Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 275-286

LUIGI PAGANONI (*)

Un metodo per la costruzione delle soluzioni di una classe di equazioni funzionali (**)

1 – In questa Nota viene studiata la classe di equazioni funzionali del tipo

$$G(x, \varphi(f_1(x)), \ldots, \varphi(f_n(x))) = c \tag{1}$$

nella funzione incognita φ, dove $x \in X$, $f_i \colon X \to Y = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(X)$ (¹), $\varphi \colon Y \to Z$, $G \colon X \times Z^n \to W$ e $c \in W$.

Nella prima parte della presente Nota gli insiemi X, Y, Z e W sono comcompletamente arbitrari e viene illustrato un procedimento del tutto generale che può essere utilizzato per la costruzione delle soluzioni di (1). Nella seconda parte si forniscono condizioni che permettono di applicare tale procedimento nel caso in cui X e Y sono sottoinsiemi dell'asse reale $\boldsymbol{R}$.

Equazioni funzionali che rientrano nella forma (1) sono state studiate da vari matematici (si veda per una ampia bibliografia [**1**]$_2$ e [**4**]), ma, per quanto risulta all'autore della presente Nota, esse sono state affrontate con tecniche sostanzialmente diverse [**1**]-[**3**], [**5**], o in situazioni differenti [**4**] o in casi particolari [**6**].

2 – In questo paragrafo dopo aver introdotto una opportuna terminologia, si affronta il problema dell'esistenza di soluzioni per equazioni del tipo (1) e si illustra una possibile tecnica per la loro costruzione.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via C. Saldini 50, 20133 Milano, Italy.
(**) Ricevuto: 25-XI-1983.
(¹) Si può sempre assumere, senza perdita di generalità, che $Y = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(X)$. Infatti se $Y \supsetneqq \bigcup_{i=1}^{n} f_i(X)$, l'equazione (1) non impegna la funzione φ in nessun punto di $Y \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} f_i(X))$ e perciò su tale insieme φ può essere scelta in modo del tutto arbitrario.

Si introducono preliminarmente le seguenti definizioni.

Def. 1. Sia $E \subset X$ e $\varphi\colon F \to Z$, $F \subset Y$. La coppia (E, φ) è *compatibile con* (1) o, equivalentemente, φ è *soluzione di* (1) *in* E, se $F \supset \bigcup_{i=1}^{n} f_i(E)$ e l'equazione (1) è soddisfatta per ogni $x \in E$.

Nel seguito la classe di tutte le coppie (E, φ) compatibili con (1) verrà denotata con Φ. È ovvio che $(\emptyset, \varphi) \in \Phi$ per ogni φ; inoltre se $(E, \varphi) \in \Phi$ e $\varphi_1\colon F_1 \to Z$ è tale che $\varphi_{1|F} = \varphi$, allora anche $(E, \varphi_1) \in \Phi$.

Def. 2. Siano $(E_1, \varphi_1), (E_2, \varphi_2) \in \Phi$. Si dice che (E_1, φ_1) *precede* (E_2, φ_2) (in simboli $(E_1, \varphi_1) \prec (E_2, \varphi_2)$) se $E_1 \subset E_2$ e $\varphi_1 = \varphi_2|_{F_1}$, dove F_1 è l'insieme di definizione di φ_1.

È immediato verificare che «$\prec$» è una relazione d'ordine parziale in Φ.

Vale il seguente

Lemma. *Sia* $(E_0, \varphi_0) \in \Phi$ *e* $\Phi_0 = \{(E, \varphi) \in \Phi\colon (E, \varphi) \succ (E_0, \varphi_0)\}$. *Ogni catena in* Φ_0 *possiede maggiorante.*

Dim. Sia $\mathscr{A} = \{(E_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una catena in Φ_0. Se $\varphi_\alpha\colon F_\alpha \to Z$, si definisca $E^* = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$, $F^* = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ e $\varphi^*\colon F^* \to Z$ ponendo $\varphi^*(x) = \varphi_\alpha(x)$ se $x \in F_\alpha$. Poichè $\mathscr{A}$ è una catena, φ^* è ben definita e $F^* \supset \bigcup_{i=1}^{n} f_i(E^*)$; inoltre se $x \in E^*$ esiste $\bar{\alpha} \in A$ tale che $x \in E_{\bar{\alpha}}$ e quindi

$$G\big(x, \varphi^*(f_1(x)), \ldots, \varphi^*(f_n(x))\big) = G\big(x, \varphi_{\bar{\alpha}}(f_1(x)), \ldots, \varphi_{\bar{\alpha}}(f_n(x))\big) = c\,.$$

Allora $(E^*, \varphi^*) \in \Phi$. Poichè ovviamente $(E^*, \varphi^*) \succ (E_\alpha, \varphi_\alpha)$ per ogni $\alpha \in A$, ne segue l'asserto.

Per il Lemma di Zorn si ottiene allora il seguente

Teorema 1. *Per ogni coppia* $(E, \varphi) \in \Phi$ *esiste almeno una coppia massimale* $(E^*, \varphi^*) \in \Phi$ *con* $(E^*, \varphi^*) \succ (E, \varphi)$.

