Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 299-307

MICHELE CRISMALE (*)

Sui piani di traslazione associati a certe fibrazioni costruite da Denniston (**)

1 - Introduzione

Com'è ben noto, una fibrazione in rette di $PG(3, q)$ è una famiglia di $q^2 + 1$ rette a due a due sghembe di $PG(3, q)$. In [2] R. H. F. Denniston ha introdotto e studiato una classe di fibrazioni — che nel seguito chiameremo *fibrazioni di Denniston* — ognuna delle quali ha la notevole proprietà di contenere $q - 1$ (cioè il massimo numero possibile di) regoli a due a due disgiunti senza essere tuttavia subregolare (1). Tale classe si ottiene nel modo seguente. Si individuano in $PG(3, q)$, $q = 2^{2m+1}$, m intero positivo qualsiasi, $q - 1$ quadriche rigate a due a due disgiunte e due rette l_1, l_2 ad esse esterne e tra loro sghembe; ogni fibrazione della classe si costruisce scegliendo un regolo per ogni quadrica e aggregando l_1, l_2 e le $q^2 - 1$ rette dei regoli scelti. In tal modo si ottengono 2^{q-1} fibrazioni, ciascuna delle quali non contiene alcun altro regolo all'infuori di quelli mediante i quali è stata costruita. Pertanto la classe delle fibrazioni di Denniston è chiusa rispetto al noto procedimento col quale, da una fibrazione contenente regoli, se ne può costruire una nuova mediante sostituzione di un regolo col suo opposto. Poichè tale procedimento, interpretato nei rispettivi piani di traslazione, corrisponde a quello, pure ben noto, di derivazione, si ha

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 70100 Bari, Italy.
(**) Lavoro svolto nell'ambito delle attività finanziate dal M.P.I. — Ricevuto: 28-XI-1983.
(1) Tranne quelle di Denniston, all'autore non sono note altre fibrazioni che possiedano la suindicata proprietà.

la notevole proprietà che i *piani di Denniston* — come nel seguito chiameremo i piani di traslazione associati alle fibrazioni di Denniston — sono tutti e soli quelli che si ottengono da uno qualsiasi di essi mediante una o più derivazioni (per un fissato q).

Nella presente Nota si studia il gruppo degli automorfismi di un piano di Denniston. Com'è ben noto, tale studio è ricondotto a quello del gruppo G delle collineazioni di $PG(3, q)$ che lasciano invariante la relativa fibrazione Φ. I risultati ottenuti sono i seguenti:

(1) G muta in sé entrambe le rette l_1 e l_2;

(2) G è il prodotto semidiretto di un gruppo ciclico d'ordine $2m + 1$ per il gruppo ciclico L formato da tutte le omografie di G, di ordine $(q + 1)d$, con d divisore di $q - 1$;

(3) lo stabilizzatore di una retta l di Φ in L è banale se l è distinta da l_1 e l_2;

(4) esiste, a meno di isomorfismi, un'unica fibrazione $\hat{\Phi}$ di Denniston per la quale d raggiunge il suo massimo, per la quale cioè L opera transitivamente sulle rette di $\hat{\Phi}$ diverse da l_1 e l_2.

In base a tali risultati e a note proprietà dei piani di André generalizzati (cfr. ad es. [4], Chap. II), tra questi ultimi e quelli di Denniston vi è una certa somiglianza; tuttavia il risultato (3) consente immediatamente di asserire che

(5) un piano di Denniston non è mai isomorfo a un piano di André generalizzato.

I risultati da (1) a (4) sono provati in **3**; **2** è di carattere preliminare.

Per la terminologia adottata — che non si discosta peraltro da quella usuale — e i risultati utilizzati — il più delle volte senza dare un preciso riferimento bibliografico, essendo essi ben noti — si rimanda, per quanto attiene alla teoria dei piani proiettivi in generale, a Dembowski [**1**], Hughes e Piper [**3**], Segre [**6**], Tzuzuku [**7**]; per i piani di traslazione a Lüneburg [**4**] e Ostrom [**5**]; infine a Wielandt [**8**] o anche a [**7**] per quanto necessario — si tratta peraltro di proprietà elementari — sui gruppi finiti di permutazioni.

