Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 219-222

Alberta Suppa Modena (*)

Sui quasi-anelli distributivi $\mathscr{A}$-rigidi (**)

1 - Introduzione

Lo studio delle relazioni fra la struttura di un quasi-anello N e il suo gruppo di automorfismi $\mathscr{A}$ è stato variamente affrontato, ma fino ad ora ci si è interessati soprattutto di determinare il gruppo degli automorfismi di particolari classi di quasi-anelli (cfr. ad es. [**1**], [**2**]$_3$). Collegato ovviamente al precedente è il problema di caratterizzare i quasi-anelli con dato gruppo di automorfismi; tale questione è stata studiata più recentemente e non ancora in modo sistematico (cfr. ad es. [**5**]).

Nel presente lavoro si studiano i quasi-anelli (che chiameremo $\mathscr{A}$-rigidi in analogia con [**3**]) il cui gruppo $\mathscr{A}$ degli automorfismi si riduce all'identità.

Si dimostra che i quasi-anelli distributivi N con $0 \neq A(N) \subseteq Z(N^+)$ e $A(N^2) \neq A(N)$ non sono $\mathscr{A}$-rigidi, mentre lo sono gli anelli i cui automorfismi sono permutabili con gli endomorfismi del gruppo additivo N^+ e in cui $A(N) = 0$ oppure $N^2 = N$.

Infine si caratterizzano i quasi-anelli distributivi N i cui automorfismi sono permutabili con gli endomorfismi del gruppo N^+ che non sono $\mathscr{A}$-rigidi.

2 - Generalità

Sia N un quasi-anello; poniamo $A(N) = \{x \in N \mid xy = yx = 0 \ \ \forall y \in N\}$ e $Z(N^+) = \{x \in N \mid x + y = y + x \ \ \forall y \in N\}$ e indichiamo con N^2 il sottoquasi-anello generato da $N^{(2)} = \{xy \mid x, y \in N\}$. Se N è distributivo, $A(N)$ risulta essere un ideale e N^2 un anello. Se Aut N è l'insieme degli automorfismi di N

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 6-X-1983.

e End N^+ l'insieme degli endomorfismi del gruppo additivo N^+, si considerino, rispetto alla composizione $\circ$ di funzioni, il gruppo $\mathscr{A} = [\mathrm{Aut}\, N; \circ]$ e il semigruppo $\mathscr{E}^+ = [\mathrm{End}\, N^+; \circ]$.

Osserviamo che se $\varphi \in \mathscr{A}$, si verifica che $\varphi(A(N)) = A(N)$, $\varphi(N^2) = N^2$ e $\varphi(Z(N^+)) = Z(N^+)$.

Diamo ora la seguente

Def. 1. Un quasi-anello N si dice *$\mathscr{A}$-rigido* se ammette come unico automorfismo l'identità id_N.

Il nostro scopo è quello di caratterizzare i quasi-anelli $\mathscr{A}$-rigidi distributivi; poichè, posto $Z(\mathscr{E}^+) = \{\alpha \in \mathrm{End}\, N^+ \mid \alpha\circ\beta = \beta\circ\alpha \quad \forall\beta \in \mathrm{End}\, N^+\}$, è $\mathrm{id}_N \in Z(\mathscr{E}^+)$, è opportuno esaminare i quasi-anelli distributivi i cui automorfismi appartengono a $Z(\mathscr{E}^+)$.

Si stabiliscono le seguenti:

Oss. 1. Se N è un quasi-anello distributivo con $\mathrm{Aut}\, N^+ \subseteq Z(\mathscr{E}^+)$, allora N^2 è un ideale e $N^2 \subseteq Z(N^+)$.

Si considerino in N^+ l'automorfismo interno α_z e la traslazione sinistra ψ_t, $\forall z, t \in N$: da $\psi_t \circ \alpha_z = \alpha_z \circ \psi_t$ segue, $\forall x \in N$, $-tz + tx + tz = -z + tx + z$ e quindi $tx = z + t(-z + x + z) - z$. Allora si ha, $\forall x, y, z \in N$, $-z + xy + z = xy$ da cui la tesi.