La massimalità (E^*, φ^*) implica che φ^* è definita su tutto Y e che non esiste alcun insieme $\hat{E} \supsetneq E^*$ in cui φ^* è soluzione di (1). La soluzione φ^* si dice *soluzione massimale* di (1). Il seguente semplice esempio mostra che possono esistere coppie massimali $(E^*, \varphi^*) \in \Phi$ con $E^* \neq X$.

Esempio 1. Si consideri l'equazione funzionale

$$\cos\ \big(\varphi(f_1(x))\big) - \exp\ \big(-\varphi(f_2(x))\big) = 0\,,$$

dove $X = [0, +\infty)$, $Y = [-1, 1]$, $Z = W = \boldsymbol{R}$, $f_1(x) = \exp(-x)$, $f_2(x) = \cos x$.

Posto $\varphi^*(t) = \arccos t$, $t \in [-1, 1]$, si può verificare che $([0, \pi], \varphi^*) \in \Phi$ ed è massimale.

Si tratta ora di introdurre un procedimento costruttivo da utilizzare nella ricerca delle coppie massimali $(E^*, \varphi^*) \in \Phi$ o, più in particolare, delle coppie massimali $(E^*, \varphi^*) \in \Phi$ che seguono, nell'ordinamento presente in Φ, una preassegnata coppia (E_0, φ_0).

Siano (E_0, φ_0), $(E_1, \varphi_1) \in \Phi$. Se $(E_0, \varphi_0) \lneqq (E_1, \varphi_1)$ possono presentarsi due casi:

(a) $E_0 = E_1$ oppure $\varphi_0 = \varphi_1$; in questo caso (E_1, φ_1) si dice *estensione di primo tipo* di (E_0, φ_0),

(b) $E_0 \neq E_1$ e $\varphi_0 \neq \varphi_1$; in questo caso (E_1, φ_1) si dice *estensione di secondo tipo* di (E_0, φ_0).

Si consideri una estensione di primo tipo; se $E_0 = E_1$ vuol dire che gli insiemi di definizione di φ_0 e φ_1 sono l'uno propriamente contenuto nell'altro, mentre se $\varphi_0 = \varphi_1$ vuol dire che la funzione φ_0 è soluzione di (1) non solo in E_0 ma nell'insieme più ampio E_1.

Nel caso di una estensione di secondo tipo si ha il passaggio dalla funzione φ_0 ad una funzione φ_1 definita su un insieme più ampio con un simultaneo allargamento dell'insieme dei punti in cui φ_1 soddisfa (1).

Si vuole ora illustrare come poter effettuare estensioni di primo e secondo tipo. A tale scopo si premette la

Def. 3. Sia $F \subset Y$. Allora $A(F) = \{x \in X : f_i(x) \in F, 1 \leqslant i \leqslant n\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(F)$,

$A_r(F) = \{x \in X \setminus A(F) : f_i(x) \in F, 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq r\} = \Big(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} f_i^{-1}(F)\Big) \setminus A(F) \quad 1 \leqslant r \leqslant n$.

Si può constatare immediatamente che

$$A_i(F) \cap A(F) = \emptyset \quad \text{e} \quad f_i\big(A_i(F)\big) \cap F = \emptyset \qquad 1 \leqslant i \leqslant n; \tag{2}$$

$$A_i(F) \cap A_j(F) = \emptyset \quad \text{se} \quad i \neq j \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n\,. \tag{3}$$

Si consideri ora $(E_0, \varphi_0) \in \Phi$, dove $\varphi_0 : F_0 \to Z$. Estensioni di primo tipo sono o le coppie (E_0, φ) con φ tale che $\varphi|_{F_0} = \varphi_0$ oppure le coppie (E, φ_0) con $E_0 \subsetneqq E \subset E_{\varphi_0}$ dove $E_{\varphi_0} = \big\{x \in X : G\big(x, \varphi_0(f_1(x)), \ldots, \varphi_0(f_n(x))\big) = c\big\} \subset A(F_0)$. L'estensione $(E_{\varphi_0}, \varphi_0)$ si dice *X-massimale* poichè ogni coppia (E', φ_0) con $E_{\varphi_0} \subsetneqq E' \subset A(F_0)$ non può appartenere a Φ. Se $E_{\varphi_0} = A(F_0)$, la coppia $(E_{\varphi_0}, \varphi_0)$ si dice *X-saturata* e questo significa che la funzione φ_0 è soluzione di (1) nel più ampio sottoinsieme di X sul quale l'espressione $G\big(x, \varphi_0(f_1(x)), \ldots, \varphi_0(f_n(x))\big)$ ha senso. Se invece

$A(F_0) \neq E_{\varphi_0}$, non può esistere nessuna coppia $(E, \varphi) \in \Phi$ con $(E, \varphi) \succ (E_0, \varphi_0)$ tale che $E \cap (A(F_0) \setminus E_{\varphi_0}) \neq \emptyset$; perciò se $(E^*, \varphi^*) \in \Phi$ è massimale e $(E^*, \varphi^*) \succ (E_0, \varphi_0)$, deve necessariamente essere $E^* \cap (A(F_0) \setminus E_{\varphi_0}) = \emptyset$.