2 - Fibrazioni di Denniston

Sia $PG(3, q)$ lo spazio di Galois di dimensione 3 e ordine q; nel seguito sarà sempre $q = 2^{2m+1}$, con m intero positivo qualsiasi; ciò assicura che ogni elemento di $GF(q)$ ha un'unica radice quadrata e un'unica radice cubica, e che il polinomio $x^2 + x + 1$ è irriducibile in $GF(q)$. Per ogni $k \neq 0$ di $GF(q)$, sia Q_k la quadrica di $PG(3, q)$ di equazione

$$k^6 x_0^2 + k^4 x_0 x_1 + k^2 x_1^2 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2 = 0 \,. \tag{1}$$

Indicheremo con $\mathcal{Q}$ l'insieme $\{Q_k \mid 0 \neq k \in GF(q)\}$ e con l_1, l_2 le rette di equazioni, rispettivamente $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$.

Sussistono i seguenti risultati [2].

(i) Ogni Q_k è iperbolica e perciò ha due sistemi di generatrici o regoli; il regolo (convenzionalmente detto) « destro » è dato, in termini di un parametro r, dalle equazioni

$$k^3x_0 + x_2 = r(kx_1 + x_3)\,, \qquad k^3x_0 + kx_1 + x_3 = r(k^3x_0 + x_2 + x_3)$$

o, in coordinate plückeriane di retta,

$$p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12} = r^2 + r + 1 : kr^2 : k(r^2+1) : k^4(r^2 + r + 1) : k^3 : k^3(r^2+1)\,;$$

il regolo « sinistro » è dato analogamente da

$$k^3x_0 + x_2 = s(k^3x_0 + kx_1 + x_3)\,, \qquad kx_1 + x_3 = s(k^3x_0 + x_2 + x_3)\,,$$

$$p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12} = s^2 + s + 1 : ks^2 : k(s^2+1) : k^4(s^2 + s + 1) : k^3s^2 : k^3\,.$$

Indicheremo con D_k (risp. S_k) il regolo destro (risp. sinistro) di Q_k; con $\mathcal{D}$ (risp. $\mathcal{S}$) l'insieme formato dai $q-1$ regoli D_k (risp. S_k), con $\mathcal{R}$ l'insieme $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$.

(ii) Ciascuna delle 2^{q-1} famiglie di rette avente come elementi l_1, l_2 e, per ogni k non nullo di $GF(q)$, le $q+1$ generatrici di Q_k appartenenti a uno solo dei regoli D_k o S_k, è una fibrazione (in rette) di $PG(3, q)$, detta fibrazione di Denniston.

Nel caso particolare in cui le predette generatrici appartengono tutte a regoli destri (risp. sinistri), si parlerà di fibrazione « destra » (risp. « sinistra ») di Denniston, indicandola con Δ (risp. Σ).

(iii) Gli unici regoli contenuti in una fibrazione di Denniston sono quelli appartenenti a $\mathcal{R}$.

3 - Gruppo di collineazioni che lascia invariante una fibrazione Φ di Denniston

Data una fibrazione Φ di Denniston e denotato con G il sottogruppo di $P\Gamma L(4, q)$ che lascia Φ invariante, è subito visto, tenuto conto del risultato (iii), che G muta in sè $\mathcal{Q}$. Denoteremo con $\bar{G}$ il gruppo delle collineazioni di $PG(3, q)$ che lascia invariante $\mathcal{Q}$; G è dunque sottogruppo di $\bar{G}$. Si vede anche immediatamente che $\overline{G}$ o scambia l_1 con l_2 oppure muta in sè entrambe. In accordo con ciò, indicheremo con G' il sottogruppo di $\overline{G}$ che muta in sè sia l_1 che l_2.

