$-v_8$	$-v_7$
v_7	0	0	0	0	v_7	$-v_8$	$-v_5$	v_6
v_8	0	0	0	0	v_8	$-v_7$	v_6	$-v_5$

Essa mostra anzitutto che la sottoalgebra $\mathscr{A}$ può vedersi come somma diretta di due sottoalgebre, diciamo B e B' fra loro isomorfe. Con riferimento a B, una cui base è data da v_1, v_2, v_3, v_4, si considerino gli elementi $w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, $w_2 = \frac{1}{2}(v_3 - v_4)$, $w_3 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$, $w_4 = \frac{1}{2}(v_3 + v_4)$; si perviene in tal caso alla seguente tabella moltiplicativa (13)

	w_1	w_2	w_3	w_4
w_1	w_1	w_2	0	0
w_2	w_2	$-w_1$	0	0
w_3	0	0	w_3	w_4
w_4	0	0	w_4	$-w_3$

che mostra come tale sottoalgebra risulti isomorfa a $\mathsf{C} \oplus \mathsf{C}$ (14). Procedendo in modo simile, analoga tabella riesce ottenibile per la sottoalgebra B'; ricordato che $\mathscr{A}$ risulta somma diretta di B e di B', che sono fra loro isomorfe, segue che $\mathscr{A}$ è isomorfa a $\oplus^4 \mathsf{C}$.

Per il caso della dimensione 6, si considerino, in corrispondenza ad ognuna delle condizioni (5.i), come basi per $\mathscr{A}$ quelle ottenute applicando le condizioni anzidette alla base costituita, nel caso di dimensione 8, dai v_i. Così, se vale la (5.1), risulta $v_5 = -v_6$, $v_7 = v_8$. Considerando allora la base formata da $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7$ si ottiene la seguente tabella moltiplicativa.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_7
v_1	v_1	v_2	v_3	v_4	0	0
v_2	v_2	v_1	$-v_4$	$-v_3$	0	0
v_3	v_3	$-v_4$	$-v_1$	v_2	0	0
v_4	v_4	$-v_3$	v_2	$-v_1$	0	0
v_5	0	0	0	0	v_5	v_7
v_7	0	0	0	0	v_7	$-v_5$

(13) È anche qui facile constatare che i w_i formano una base per B.
(14) Ved. p.e. [**4**], p. 352; [**3**], III, p. 259.

Essa mostra che l'algebra $\mathscr{A}$ risulta somma diretta di due sottoalgebre di cui una è la sottoalgebra B del caso precedente (isomorfa a $\oplus^2 \mathsf{C}$) e l'altra è isomorfa a C; pertanto $\mathscr{A}$, in questo caso, risulta isomorfa a $\oplus^3 \mathsf{C}$.

In modo analogo, se vale (5.2) si ha $v_1 = v_2$ e $v_3 = -v_4$; assumendo come base $v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8$ si giunge alla tabella.

	v_1	v_3	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	v_1	v_3	0	0	0	0
v_3	v_3	$-v_1$	0	0	0	0
v_5	0	0	v_5	v_6	v_7	v_8
v_6	0	0	v_6	v_5	$-v_8$	$-v_7$
v_7	0	0	v_7	$-v_8$	$-v_5$	v_6
v_8	0	0	v_8	$-v_7$	v_6	$-v_5$

Ora l'algebra $\mathscr{A}$ risulta somma diretta di una sottoalgebra isomorfa a C e della sottoalgebra B che è isomorfa a $\mathsf{C} \oplus \mathsf{C}$; $\mathscr{A}$ risulta quindi, anche in questo caso, isomorfa a $\oplus^3 \mathsf{C}$.

Se poi vale la (5.3) si ha $v_1 = -v_2$ e $v_3 = v_4$; assumendo come base l'insieme formato da $v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8$ otteniamo la tabella caratteristica del caso (5.2) e quindi anche in questo caso $\mathscr{A}$ risulta isomorfa a $\oplus^3 \mathsf{C}$.

Infine, se vale (5.4) è $v_5 = v_6$ e $v_8 = -v_7$; assumendo come base l'insieme formato da $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7$ si ricade nella situazione vista nel caso (5.1). Anche in quest'ultimo caso $\mathscr{A}$ risulta quindi isomorfa a $\oplus^3 \mathsf{C}$ e $\mathbf{T}_3$ è dimostrato.