Per quanto riguarda le estensioni di secondo tipo di (E_0, φ_0), è naturale cercare di costruire, se possibile, una estensione (E_1, φ_1) in cui $E_1 = E_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i(F_0)\right)$ e φ_1 sia definita sull'insieme F_1 dato da $F_1 = F_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} f_i(A_i(F_0))\right)$. In tal caso infatti l'ampliamento di E_0 è costituito solo dai punti $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i(F_0)$ (per i quali tutti i valori $f_i(x)$ salvo uno appartengono a F_0) ed è quindi possibile cercare di definire la funzione φ_1 nell'insieme $\bigcup_{i=1}^{n} f_i(A_i(F_0))$ servendosi dell'equazione funzionale (1).

Perchè questo sia possibile debbono tuttavia essere soddisfatte alcune condizioni dovute ai seguenti fatti: non è detto che f_i sia iniettiva su $A_i(F_0)$, nè che $f_i(A_i(F_0)) \cap f_j(A_j(F_0)) = \emptyset$ se $i \neq j$, nè infine che l'equazione (1) consenta di determinare i nuovi valori di φ_1. Precisamente, per ogni $y \in \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A_i(F_0))$ si ponga

$$\mathscr{M}(y) = \{(i, x) : x \in A_i(F_0) \text{ e } f_i(x) = y\} ,$$

$$\mathscr{N}_{\varphi_0}(i, x) = \left\{z \in Z : G\big(x, \varphi_0(f_1(x)), \dots, \varphi_0(f_{i-1}(x)), z, \varphi_0(f_{i+1}(x)), \dots, \varphi_0(f_n(x))\big) = c\right\},$$

$$\Gamma_{\varphi_0}(y) = \bigcap_{(i,x) \in \mathscr{M}(y)} \mathscr{N}_{\varphi_0}(i, x) .$$

Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione $\varphi_1 : F_1 \to Z$ con $(E_1, \varphi_1) \in \Phi$ e $(E_1, \varphi_1) \succ (E_0, \varphi_0)$ è che, per ogni $y \in \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A_i(F_0))$, sia

$$\Gamma_{\varphi_0}(y) \neq \emptyset . \tag{4}$$

In tal caso si può definire φ_1 nel modo seguente

$$\varphi_1(y) = \begin{cases} \varphi_0(y) & \text{se } y \in F_0 \\ \gamma(y) \in \Gamma_{\varphi_0}(y) & \text{se } y \in F_1 \setminus F_0 . \end{cases} \tag{5}$$

Si noti che tale estensione è unica se e solo se, per ogni $y \in F_1 \setminus F_0$, $\Gamma_{\varphi_0}(y)$ contiene un solo elemento.

Naturalmente (E_1, φ_1) costituisce l'ampliamento massimo ottenibile procedendo nel modo descritto a partire da (E_0, φ_0); talvolta, come si vedrà ad esempio in **3**, per ragioni di semplicità ci si può limitare ad estensioni (E, φ), sempre del secondo tipo, intermedie, cioè con $(E_0, \varphi_0) \prec (E, \varphi) \prec (E_1, \varphi_1)$.

Si osservi che se la (4) è soddisfatta solo per $y \in F_1' \setminus F_0$ con $F_0 \subset F_1' \subsetneq F_1$, allora una estensione di (E_0, φ_0) è costituita dalla coppia (E_1', φ_1'), dove $E_1' = E_1 \cap \Lambda(F_1')$ e $\varphi_1' : F_1' \to Z$ è definita come in (5). Ovviamente non può esistere nessuna coppia $(E, \varphi) \in \Phi$ con $(E, \varphi) \succ (E_1', \varphi_1')$ e $E \cap (E_1 \setminus E_1') \neq \emptyset$.

In conclusione, operando alternativamente estensioni di primo e di secondo tipo nel modo sopra descritto si può cercare di costruire tutte le estensioni massimali di una preassegnata coppia (E_0, φ_0).

I seguenti esempi servono come illustrazione di quanto sopra esposto.

Esempio 2. Si consideri l'equazione funzionale nelle variabili reali

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) + \varphi(x-1) \qquad \big(\text{qui } f_1(x) = x - 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x + 1\big)\,.$$

Sia $F_0 = [-1, 1) \cup [2, 4)$ e $\varphi_0 : F_0 \to \mathbf{R}$ data da $\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 1) \\ 1 & \text{se } x \in [2, 4)\,. \end{cases}$

La coppia $(\emptyset, \varphi_0) \in \Phi$ ed essendo $\Lambda(F_0) = \emptyset$ essa è X-saturata.

Con le notazioni precedentemente introdotte si ha $E_1 = [-1, 4)$ (infatti $\Lambda_1(F_0) = [-1, 0) \cup [2, 3)$; $\Lambda_2(F_0) = [1, 2)$; $\Lambda_3(F_0) = [0, 1) \cup [3, 4)$), $F_1 = [-2, 5)$, le f_i sono iniettive su $\Lambda_i(F_0)$, ma $f_i(\Lambda_i(F_0)) \cap f_j(\Lambda_j(F_0)) = [1, 2)$ se $i \neq j$. Ora $F_1 \setminus F_0 = [-2, -1) \cup [1, 2) \cup [4, 5)$ ed è facile verificare che, mentre per ogni $y \in [-2, -1) \cup [4, 5)$, $\Gamma_{\varphi_0}(y) \neq \emptyset$ (anzi si riduce ad un sol punto), se $y \in [1, 2)$ si ha $\Gamma_{\varphi_0}(y) = \emptyset$. Perciò non esiste $(E_1, \varphi_1) \in \Phi$ con $(E_1, \varphi_1) \succ (E_0, \varphi_0)$. L'estensione è invece possibile alla coppia (E_1', φ_1') con φ_1' definita sull'insieme $F_1' = [-2, 1) \cup [2, 5)$ ed $E_1' = E_1 \cap \Lambda(F_1') = [-1, 0) \cup [3, 4)$.