Sia ora α un automorfismo di $GF(q)$; indicheremo con lo stesso simbolo α la collineazione di $PG(3, q)$ avente equazioni del tipo $x_i' = \alpha(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ ([2]), con A il gruppo delle $2m + 1$ collineazioni in tal modo definite. Poniamo inoltre $L' = G' \cap PGL(4, q)$, indichiamo cioè con L' il gruppo delle omografie di $PG(3, q)$ che mutano in sè sia l_1 che l_2 e lasciano invariante $\mathcal{Q}$. Si osservi la

Proposizione 1. *A è un sottogruppo di G' e risulta $G' = AL'$, con L' normale in G', $A \cap L' = \{1\}$. A trasforma regoli sinistri in regoli sinistri e destri in destri.*

Dim. È immediato constatare che, se α è un automorfismo di $GF(q)$, la collineazione α da esso definita trasforma Q_k in $Q_{\alpha(k)}$, l_1 in l_1 e l_2 in l_2; infine la retta di S_k congiungente i punti di coordinate $(0, 1, 0, k)$ e $(1, 0, k^3, 0)$ nella retta di $S_{\alpha(k)}$ congiungente i punti di coordinate $(0, 1, 0, \alpha(k))$ e $(1, 0, \alpha(k^3), 0)$. Con ciò rimane provato che A è un sottogruppo di G' e trasforma $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}$. Le rimanenti asserzioni si provano facilmente.

Denoteremo con C il gruppo formato dalle omografie γ_h aventi equazioni del tipo $x_0' = h^3 x_0$, $x_1' = h x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$ $(0 \neq h \in GF(q))$.

Proposizione 2. *C è un sottogruppo ciclico di L'. C trasforma regoli sinistri in regoli sinistri e destri in destri. Il gruppo di permutazioni indotto su $\mathcal{Q}$ da C è regolare.*

Dim. C è ciclico, d'ordine $q - 1$, in quanto isomorfo al gruppo moltiplicativo di $GF(q)$, com'è agevole verificare; agisce transitivamente su $\mathcal{Q}$, dato che γ_h trasforma Q_{hk} in Q_k. Ne segue che il gruppo di permutazioni indotto su $\mathcal{Q}$ da C è regolare. Inoltre γ_h trasforma la retta di S_{hk}, individuata dai punti di coordinate $(0, h^{-1}, 0, k)$ e $(h^{-3}, 0, k^3, 0)$, nella retta di S_k individuata dai punti di coordinate $(0, 1, 0, k)$ e $(1, 0, k^3, 0)$; con ciò la Proposizione 2 è completamente dimostrata.

Proposizione 3. *Ogni quadrica di $\mathcal{Q}$ (risp. ogni regolo di $\mathcal{R}$) ha il medesimo stabilizzatore in L', che indichiamo con D (risp. F). D consta di tutte e sole*

([2]) La distinzione tra α automorfismo di $GF(q)$ e α collineazione di $PG(3, q)$ sarà chiara dal contesto. Si noti inoltre che, qui e nel seguito, il fattore di proporzionalità non nullo di $GF(q)$ a meno del quale sono determinate le equazioni di una qualsiasi collineazione di $PG(3, q)$ si intende sempre incorporato nelle x_i'.

le omografie $\psi(u, v)$ e $\varphi(u, v)$ aventi equazioni del tipo seguente

$$\psi(u, v): x_0' = x_0\,, \quad x_1' = x_1\,, \quad x_2' = ux_2 + (u + v)x_3\,, \quad x_3' = vx_2 + ux_3\,; \tag{2}$$

$$\varphi(u, v): x_0' = x_0\,, \quad x_1' = x_1\,, \quad x_2' = ux_2 + vx_3\,, \quad x_3' = vx_2 + (u + v)x_3\,, \tag{3}$$

ove u, v sono elementi di $GF(q)$ tali che

$$u^2 + uv + v^2 = 1\,. \tag{4}$$

Le omografie $\psi(u, v)$, involutorie, scambiano i regoli di ciascuna quadrica; F consta di tutte e sole le omografie $\varphi(u, v)$ e opera regolarmente sull'insieme delle rette di ciascun regolo. In particolare, lo stabilizzatore in L' di una qualsiasi generatrice di una quadrica di $\mathcal{Q}$ è banale.