Le proprietà date in **3** permettono una agevole dimostrazione del teorema $\mathbf{T}_4$. Si supponga infatti che esista una sottoalgebra $\mathscr{A}$ di $\mathscr{D}_1^1$ isomorfa a $\oplus^3 \mathsf{C}$ o a $\oplus^4 \mathsf{C}$. Le eventuali strutture quasi complesse di M appartenenti ad $\mathscr{A}$ e gli elementi antiinvolutori di $\oplus^3 \mathsf{C}$, $\oplus^4 \mathsf{C}$ si dovranno corrispondere nell'isomorfismo. La proprietà $\mathbf{P}_3$, allora, per $m = 3, 4$ garantisce che in $\mathscr{A}$ esistono, in entrambi i casi, terne di strutture quasi complesse linearmente indipendenti e commutanti fra loro. Tenuto conto della definizione data in **2**, $\mathbf{T}_4$ è dimostrato.

6 - Strutture quasi complesse e quasi prodotto di $\mathscr{A}$

Le proprietà date in **3**, alla luce delle considerazioni precedenti (v. **5**) conducono agevolmente ad alcuni altri risultati. Come già accennato, in virtù di $\mathbf{T}_3$, gli elementi antiinvolutori, involutori delle algebre $\oplus^3 \mathsf{C}$ o $\oplus^4 \mathsf{C}$ vengono infatti a corrispondere alle strutture quasi complesse e a quelle quasi prodotto, ordinatamente, di M appartenenti ad $\mathscr{A}$ ([15]). A partire dalle $(2)_1$,

([15]) Ved. [**6**], p. 234. Fra gli elementi involutori, l'unità ed il suo opposto sia in $\oplus^3 \mathsf{C}$ che in $\oplus^4 \mathsf{C}$ vanno tralasciati con i loro corrispondenti in $\mathscr{A}$.

si è allora in grado di individuare le seguenti strutture quasi complesse ([16]), espresse in funzione delle tre strutture fondamentali che compongono la struttura di tipo (V) (v. 2)

$$(13) \qquad \pm J_1, \pm J_2, \pm J_3, \pm J_1J_2J_3 ,$$

$$(14) \qquad \pm J_1, \pm J_2, \pm J_3, \pm J_1J_2J_3 , \quad \pm \tfrac{1}{2}(J_1 - J_2 - J_3 + J_1J_2J_3) ,$$

$$\pm \tfrac{1}{2}(J_1 + J_2 + J_3 + J_1J_2J_3) , \quad \pm \tfrac{1}{2}(J_1 + J_2 - J_3 - J_1J_2J_3) ,$$

$$\pm \tfrac{1}{2}(J_1 - J_2 + J_3 - J_1J_2J_3) ,$$

con riferimento ai casi in cui la sottoalgebra $\mathscr{A}$ sia di dimensione 6, 8 rispettivamente. Analogamente, utilizzando le $(2)_2$ e tenuto conto di quanto ricordato in ([15]), si individuano in $\mathscr{A}$ le seguenti strutture quasi prodotto

$$(15) \qquad \pm J_1J_2, \pm J_1J_3, \pm J_2J_3 ,$$

$$(16) \qquad \pm J_1J_2, \pm J_1J_3, \pm J_2J_3 , \quad \pm \tfrac{1}{2}(I + J_1J_2 + J_1J_3 + J_2J_3) ,$$

$$\pm \tfrac{1}{2}(I - J_1J_2 - J_1J_3 + J_2J_3) , \quad \pm \tfrac{1}{2}(I - J_1J_2 + J_1J_3 - J_2J_3) ,$$

$$\pm \tfrac{1}{2}(I + J_1J_2 - J_1J_3 - J_2J_3) .$$

Sono quindi giustificati i teoremi

T$_5$. *Nella sottoalgebra* $\mathscr{A} = \langle J_1, J_2, J_3 \rangle$ *se la dimensione è* 6, *esistono esattamente* 8 *strutture quasi complesse, espresse dalla* (13); *se la dimensione è* 8, *ne esistono esattamente* 16, *espresse dalla* (14).