Esempio 3. Si consideri la stessa equazione dell'Esempio 2, e sia

$$F_0 = [-1, 1) \cup [3, 5) \text{ e } \varphi_0 : F_0 \to \mathbf{R} \text{ data da } \varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 1) \\ 1 & \text{se } x \in [3, 5)\,. \end{cases}$$

Anche in questo caso $(\emptyset, \varphi_0) \in \Phi$ ed è X-saturata. Qui $E_1 = [-1, 1) \cup [3, 5)$ (infatti $\Lambda_1(F_0) = [-1, 0) \cup [3, 4)$; $\Lambda_2[F_0) = \emptyset$ e $\Lambda_3(F_0) = [0, 1) \cup [4, 5)$), $F_1 = [-2, 6)$ e $f_i(\Lambda_i(F_0)) \cap f_j(\Lambda_j(F_0)) = \emptyset$ se $i \neq j$. Inoltre per ogni $y \in F_1 \setminus F_0$ risulta $\Gamma_{\varphi_0}(y) = \{0\}$ se $y \in [1, 3) \cup [-2, -1)$ e $\Gamma_{\varphi_0}(y) = \{2\}$ se $y \in [5, 6)$; pertanto φ_0 può essere univocatamente estesa alla funzione φ_1 data da

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-2, 3) \\ 1 & \text{se } x \in [3, 5) \\ 2 & \text{se } x \in [5, 6) \end{cases} \qquad \text{in modo che } (E_1, \varphi_1) \in \Phi \text{ e } (E_1, \varphi_1) \succ (E_0, \varphi_0)\,.$$

Si noti che (E_1, φ_1) non è e non può essere X-saturata; infatti $\Lambda(F_1) = [-1, 5)$, ma mentre l'equazione funzionale è soddisfatta per ogni $x \in [-1, 2) \cup [3, 5)$, essa non lo è se $x \in [2, 3)$.

3 – In questo paragrafo si applica quanto precedentemente esposto nel caso di una sottoclasse particolare di equazioni del tipo (1) e si mostra come ottenere tutte le funzioni φ soluzioni di (1) su X, ossia le coppie $(X, \varphi) \in \Phi$.

Occorre premettere alcune definizioni e notazioni.

Def. 4. Si dice che l'equazione $G(x, z_1, \ldots, z_n) = c$ è *risolubile rispetto a* z_r *in* $E \times Z^n$, $E \subset X$ se, posto

$$H_r(x, z_1, \ldots, z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots, z_n) := \{t \in Z\colon G(x, z_1, \ldots, z_{r-1}, t, z_{r+1}, \ldots, z_n) = c\}\,, \quad \text{si ha}$$

$$(6) \qquad H_r(x, z_1, \ldots, z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots, z_n) \neq \emptyset \qquad \forall x \in E \ \text{ e } \ \forall z_i \in Z,\ i \neq r\,.$$

Di più, se gli insiemi in (6) contengono un solo elemento, l'equazione si dice *univocamente risolubile.*

Def. 5. Sia $G(x, z_1, \ldots, z_n) = c$ risolubile rispetto a z_r in $E \times Z^n$. Si dice che una funzione $h_r\colon E \times Z^{n-1} \to Z$ è *soluzione dell'equazione* $G(x, z_1, \ldots, z_n) = c$ *rispetto a* z_r se essa appartiene alla seguente classe

$$\mathscr{H}_r(E \times Z^{n-1}) = \{h\colon E \times Z^{n-1} \to Z\colon \forall x \in E \text{ e } \forall z_i \in Z,\ i \neq r,$$
$$h(x, z_1, \ldots z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots z_n) \in H_r(x, z_1, \ldots z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots z_n)\}\,.$$

La classe $\mathscr{H}_r(E \times Z^{n-1})$ contiene una sola funzione se e solo se l'equazione $G(x, z_1, \ldots, z_n) = c$ è univocamente risolubile rispetto a z_r in $E \times Z^n$.

Notazioni. Se $A \subset \boldsymbol{R}$, il simbolo $\bar{A}^+$ $[\bar{A}^-]$ denota l'insieme costituito dai punti appartenenti ad A e dai punti di accumulazione dalla destra [sinistra] per A. Se $x \in \boldsymbol{R}$, $U^+(x)[U^-(x)]$ denota un intorno destro [sinistro] di x.