Dim. È immediato verificare che le omografie $\psi(u, v)$ e $\varphi(u, v)$ appartengono allo stabilizzatore di ogni quadrica di $\mathcal{Q}$; ma due quadriche di $\mathcal{Q}$ hanno in L' stabilizzatori coniugati, dato che L' agisce transitivamente su $\mathcal{Q}$ (Proposizione 2): essi sono addirittura uguali, se proviamo che per ogni omografia $\omega \in L'$ tale che $\omega(Q_1) = Q_1$ si ha $\omega \in D$.

Orbene, è subito visto che un'omografia ω di $PG(3, q)$ muta in sè sia l_1 che l_2 se e solo se ha equazioni del tipo

$$x_0' = a_0x_0 + a_1x_1\,, \quad x_1' = b_0x_0 + b_1x_1\,, \quad x_2' = a_2x_2 + a_3x_3\,, \quad x_3' = b_2x_2 + b_3x_3\,.$$

Se inoltre $\omega(Q_1) = Q_1$, si ricava con facili calcoli che

$$(a_0^2 + a_0b_0 + b_0^2)x_0^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)x_0x_1 + (a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2)x_1^2$$
$$+ (a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2)x_2^2 + (a_2b_3 + a_3b_2)x_2x_3 + (a_3^2 + a_3b_3 + b_3^2)x_3^2 = 0$$

è ancora un'equazione di Q_1. Disponendo opportunamente del fattore di proporzionalità insito nelle equazioni di ω e del fatto che ogni elemento di $GF(q)$ è un quadrato, si ricava

$$a_0^2 + a_0b_0 + b_0^2 = 1\,, \quad a_0b_1 + a_1b_0 = 1\,, \quad a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 = 1; \tag{5}$$

$$a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2 = 1\,, \quad a_2b_3 + a_3b_2 = 1\,, \quad a_3^2 + a_3b_3 + b_3^2 = 1\,. \tag{6}$$

Si ponga $a_2 = u$, $b_2 = v$; le (6) si riscrivono

$$u^2 + uv + v^2 = 1\,, \quad va_3 + ub_3 = 1\,, \quad a_3^2 + a_3b_3 + b_3^2 = 1\,. \tag{7}$$

Se $u = 0$, è $v = 1$ e quindi $a_3 = v$, $b_3 = u + v$ oppure $a_3 = u + v$, $b_3 = v$. Se è $u \neq 0$, si può ricavare b_3 dalla seconda delle (7) e, sostituendo nella terza, questa si può scrivere $(u + a_3)a_3 = v(u + v)$, da cui $a_3 = u + v$, $b_3 = u$ oppure $a_3 = u$, $b_3 = u + v$. Le soluzioni del sistema (6) sono così completamente determinate. Tenendo conto di esse e della seconda relazione (5), si ricava che la quadrica $\omega^{-1}(Q_k)$ ha equazione

$$(8) \qquad (k^6 a_0^2 + k^4 a_0 b_0 + k^2 b_0^2)x_0^2 + k^4 x_0 x_1 \\ + (k^6 a_1^2 + k^4 a_1 b_1 + k^2 b_1^2)x_1^2 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2 = 0 .$$

Se imponiamo l'ulteriore condizione $\omega^{-1}(Q_k) \in \mathcal{Q}$ per ogni $k \in GF(q)$, $k \neq 0$, si ricava immediatamente dal confronto dell'equazione (8) con la (1), che è addirittura

$$\omega(Q_k) = Q_k\,, \quad k^6 a_0^2 + k^4 a_0 b_0 + k^2 b_0^2 = k^6\,, \quad k^6 a_1^2 + k^4 a_1 b_1 + k^2 b_1^2 = k^2 \qquad (0 \neq k \in GF(q))$$

e quindi $a_0 = 1 = b_1$, $b_0 = 0 = a_1$. Con ciò rimane provato che da $\omega \in L'$ e $\omega(Q_1) = Q_1$ segue $\omega \in D$.