Oss. 2. Sia N un quasi-anello distributivo con $\mathscr{A} \subseteq Z(\mathscr{E}^+)$; se $\varphi \in \mathscr{A}$ allora

(1) $\varphi(x) - x \in A(N) \cap Z(N^+)$, $\forall x \in N$;
(2) $\varphi(x)y = xy$, $\forall x, y \in N$;
(3) $\varphi(n) = n$, $\forall n \in N^2$.

(1) Siano $\varphi \in \mathscr{A}$ e $x \in N$: consideriamo le traslazioni sinistra ψ_x e destra ${}_x\psi$ che sono endomorfismi di N^+; poichè $\varphi \in Z(\mathscr{E}^+)$ segue $xy = \varphi(x)y$ e $yx = y\varphi(x)$ per cui $(\varphi(x) - x)y = 0 = y(\varphi(x) - x)$ $\forall y \in N$ e dunque $\varphi(x) - x \in A(N)$ $\forall x \in N$. Considerando ora l'automorfismo interno α_x, $\forall x \in N$, di N^+, dalla permutabilità di φ con α_x segue $-\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(x) = -x + \varphi(y) + x$ da cui $\varphi(y) + (\varphi(x) - x) = (\varphi(x) - x) + \varphi(y)$ e, per la suriettività di φ, si ha $\varphi(x) - x \in Z(N^+)$.

(2) Ovvia da (1).

(3) Segue dal fatto che $\forall x, y \in N$, $\varphi(xy) - xy = (\varphi(x) - x)\, \varphi(y) + x(\varphi(y) - y) = 0$.

2 - Quasi-anelli $\mathscr{A}$-rigidi

Ricordando che un quasi-anello distributivo N risulta un anello se $A(N) = 0$, si dimostra il

Teorema 1. *Un anello N con $\mathscr{A} \subseteq Z(\mathscr{E}^+)$ e con $N^2 = N$ oppure $A(N) = 0$ è $\mathscr{A}$-rigido.*

Se $\varphi \in \mathscr{A}$, ponendo $\alpha = \varphi - \mathrm{id}_N$, segue, dalla Oss. 2, che $\alpha(x) = 0$ $\forall x \in N$, nel caso che $A(N) = 0$ oppure che $N^2 = N$ e quindi $\varphi = \mathrm{id}_N$.

Nel caso che $A(N) \neq 0$ sussiste il

Teorema 2. *Se N è un quasi-anello distributivo con $0 \neq A(N) \subseteq Z(N^+)$ e $A(N^2) \neq A(N)$, allora N non è $\mathscr{A}$-rigido.*

Sia $a \in A(N^2)$ tale che $a \notin A(N)$; allora $aN^2 = 0 = N^2 a$ da cui segue $aN \subseteq A(N)$ e $Na \subseteq A(N)$ con $aN \neq 0$ oppure $Na \neq 0$.

Supponendo $aN \neq 0$, si consideri la funzione non identica $\varphi\colon N \to N$ definita da $\varphi(x) = x + ax$. Essa è iniettiva; se $x + ax = y + ay$ allora $-y + x = a(y - x)$ e quindi $-y + x = \bar{a} \in A(N)$; perciò da $x + ax = y + \bar{a} + a(y + \bar{a}) = y + ay$ segue $\bar{a} = 0$ e $x = y$. Poichè, $\forall z \in N$, si ha $z = \varphi(z - az)$, la φ è biiezione. Ora la verifica che φ è automorfismo è banale.

Se $aN = 0$, si ragiona in modo analogo osservando che $Na \neq 0$.