T$_6$. *Nella sottoalgebra* $\mathscr{A} = \langle J_1, J_2, J_3 \rangle$ *se la dimensione è* 6, *esistono esattamente* 6 *strutture quasi prodotto, espresse dalle* (15); *se la dimensione è* 8, *ne esistono esattamente* 14, *espresse dalla* (16).

Il teorema **T**$_5$, in particolare, rappresenta l'analogo del teorema **T**$_1$ con riferimento al caso della esistenza su M di una struttura di tipo (V) (v. 2).

([16]) È sufficiente, p.e., a partire dalla $(2)_1$ fare agire opportunamente l'isomorfismo di cui al teorema **T**$_3$. Si noti, a tale proposito, che nel corso della dimostrazione di **T**$_3$ le posizioni fatte forniscono le equazioni dell'isomorfismo da $\mathscr{A}$ a $\oplus^3 \mathbf{C}$ o $\oplus^4 \mathbf{C}$ e che riesce immediato individuare le equazioni inverse mediante le quali ottenere gli elementi cercati. Per le successive (13), (15), l'accennato procedimento è palesemente superfluo, in quanto più facilmente ottenibili per via diretta.

Con riferimento poi alle proprietà espresse dalla $\mathbf{P}_2$, esse, in virtù di $\mathbf{T}_3$, si *riportano in modo naturale all'insieme delle strutture quasi complesse di M appartenenti ad $\mathscr{A}$ individuato in* $\mathbf{T}_5$.

Da $\mathbf{P}_3$ e da $\mathbf{T}_3$ segue poi subito

$\mathbf{T}_7$. *Il massimo numero di strutture quasi complesse (quasi prodotto) di M, appartenenti ad $\mathscr{A}$, linearmente indipendenti è* 3, 4, *secondo che la dimensione di $\mathscr{A}$ sia* 6, 8, *ordinatamente* (17).

Terminiamo questo numero con alcune osservazioni.

Anzitutto, la commutatività di $\mathscr{A}$ (che segue, p.e. da $\mathbf{T}_3$), implica la *permutabilità di tutte le strutture quasi complesse e quasi prodotto di M ad essa appartenenti.*

La varietà M dotata di una struttura di tipo (V) può essere poi vista oltre che come *varietà quasi complessa-prodotto del* 2° *tipo* (v. **2**), anche come *varietà quasi complessa-prodotto del* 1° *tipo* (18). Infatti, tenuto conto di $\mathbf{T}_5$ e $\mathbf{T}_6$, l'algebra $\mathscr{A}$ può essere generata, con riferimento al primo caso, dalle terne composte da due qualsiasi strutture quasi prodotto non opposte fra loro e da una qualsiasi struttura quasi complessa di $\mathscr{A}$; con riferimento al secondo caso, dalle terne composte da due strutture quasi complesse (non opposte fra loro) e da una struttura quasi prodotto di $\mathscr{A}$, escludendo in questo caso le $2\left(\binom{8}{2}-4\right)$ o $2\left(\binom{16}{2}-8\right)$ terne, a seconda della dimensione di $\mathscr{A}$, del tipo $(J_i, J_j, \pm J_iJ_j)$ con $J_i \neq \pm J_j$, in quanto non in grado di generare $\mathscr{A}$. Si può quindi affermare che

$\mathbf{O}_1$. *Se $\mathscr{A}$ è di dimensione* 6, *la varietà M risulta dotata (almeno) di* 96 *strutture quasi complesse-prodotto del* 1° *tipo ed altrettante del* 2° *tipo; se $\mathscr{A}$ ha dimensione* 8, *su M le suddette strutture risultano (almeno)* 1344 (19).

---

(17) Tenuto conto di $\mathbf{P}_4$ e $\mathbf{T}_3$ oltre che della nota (15), nel caso di dimensione 6 per $\mathscr{A}$ è facile verificare che le terne di strutture quasi complesse, quasi prodotto di M, linearmente indipendenti ed appartenenti ad $\mathscr{A}$ risultano in numero di $\binom{8}{3}-4(8-2)=32$, $\binom{6}{3}-3(6-2)=8$, rispettivamente.