Sia $f: A \to \boldsymbol{R}$ con $A \subset \boldsymbol{R}$; se $x \in \bar{A}^+$ $[\bar{A}^-]$ si pone

$$f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t) \ [f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)] \text{ se } x \text{ è di accumulazione dalla destra [sinistra]},$$

$$f(x^+) = f(x) \ [f(x^-) = f(x)] \quad \text{se } x \text{ è isolato dalla destra [sinistra]}.$$

Si può ora enunciare il seguente

Teorema 2. *Si consideri un'equazione funzionale del tipo* (1) *con* $X \subset \boldsymbol{R}$ *e* $Y \subset \boldsymbol{R}$. *Si supponga che esistano un punto* $x_0 \in X$ *e due indici* $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$, $1 \leqslant \bar{\imath}, \bar{\jmath} \leqslant n$, *tali che*:

(i) *l'equazione* $G(x, z_1, \ldots, z_n) = c$ *è risolubile rispetto a* $z_{\bar{\imath}}$ *in* $((-\infty, x_0] \cap X) \times Z^n$ *e rispetto a* $z_{\bar{\jmath}}$ *in* $([x_0, +\infty) \cap X) \times Z^n$;

(ii) $f_{\bar{\imath}}$ *e* $f_{\bar{\jmath}}$ *sono strettamente crescenti rispettivamente in* $(-\infty, x_0] \cap X$ *e* $[x_0, +\infty) \cap X$;

(iii) *per ogni* $x \in (-\infty, x_0] \cap \bar{X}^-$ *esiste* $U(x)$ *tale che, per ogni* $t \in U_-(x) \cap X$, $f_{\bar{\imath}}(x^-) \leqslant \inf_{i \neq \bar{\imath}} f_i(t)$; *inoltre, se* $x \in X$, $f_i(x) \neq f_{\bar{\imath}}(x)$ *per ogni* $i \neq \bar{\imath}$;

(iv) *per ogni* $x \in [x_0, +\infty) \cap \bar{X}^+$ *esiste* $U_+(x)$ *tale che, per ogni* $t \in U_+(x) \cap X$, $f_{\bar{\jmath}}(x^+) \geqslant \sup_{i \neq \bar{\jmath}} f_i(t)$; *inoltre, se* $x \in X$, $f_i(x) \neq f_{\bar{\jmath}}(x)$ *per ogni* $i \neq \bar{\jmath}$;

(v) $\sup_i f_i(x) \leqslant f_{\bar{\jmath}}(x_0^+)$, *per ogni* $x \in (-\infty, x_0] \cap X$ *e* $\inf_i f_i(x) \geqslant f_{\bar{\imath}}(x_0^-)$, *per ogni* $x \in [x_0, +\infty) \cap X$.

Allora, posto $F_0 = \big(Y \setminus (f_{\bar{\imath}}((-\infty, x_0] \cap X) \cup f_{\bar{\jmath}}([x_0, +\infty) \cap X))\big) \cup \{\gamma\}$, *dove* $\gamma = f_{\bar{\imath}}(x_0)$ *o* $\gamma = f_{\bar{\jmath}}(x_0)$, *e scelta ad arbitrio una funzione* $\varphi_0: F_0 \to Z$, *esiste almeno una funzione* $\varphi: Y \to Z$ *estensione di* φ_0 *e soluzione di* (1) *in* X. *Le funzioni ottenute come estensione di tutte le possibili* φ_0 *costituiscono tutte le soluzioni di* (1) *in* X.

Dim. Posto $E_0 = \emptyset$, si osserva anzitutto che $(E_0, \varphi_0) \in \Phi$ ed è X-saturata. Si vuole ora costruire una sequenza di coppie $(E_n, \varphi_n) \in \Phi$, X-saturate, tali che, per ogni $n \geqslant 1$, sia abbia $(E_n, \varphi_n) \succ (E_{n-1}, \varphi_{n-1})$ e

$$(7) \qquad (E_n \setminus E_{n-1}) \cap (-\infty, x_0] \neq \emptyset \quad \text{se } (X \setminus E_{n-1}) \cap (-\infty, x_0] \neq \emptyset,$$

$$(8) \qquad (E_n \setminus E_{n-1}) \cap [x_0, +\infty) \neq \emptyset \quad \text{se } (X \setminus E_{n-1}) \cap [x_0, +\infty) \neq \emptyset;$$

(la sequenza è costituita da un numero finito di coppie se esiste $\bar{n}$ tale che $E_{\bar{n}} = X$). La costruzione procede iterativamente a partire da (E_0, φ_0). Supposto di aver già definito (E_{n-1}, φ_{n-1}) e di aver indicato con F_{n-1} l'insieme di definizione di φ_{n-1}, si procede alla costruzione di (E_n, φ_n) nel modo seguente.

Si ponga $\lambda_0 = \mu_0 = x_0$ e, per ogni $n \geqslant 1$,

$$\lambda_n = \operatorname{Inf}\{x \in (-\infty, x_0] \cap X\colon \ \ \forall t \in [x, x_0] \cap X \ \text{ e } \ \forall i \neq \bar{i}, \ f_i(t) \in F_{n-1}\}\,,$$

$$\mu_n = \operatorname{Sup}\{x \in [x_0, +\infty) \cap X\colon \ \forall t \in [x_0, x] \cap X \ \text{ e } \ \forall i \neq \bar{j}, \ f_i(t) \in F_{n-1}\}\,.$$

Inoltre, per l'ipotesi (i), si scelga

$$h_{\bar{i}} \in \mathscr{H}_{\bar{i}}\big(((-\infty, x_0] \cap X) \times Z^{n-1}\big) \qquad \text{e} \qquad h_{\bar{j}} \in \mathscr{H}_{\bar{j}}\big(([x_0, +\infty) \cap X) \times Z^{n-1}\big)\,.$$