Ricordando che, se α è un endomorfismo del gruppo N^+, si dicono *emisimmetrici* gli elementi $x \in N$ tali che $\alpha(x) = -x$, posto $A(N) \cap Z(N^+) = H$, si ha

Lemma 1. *Sia N un quasi-anello distributivo con $\mathscr{A} \subseteq Z(\mathscr{E}^+)$; se $\varphi \in \mathscr{A}$ allora $\alpha = \varphi - \mathrm{id}_N$ è un endomorfismo di N privo di elementi emisimmetrici non nulli in H con $N^2 \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$ e $\operatorname{Im} \alpha \subseteq H$.*

Per la Oss. 2 si ha, $\forall x, y \in N$, $\varphi(x) - x \in H$ e $\varphi(xy) = xy$ per cui $\alpha = \varphi - \mathrm{id}_N$ è tale che $\operatorname{Im} \alpha \subseteq H$ e $N^2 \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$.

Risulta che α è un endomorfismo in quanto $\alpha(x + y) = \varphi(x + y) - (x + y) = \varphi(x) + (\varphi(y) - y) - x = \varphi(x) - x + \varphi(y) - y = \alpha(x) + \alpha(y)$; $\alpha(xy) = \varphi(xy) - xy = 0 = (\varphi(x) - x)(\varphi(y) - y)$. Inoltre, se $h \in H$ e $\alpha(h) = -h$, allora $\varphi(h) = 0$ e quindi $h = 0$.

Teorema 3. *Sia N un quasi-anello distributivo con $\mathscr{A} \subseteq Z(\mathscr{E}^+)$; N non è $\mathscr{A}$-rigido se e solo se N^+ possiede un endomorfismo α non nullo, privo di elementi emisimmetrici in H con $N^2 \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$ e $\operatorname{Im} \alpha \subseteq H$ e la funzione $\psi\colon H \to H$, definita da $\psi(h) = \alpha(h) + h$ $(\forall h \in H)$, è suriettiva.*

Se $\varphi \neq \mathrm{id}_N$ è un automorfismo di N, la funzione $\alpha = \varphi - \mathrm{id}_N$ soddisfa, per il Lemma 1, le condizioni richieste e in particolare $\psi = \varphi/H$.

Viceversa se esiste un endomorfismo α di N^+ che verifica le condizioni indicate, la funzione $\varphi = \alpha + \mathrm{id}_N$ è un automorfismo non identico di N. Infatti φ è iniettiva perchè da $\alpha(x) + x = \alpha(y) + y$ segue $\alpha(x-y) = y - x$ e quindi $x = y$. Inoltre α è suriettiva poichè, $\forall t \in N$, $\alpha(t) \in H$, allora $\exists \bar{h} \in H$ tale che $\alpha(t) = \alpha(\bar{h}) + h$ e per $x = t - \bar{h}$ si ha $\varphi(x) = \alpha(t) - \alpha(\bar{h}) + t - \bar{h} = t$. Il resto è ovvio.

Bibliografia

[1] K. D. MAGILL, Jr, *Automorphism groups of laminated near-rings*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **23** (1980), 97-102.

[2] J. J. MALONE: $[\cdot]_1$ *Near-ring automorphisms*, Doctoral dissertation, Saint Louis University 1962; $[\cdot]_2$ *Near-ring homomorphisms*, Canad. Math. Bull. **11** (1968), 35-41; $[\cdot]_3$ *Automorphisms of abstract affine near-rings*, Math. Scand. **25** (1969), 128-132.

[3] C. J. MAXSON, *Rigid rings*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **21** (1978), 95-101.

[4] G. PILZ, *Near-rings*, North-Holland, Amsterdam 1977.

[5] S. D. SCOTT, *The automorphism group of a near-ring*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), 560-562.

Summary

In this paper we study $\mathscr{A}$-rigid near-rings, namely near-rings whose automorphism group is $\{\mathrm{id}_N\}$.

We prove that distributive near-rings with $0 \neq A(N) \subseteq Z(N^+)$ and $A(N^2) \neq A(N)$ are not $\mathscr{A}$-rigid, while $\mathscr{A}$-rigid rings are the ones with $A(N) = 0$ or $N^2 = N$ whose automorphisms are permutable with the additive endormorphisms.

Then we characterize the distributive near-rings whose automorphisms are permutable with the additive endomorphisms that are not $\mathscr{A}$-rigid.

* * *