Osserviamo ora che la retta $l \in S_k$, di parametro $s = 0$, coordinate plückeriane $1:0:k:k^4:0:k^3$, individuata dai punti di coordinate $(0, 1, 0, k)$ e $(1, 0, k^3, 0)$, è trasformata da $\psi(u, v)$ nella retta, di coordinate plückeriane $1:k:k:k^4:0:k^3$, congiungente i punti di coordinate $(0, 1, uk, (u + v)k)$ e $(1, 0, uk^3, vk^3)$, ch'è ad essa incidente; e da $\varphi(u, v)$ nella retta l' di coordinate plückeriane $1:vk:(u + v)k:k^4:vk^3:uk^3$, congiungente i punti di coordinate $(0, 1, vk, (u + v)k)$ e $(1, 0, uk^3, vk^3)$, che coincide con l se $u = 1$, $v = 0$, mentre è sghemba con l se $(u, v) \neq (1, 0)$.

Se confrontiamo le coordinate plückeriane di l' con quelle di una generica generatrice di S_k, si ricava, per il parametro s di l', la relazione

$$(9) \qquad 1:s^2 = u:v\,.$$

Il numero delle coppie (u, v) soddisfacenti la (4) è uguale a quello dei punti di $AG(2, q)$ appartenenti all'ellisse di equazione: $x^2 + xy + y^2 = 1$; d'altra parte l'applicazione $(u, v) \to s$ definita dalla (9) è iniettiva. Ne segue immediatamente che è $|F| = q + 1$ e la transitività di F su S_k. Con ciò la dimostrazione della Proposizione 3 può ritenersi completa.

Esaminiamo ora F, D, L' come gruppi astratti.

Proposizione 4. *F è il gruppo ciclico d'ordine $q + 1$, D il gruppo diedrale d'ordine $2(q + 1)$, L' il prodotto diretto $C \times D$.*

Dim. Consideriamo l'estensione quadratica K del campo $GF(q)$ ottenuta mediante aggiunzione di una radice θ dell'equazione $x^2 + x + 1 = 0$, irriducibile in $GF(q)$, e proviamo che gli elementi $u + v\theta$, con $u^2 + uv + v^2 = 1$, costituiscono un sottogruppo ciclico di ordine $q + 1$ del gruppo moltiplicativo di K. A tale scopo associamo ad ogni elemento $z = a + b\theta$ di K la sua norma data da $N(z) = a^2 + ab + b^2$. È subito visto che l'applicazione $z \to N(z)$ è un omomorfismo del gruppo moltiplicativo di K su quello di $GF(q)$, il cui nucleo è dato dagli elementi $u + v\theta$ di K tali che $u^2 + uv + v^2 = 1$. Ne segue l'asserto e con esso la prima parte della Proposizione 4, non appena si osservi che la biiezione $\varphi(u, v) \Leftrightarrow u + v\theta$ gode della proprietà $\varphi(u', v') \circ \varphi(u, v) = \varphi(u'', v'')$, con $u'' + v''\theta = (u + v\theta) \cdot (u' + v'\theta)$; e la seconda, se si tien conto della Proposizione 3 e della relazione

$$\varphi(u, v) \circ \psi(u', v') \circ \varphi(u, v) = \psi(u', v') ,$$

di immediata verifica, che intercorre tra due omografie $\varphi(u, v)$ e $\psi(u', v')$. La terza parte è ovvia.