Sia $E_n = \langle \lambda_n, \mu_n \rangle \cap X$, (dove $\langle$ $[\rangle]$ rappresenta una parentesi quadra o tonda a seconda che λ_n $[\mu_n]$ appartenga o meno all'insieme che lo ha definito) e sia di conseguenza, $F_n = F_{n-1} \cup \big(\langle f_{\bar{i}}(\lambda_n^+), f_{\bar{j}}(\mu_n^-)\rangle \cap Y\big)$. Si definisca infine $\varphi_n\colon F_n \to Z$ ponendo

$$\varphi_n(y) = h_{\bar{i}}[f_{\bar{i}}^{-1}(y), \varphi_{n-1}(f_1(f_{\bar{i}}^{-1}(y))), \ldots, \varphi_{n-1}(f_{\bar{i}-1}(f_{\bar{i}}^{-1}(y))), \varphi_{n-1}(f_{\bar{i}+1}(f_{\bar{i}}^{-1}(y))), \ldots,$$
$$\varphi_{n-1}(f_n(f_{\bar{i}}^{-1}(y)))] \qquad \text{se } y \in F_n \setminus F_{n-1}, \ y \leqslant f_{\bar{i}}(x_0)\,;$$
$$\varphi_n(y) = \varphi_{n-1}(y) \qquad \text{se } y \in F_{n-1}\,;$$

$$\varphi_n(y) = h_{\bar{j}}[f_{\bar{j}}^{-1}(y), \varphi_{n-1}(f_1(f_{\bar{j}}^{-1}(y))), \ldots, \varphi_{n-1}(f_{\bar{j}-1}(f_{\bar{j}}^{-1}(y))), \varphi_{n-1}(f_{\bar{j}+1}(f_{\bar{j}}^{-1}(y))), \ldots,$$
$$\varphi_{n-1}(f_n(f_{\bar{j}}^{-1}(y)))] \qquad \text{se } y \in F_n \setminus F_{n-1}, \ y \geqslant f_{\bar{j}}(x_0)\,.$$

È immediato verificare che, per ogni $n \geqslant 1$, valgono le seguenti proprietà:

$$\lambda_n \leqslant \lambda_{n-1} \qquad \text{e} \qquad \mu_n \geqslant \mu_{n-1}\,; \tag{9}$$

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i(F_{n-1}) = A_{\bar{i}}(F_{n-1}) \cup A_{\bar{j}}(F_{n-1})\,; \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\text{se } A_{\bar{i}}(F_{n-1}) \neq \emptyset\,, \quad \text{allora } (-\infty, x_0] \supset A_{\bar{i}}(F_{n-1}) \cap E_n \neq \emptyset\,,\\ &\text{se } A_{\bar{j}}(F_{n-1}) \neq \emptyset\,, \quad \text{allora } [x_0, +\infty) \supset A_{\bar{j}}(F_{n-1}) \cap E_n \neq \emptyset\,; \end{aligned} \tag{11}$$

$$f_{\bar{i}}(A_{\bar{i}}(F_{n-1}) \cap E_n) \cap f_{\bar{j}}(A_{\bar{j}}(F_{n-1}) \cap E_n) = \emptyset\,; \tag{12}$$

$$A(F_n) = E_n\,. \tag{13}$$

Pertanto, per la (12) e l'iniettività di $f_{\bar{i}}$ e $f_{\bar{j}}$, per ogni $y \in F_n \setminus F_{n-1}$, $\mathscr{M}(y)$ è costituito o dalla coppia $(\bar{i}, f_{\bar{i}}^{-1}(y))$ o dalla coppia $(\bar{j}, f_{\bar{j}}^{-1}(y))$; di conseguenza, per la (i), $\Gamma_{\varphi_{n-1}}(y) \neq \emptyset$ e la definizione di φ_n è tale che $(E_n, \varphi_n) \in \Phi$. Inoltre $(E_n, \varphi_n) \succ (E_{n-1}, \varphi_{n-1})$ e, per la (13), (E_n, φ_n) è X-saturata. La (7) e la (8) sono infine conseguenza delle (10) e (11).

Se il procedimento si arresta dopo un numero finito di passi, vuol dire che si è ottenuto l'estensione cercata. In caso contrario, si ponga

$$\lambda^* = \lim \lambda_n , \qquad \mu^* = \lim \mu_n ,$$

$$E^* = \bigcup_n (\langle \lambda_n , \mu_n \rangle \cap X) = \langle \lambda^* , \mu^* \rangle \cap X , \qquad F^* = \bigcup_n F_n ,$$