(18) Ved. [**5**], p. 394, strutture di tipo (II).

(19) In dettaglio, per $\mathscr{A}$ di dimensione 6 risulta $8\left(\binom{6}{2}-3\right)=6\left(\binom{8}{2}-4-2\left(\binom{8}{2}-4\right)\right)=96$, ordinatamente, per le strutture quasi complesse-prodotto del 1° e 2° tipo; per $\mathscr{A}$ di dimensione 8 risulta $16\left(\binom{14}{2}-7\right)=14\left(\binom{16}{2}-8\right)-2\left(\binom{16}{2}-4\right)=1344$ strutture per ognuno dei due tipi.

7 - Strutture di tipo (V) di prima e seconda specie

Conviene terminare con alcune considerazioni relative alle strutture di tipo (V) secondo H. Wakakuwa che nascono dai risultati dei numeri precedenti. Il teorema $\mathbf{T}_2$ in 4, affermando la esistenza di sottoalgebre di $\mathscr{D}_1^1$ generate da una struttura di tipo (V) di due diverse dimensioni, conduce anzitutto alla opportunità di considerare due ben distinte specie di strutture di questo tipo. Più in dettaglio, tali strutture si diranno *strutture di tipo* (V) *di prima specie, di seconda specie, secondo che l'algebra* $\mathscr{A}$ *da esse generata* (v. 4) *sia di dimensione* 6, 8, *ordinatamente.*

Una prima caratterizzazione delle due specie di strutture discende subito dal teorema $\mathbf{T}_2$ stesso

$\mathbf{O}_2$. *Le strutture di tipo* (V) *di prima specie sono tutte e sole quelle per le quali sussiste una delle* (5.i); *quelle di seconda specie sono tutte e sole quelle per le quali non sussiste alcuna delle* (5.i).

È ora interessante constatare come la classificazione proposta risulti collegata alla nozione di *dimensione dell'insieme delle strutture quasi complesse di una varietà, introdotta in* [5] ([20]). Con riferimento a tale definizione e tenuto conto del Teorema 6.1 di [5], sussiste il teorema

$\mathbf{T}_8$. *Le uniche strutture di tipo* (V) *ammissibili su una varietà* M, *con dimensione dell'insieme delle strutture quasi complesse uguale a* 3, *sono quelle di prima specie.*

Segue il corollario

$\mathbf{C}_2$. *Se su* M *esiste una struttura di tipo* (V) *di prima specie, la dimensione dell'insieme delle strutture quasi complesse di* M *è maggiore, uguale a* 3; *se su* M *esiste una struttura di tipo* (V) *di seconda specie, tale dimensione risulta maggiore, uguale a* 4.

Il teorema $\mathbf{T}_8$ riesce di completamento e di precisazione al Teorema 6.1 di [5]; inoltre, con la prima parte di $\mathbf{C}_2$ che parzialmente lo inverte, fornisce una caratterizzazione per le strutture di tipo (V) di prima specie.

Una ulteriore caratterizzazione per le due specie di strutture di tipo (V) si ottiene considerando, per le tre strutture quasi complesse costituenti una di tali strutture, i sottoinsiemi di quattro elementi analoghi a quelli considerati in $\mathbf{P}_2$. Precisamente sussiste il teorema

---

([20]) Si tratta del massimo numero di strutture quasi complesse linearmente indipendenti rispetto a coefficienti reali, esistenti sulla varietà. Ved. [5], definizione di p. 319.

$\mathbf{T}_9$. *Le strutture di M di tipo* (V) *di prima specie, di seconda specie sono tutte e sole quelle per le quali le tre strutture quasi complesse, che le costituiscono, e il loro prodotto risultano, rispettivamente, linearmente dipendenti, linearmente indipendenti.*

$\mathbf{T}_8$ segue senza difficoltà. Anzitutto per il Teorema 6.1 di [**5**], su M, nelle ipotesi indicate possono esistere strutture di tipo (V). D'altra parte se una di esse fosse di seconda specie, la sottoalgebra $\mathscr{A}$ da essa generata avrebbe dimensione 8. In virtù di $\mathbf{T}_7$ esisterebbero allora in $\mathscr{A}$, e quindi su M, quaterne di strutture quasi complesse linearmente indipendenti. Da qui la dimensione dell'insieme delle strutture quasi complesse di M risulterebbe, contro l'ipotesi, $\geqslant 4$.