Proposizione 5. *Ogni collineazione di $\overline{G}$ muta in sè sia l_1 che l_2, si ha inoltre $\overline{G} = AL'$, con L' normale in $\overline{G}$, $A \cap L' = \{1\}$.*

Dim. Per la Proposizione 1, basta provare che nessuna omografia di $PG(3, q)$ può mutare in sè $\mathcal{Q}$ e scambiare l_1 con l_2. Ragioniamo per assurdo supponendo che l'omografia ω abbia entrambe le proprietà dianzi indicate. Evidentemente ω ha ordine pari e quindi si può, senza ledere la generalità, supporre ω involutoria; allora ω, dato che $|\mathcal{Q}|$ è dispari, muta in sè almeno una, quindi, per la Proposizione 3, ogni quadrica di $\mathcal{Q}$. Ma ciò non è possibile perchè l'ipotesi $\omega(Q_1) = Q_1$ implica $\omega(Q_k) \neq Q_k$ per $k \neq 1$, come ora si proverà. Infatti è subito visto che un'omografia ω che scambi l_1 con l_2 ha equazioni del tipo

$$x_0' = a_2x_2 + a_3x_3 , \quad x_1' = b_2x_2 + b_3x_3 , \quad x_2' = a_0x_0 + a_1x_1 , \quad x_3' = b_0x_0 + b_1x_1 .$$

Sia inoltre $\omega(Q_1) = Q_1$, allora valgono le (5) e le (6), ciò si prova procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 3; da tali relazioni segue facilmente, nell'ipotesi $\omega(Q_k) = Q_k$, che Q_k ha anche equazione

$$x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 + (k^6a_2^2 + k^4a_2b_2 + k^2b_2^2)x_2^2 + k^4x_2x_3 + (k^6a_3^2 + k^4a_3b_3 + k^2b_3^2) = 0 .$$

Ciò è manifestamente impossibile per $k \neq 1$.

Immediata conseguenza delle proposizioni precedentemente dimostrate è la seguente (che serve per provare poi la Proposizione 7).

Proposizione 6. *Il sottogruppo* $\hat{G}$ *(risp.* $\hat{L}$*) di* $\overline{G}$ *delle collineazioni (risp. omografie) di* $PG(3, q)$ *che lasciano invarianti* $\mathscr{D}$ *e* $\mathscr{S}$ *è* $A(C\times F)$ *(risp.* $C\times F$*) ed è transitivo sia su* $\mathscr{D}$ *che su* $\mathscr{S}$*. Si ha* $\overline{G}=\hat{G}P$*, ove* P *è il gruppo d'ordine* 2 *generato da una qualsiasi omografia* $\psi(u, v)$*. Una collineazione di* $\overline{G}$ *o muta in sè sia* $\mathscr{D}$ *che* $\mathscr{S}$ *oppure scambia i regoli di* $\mathscr{D}$ *con quelli di* $\mathscr{S}$*.*

Per il gruppo G (risp. L) delle collineazioni (risp. omografie) di $PG(3, q)$ che lasciano invariante una fibrazione Φ di Denniston si hanno le seguenti due proposizioni.

Proposizione 7. *Si ha sempre* $F\leqslant G\leqslant\hat{G}$ *(risp.* $F\leqslant L\leqslant\hat{L}$*). Risulta* $G=\hat{G}$ *(risp.* $L=\hat{L}$*) se e solo se* $\Phi=\Delta$ *oppure* $\Phi=\Sigma$*. Anche il caso* $G=F=L$ *si presenta, per qualsiasi* q*.*

Dim. In virtù della Proposizione 3, F lascia invariante ogni regolo destro e ogni regolo sinistro; ne segue immediatamente, per la (ii), che è $F\leqslant G$. Poichè il numero dei regoli contenuti in Φ è dispari, nessuna collineazione di G può scambiare tra loro due regoli, che siano contenuti in Φ, uno destro e l'altro sinistro. È dunque $G\leqslant\hat{G}$, il segno di uguaglianza sussistendo se e solo se $\Phi=\Delta$ oppure $\Phi=\Sigma$, dato che $\hat{G}$ è transitivo sia su $\mathscr{D}$ che su $\mathscr{S}$ mentre di G si può dire altrettanto se e solo se $\Phi=\Delta$ oppure $\Phi=\Sigma$. Un esempio di fibrazione Φ per la quale è $G=F$ (e quindi $L=F$) si ottiene scegliendo, nella costruzione di Φ, $q-2$ regoli destri e uno sinistro, S_k (oppure $q-2$ regoli sinistri e uno destro, D_k) con k elemento primitivo (generatore del gruppo moltiplicativo) di $GF(q)$. Risulta $G=F$ perchè l'unica collineazione di C o di A che lascia invariante S_k (oppure D_k) è la collineazione identica.