e si definisca $\varphi^* \colon F^* \to Z$ ponendo $\varphi^*(y) = \varphi_n(y)$ per ogni $y \in F_n$. È immediato constatare che φ^* è ben definita, che $(E^*, \varphi^*) \in \Phi$ ed è X-saturata, ed infine che $(E^*, \varphi^*) \succ (E_n , \varphi_n)$, per ogni $n \geqslant 0$. Se $E^* = X$ si è ottenuto anche in questo caso l'estensione cercata. Se invece $E^* \subsetneq X$, (E^*, φ^*) non è massimale; infatti, considerando (E^*, φ^*) come coppia iniziale e procedendo nel modo appena descritto, si può costruire una sequenza (E_n^*, φ_n^*) e giungere così ad una nuova coppia X-saturata $(E^{**}, \varphi^{**}) \in \Phi$ con $E^{**} \supsetneq E^*$. Poichè questo procedimento di estensione può essere ripetuto ogni volta che la coppia $(\hat{E}, \hat{\varphi})$ così ottenuta è tale che $\hat{E} \neq X$, in base all'assioma della scelta si può concludere che esiste sempre almeno una coppia $(X, \varphi) \in \Phi$, estensione di (E_0 , φ_0). Poichè le funzioni $h_{\bar{i}}$ e $h_{\bar{j}}$ sono scelte in modo del tutto arbitrario nelle rispettive classi, tutte le soluzioni di (1) in X possono essere ottenute attraverso una estensione del tipo descritto.

Osservazioni. (I) La natura degli insiemi E_n che compaiono nella dimostrazione rende semplice l'intuizione delle successive estensioni di φ_0; la scelta di tali insiemi non garantisce però che la coppia (E^*, φ^*) sia quella massimale cercata. Se si procede invece scegliendo $E_n = A_{\bar{i}}(F_{n-1}) \cup A_{\bar{j}}(F_{n-1})$, si può garantire che la coppia (E^*, φ^*) è massimale, cioè che $\varphi^* \colon Y \to Z$ e $E^* = X$.

Si supponga infatti per assurdo che $F^* \subsetneq Y$ e che $S = (Y \setminus F^*) \cap f_{\bar{j}}([x_0 , +\infty) \cap X) \neq \emptyset$ (analogamente si ragiona se $(Y \setminus F^*) \cap f_{\bar{i}}((-\infty, x_0] \cap X) \neq \emptyset$).

Sia $y = \inf S$ e $x \geqslant x_0$ tale che $y = f_{\bar{j}}(x))$; allora, per ogni $i \neq \bar{j}$, si ha $f_i(x) < f_{\bar{j}}(x) = y$ e, per la definizione stessa di y, $f_i(x) \in F^*$. Esiste perciò un intero $\bar{n}$ tale che $f_i(x) \in F_{\bar{n}}$ per ogni $i \neq \bar{j}$. Dalla costruzione segue allora che $x \in E_{\bar{n}+1}$ e quindi $y = f_{\bar{j}}(x) \in F_{\bar{n}+1} \subset F^*$, contro l'ipotesi.

(II) Se in (i) si sostituisce «risolubile» con «univocamente risolubile», allora l'estensione φ di φ_0 è unica.

(III) È ovvio che vale un teorema analogo nel caso in cui $f_{\bar{i}}$ e $f_{\bar{j}}$ siano strettamente decrescenti, pur di modificare opportunamente le altre ipotesi.

(IV) Nelle ipotesi (iii) e (iv) figurano le seguenti richieste

$$\text{se } x \in X,\ f_i(x) \neq f_{\bar{i}}(x) \text{ per ogni } i \neq \bar{i}; \qquad \text{se } x \in X,\ f_i(x) \neq f_{\bar{j}}(x) \text{ per ogni } i \neq \bar{j}.$$

La necessità di queste ulteriori richieste è illustrata dal seguente semplice.

Esempio 4. Si consideri l'equazione funzionale

$$\varphi(2x) = \varphi(x) + \varphi(x + \tfrac{1}{2})$$

già studiata in [**6**], limitatamente all'insieme $X = [0, \frac{1}{2}]$. Qui, posto $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = x + \frac{1}{2}$ e scelto $x_0 = \frac{1}{4}$, tutte le ipotesi del Teorema 2 sono soddisfatte, con $\bar{\imath} = 1$ e $\bar{\jmath} = 3$, nell'intervallo $(0, \frac{1}{2})$, ma non in $[0, \frac{1}{2}]$; infatti $f_{\bar{\imath}}(0) = f_2(0)$ e $f_{\bar{\jmath}}(\frac{1}{2}) = f_2(\frac{1}{2})$.

Il procedimento costruttivo descritto permette allora di estendere qualunque funzione φ_0: $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \to \boldsymbol{R}$ ad una funzione φ^*: $(0, 1) \to \boldsymbol{R}$ soluzione dell'equazione data in $(0, \frac{1}{2})$. Tale funzione non è però prolungabile ad una funzione φ: $[0,1] \to \boldsymbol{R}$ soluzione in $[0, \frac{1}{2}]$ se $\varphi_0(\frac{1}{2}) \neq 0$.

(V) Il Teorema 2 è stato dimostrato nel caso di un numero finito di funzioni f_i, ma esso vale ancora nel caso di una famiglia di funzioni f_α, ossia per la classe di equazioni funzionali del tipo $G\big(x, \{\varphi(f_\alpha(x))\}_{\alpha \in A}\big) = c$.