Il corollario $\mathbf{C}_2$ segue anche esso immediatamente da $\mathbf{T}_7$ e dalla definizione di dimensione dell'insieme delle strutture quasi complesse di M (nota ([20])).

Per dimostrare $\mathbf{T}_9$, anzitutto se la struttura di tipo (V) composta da J_1, J_2, J_3 è di prima specie, $\mathbf{O}_2$ conduce ad una delle (5.i) e quindi $J_1J_2J_3$ è combinazione lineare di J_1, J_2, J_3.

Viceversa, se $\mathscr{A} = \langle J_1, J_2, J_3\rangle$ fosse di dimensione 8, si è visto (v. **4**) che il sottoinsieme $I, J_1, J_2, J_3, J_1J_2, J_1J_3, J_2J_3, J_1J_2J_3$ costituirebbe una sua base. In tale ipotesi, allora, $J_1, J_2, J_3, J_1J_2J_3$ non potrebbe essere linearmente dipendente. È allora $\dim \mathscr{A} = 6$ e quindi la struttura di tipo (V) che la genera è di prima specie.

Se J_1, J_2, J_3 costituiscono una struttura di tipo (V) di seconda specie, per definizione la $\dim \mathscr{A} = \dim \langle J_1, J_2, J_3\rangle = 8$. Il sottoinsieme di elementi di $\mathscr{A}$ sopra elencato ne costituisce in particolare una base e quindi $J_1, J_2, J_3, J_1J_2J_3$ risultano linearmente indipendenti.

Viceversa, se $J_1, J_2, J_3, J_1J_2J_3$ è linearmente indipendente, non può sussistere alcuna delle (5.i) (ognuna di esse, infatti, affermerebbe il contrario). $\mathbf{O}_2$ conduce allora all'asserto. $\mathbf{T}_9$ è così provato.

Tenuto infine presente il teorema $\mathbf{T}_7$ e la nota ([20]) segue subito che se la dimensione di $\mathscr{A}$ è 6, *in $\mathscr{A}$ esistono* 32 *strutture di tipo* (V) *distinte che, in virtù, p.e., di $\mathbf{O}_2$, $\mathbf{T}_9$ e $\mathbf{P}_3$, risultano tutte di prima specie.* Se la dimensione di $\mathscr{A}$ è 8, *in $\mathscr{A}$ esistono* $\binom{16}{3} - 8(16-2) = 448$ *strutture di tipo* (V), *di entrambe le specie.*

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, ch. 2, Hermann, Paris 1955.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (I), (II), Interscience, London 1963-68.

[3] G. SCORZA, *Opere scelte*, Cremonese, Roma 1962.

[4] F. TRICERRI, *Sulle varietà dotate di due strutture quasi complesse linearmente indipendenti*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 349-358.

[5] H. WAKAKUWA, *On linearly independent almost complex structures in a differentiable manifold*, Tohoku Math. J. (3) **13** (1961), 393-422.

[6] K. YANO, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, New York 1965.

Summary

Let M be a differentiable manifold with a structure (V), *according H. Wakakuwa. We establish that the dimension of the subalgebra $\mathscr{A}$ of $\mathscr{D}_1^1$, generated by three almost complex structures defining structure* (V), *is either* 6 *or* 8. *Moreover, the subalgebra $\mathscr{A}$ results to be isomorphic with $\oplus^3$* C *or $\oplus^4$* C. *Conversely, if there exists a subalgebra in $\mathscr{D}_1^1$ isomorphic with $\oplus^3$* C *or $\oplus^4$* C, *then there exists at least a structure* (V) *on M. We determine all the almost complex structures in $\mathscr{A}$ and all the almost product ones. Subsets of real-linearly independent structures of each kind are studied.*

A classification for structures (V) *is introduced and structures* (V) *of each kind are variously characterized. We prove that, if the dimension of the set of almost complex structures of M is* 3, *then the only structure* (V) *existing on M are of the first type* (« *di prima specie* »).

* * *