Proposizione 8. *L è semiregolare sull'insieme* Λ *delle* q^2-1 *rette di* Φ *distinte da* l_1 *e* l_2*;* G *(e quindi* L*) è transitivo su tale insieme se e solo se* $\Phi=\Delta$ *oppure* $\Phi=\Sigma$*.*

Dim. Infatti (cfr. Proposizione 3) lo stabilizzatore in L di una retta di Λ è banale; inoltre G è transitivo su Λ se e solo se è transitivo sia su $\mathscr{D}$ che su $\mathscr{S}$, per la Proposizione 7.

L'analisi particolareggiata di come varia e opera G al variare della fibrazione Φ non sembra fornire proprietà più interessanti di quelle generali stabilite con le Proposizioni 7 e 8. Ci limitiamo pertanto ad osservare, sulle fibrazioni di Denniston, la

Proposizione 9. *Due fibrazioni di Denniston tali che una si ottenga dall'altra scambiando ogni regolo col suo opposto sono isomorfe. In particolare* Δ *e* Σ *sono isomorfe.*

Dim. Ogni omografia $\psi(u, v)$ realizza il richiesto isomorfismo.

Esaminiamo finalmente i piani di Denniston, cioè i piani di traslazione associati alle fibrazioni di Denniston. Indicheremo con l_∞ la retta all'infinito di un piano di Denniston. Le proprietà precedentemente dimostrate, concernenti i gruppi di collineazioni delle fibrazioni di Denniston, tradotte in termini dei rispettivi piani di traslazione, consentono di asserire la seguente proposizione, le cui parti (a), (b), (c), (d) corrispondono ordinatamente, nell'anzidetta traduzione, ai risultati (1), (2), (3), (4) indicati nell'introduzione.

Proposizione 10. (a) *Ogni gruppo di collineazioni di un piano di Denniston lascia fissi due punti P_1 e P_2 su l_∞.*

(b) *Il complemento di traslazione di un piano di Denniston di ordine q^2 è il prodotto semidiretto di un gruppo ciclico di ordine $2m+1$ per il complemento lineare di traslazione, il quale a sua volta è ciclico d'ordine $(q^2-1)d$, con d divisore di $q-1$.*

(c) *Lo stabilizzatore di un qualsiasi punto $P \in l_\infty$, distinto da P_1 e P_2, nel complemento lineare di traslazione è banale.*

(d) *Esiste, a meno di isomorfismi, un unico piano di Denniston di ordine q^2 dotato di un gruppo di collineazioni che agisce su l_∞ secondo tre orbite.*

Bibliografia

[1] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin 1968.

[2] R. H. F. Denniston, *Some spreads which contain reguli without being subregular*, Atti Conv. Int. Teorie Comb., tomo II, Roma (1976), 367-371.

[3] D. R. Hughes and F. C. Piper, *Projective planes*, Springer, New York 1973.

[4] H. Lüneburg, *Translation planes*, Springer, Berlin 1980.

[5] T. G. Ostrom, *Finite translation planes, an exposition*, Aequat. Math. **15** (1977), 121-133.

[6] B. Segre, *Lectures on Modern Geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[7] T. Tsuzuku, *Finite groups and finite geometries*, Cambridge U.P., Cambridge 1982.

[8] H. Wislandt, *Finite permutation groups*, Academic Press, New York 1964.

Summary

We study collineation groups of «Denniston spreads» [2]. *Some properties of the corresponding translation planes are discussed.*

* * *