Nel caso in cui X è un intervallo e le funzioni f_i sono funzioni reali continue, dal Teorema 2 segue immediatamente il seguente

Corollario 1. *Si consideri un'equazione funzionale del tipo* (1), *dove* $X = I \subset \boldsymbol{R}$, *$I$ intervallo, e le funzioni f_i sono funzioni reali, continue su I. Si supponga che esistano un punto $x_0 \in I$ e due indici $\bar{\imath}, \bar{\jmath} \in \{1, \dots, n\}$ tali che:*

(i) *l'equazione $G(x, z_1, \dots, z_n) = c$ è risolubile* [*univocamente risolubile*] *rispetto a $z_{\bar{\imath}}$ in $\big((-\infty, x_0] \cap I\big) \times Z^n$ e rispetto a $z_{\bar{\jmath}}$ in $\big([x_0, +\infty) \cap I\big) \times Z^n$;*

(ii) *$f_{\bar{\imath}}$ e $f_{\bar{\jmath}}$ sono strettamente crescenti rispettivamente in $(-\infty, x_0] \cap I$ e $[x_0, +\infty) \cap I$;*

(iii) *$f_{\bar{\imath}}(x) < f_i(x) \leqslant f_{\bar{\jmath}}(x_0)$ per ogni $i \neq \bar{\imath}$ e per ogni $x \in (-\infty, x_0] \cap I$;*

(iv) *$f_{\bar{\imath}}(x_0) \leqslant f_i(x) < f_{\bar{\jmath}}(x)$ per ogni $i \neq \bar{\jmath}$ e per ogni $x \in [x_0, +\infty) \cap I$.*

Allora, posto $F_0 = [f_{\bar{\imath}}(x_0), f_{\bar{\jmath}}(x_0)) \cap Y$ o $F_0 = (f_{\bar{\imath}}(x_0), f_{\bar{\jmath}}(x_0)] \cap Y$, per ogni funzione arbitraria φ_0: $F_0 \to Z$, esiste una [*una ed una sola*] *funzione φ: $Y \to Z$ soluzione di* (1) *in I ed estensione di φ_0.*

Osservazioni. (I) In questo caso particolare, usando le notazioni della dimostrazione del Teorema 2, si ha $E^* = I$. Si consideri infatti il comportamento della sequenza $\{\mu_n\}$ (quello di $\{\lambda_n\}$ è analogo). Poichè le funzioni f_i

sono continue, considerato un qualunque intervallo compatto $J \subset I$ della forma $J = [x_0, b]$, gli insiemi $A_i = \{(x, f_i(x)), x \in J\}$ sono compatti in $\boldsymbol{R}^2$ e, poichè per l'ipotesi (iv) $A_{\bar{j}} \cap (\bigcup_{i \neq \bar{j}} A_i) = \emptyset$, ne segue

$$\inf\{\|v - w\|, v \in A_{\bar{j}} \quad \text{e} \quad w \in \bigcup_{i \neq \bar{j}} A_i\} = \delta > 0 .$$

Quindi, per ogni $n \geqslant 1$, $\mu_{n+1} - \mu_n \geqslant \delta$. Esiste perciò un indice ν tale che $J \subset [x_0, \mu_\nu\rangle$. Poichè ogni intervallo è rappresentabile come unione numerabile crescente di intervalli compatti, ne segue l'asserto.

(II) Siano Z e W spazi topologici e si supponga che le funzioni $h_{\bar{i}}$ e $h_{\bar{j}}$ di cui ci si serve per effettuare l'estensione siano continue nei loro rispettivi insiemi di definizione. Si supponga che $F_0 = [f_{\bar{i}}(x_0), f_{\bar{j}}(x_0))$; allora φ è continua se e solo se

$$\lim_{t \to f_{\bar{j}}(x_0)^-} \varphi_0(t) = h_{\bar{j}}(x_0, \varphi_0(f_1(x_0)), \dots \varphi_0(f_n(x_0))) , \tag{14}$$

$$\varphi_0(f_{\bar{i}}(x_0)) = \lim_{x \to x_0^-} h_{\bar{i}}(x, \varphi_0(f_1(x)), \dots, \varphi_0(f_n(x))) . \tag{15}$$

Condizioni analoghe valgono se $F_0 = (f_{\bar{i}}(x_0), f_{\bar{j}}(x_0)]$.

Bibliografia

[1] K. Baron: $[\cdot]_1$ *Note on the existence of continuous solutions of a functional equation of n-th order*, Ann. Polon. Math. **30** (1974), 77-80; $[\cdot]_2$ *Functional equation of infinite order*, Scientific Pubblications of the University of Silesia **265** Uniwersytes Slaski-Katowice (1978), 64.

[2] K. Baron and J. Matkowski, *On the solution fulfilling a Lipschitz condition of nonlinear functional equation of order n*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. (8) **17** (1972), 1149-1154.

[3] K. Baron and K. Sablik, *On the uniqueness of continuous solutions of a functional equation of n-th order*, Aequationes Math. **17** (1978), 295-304.

[4] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Monografie Mat. **46**, PWN, Warzawa.

[5] M. Kwapisz and J. Turo, *Existence and uniqueness of solutions of non-linear functional equations of r-th order*, Ann. Polon. Math. **31** (1975), 145-157.

[6] S. Paganoni Marzegalli, *Sulle soluzioni di una equazione funzionale di ordine n*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **42** (1984), 165-177.

Summary

In this paper we describe a method to construct the solutions of some functional equations of the form $G(x, \varphi(f_1(x)), \ldots, \varphi(f_n(x))) = c$ *in the unknown function* φ.

We apply this method when f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *are real functions to solve these equations under suitable general hypotheses.*

* * *