

FABIO MERCANTI (*)

Sulla classificazione dei vertici di una superficie differenziabile (**)

0 – Sulla base di alcuni risultati ottenuti in [3], in questo lavoro si procede ad una *classificazione dei vertici di una superficie differenziabile Ω di classe C^r ($r \geq 4$) nello spazio euclideo E_3* , con l'osservazione che tutti i casi a priori classificati si possono effettivamente presentare, ossia corrispondono a casi di superficie differenziabile effettivamente esistenti.

La classificazione si fonda sul fatto che il comportamento differenziale del 3-tessuto delle *linee verticali* sulla superficie Ω nell'intorno di un punto singolare per il 3-tessuto stesso è interamente descritto da un *sistema lineare ∞^4 di quartiche piane*, interpretabili come rappresentanti di classi di omologia sul toro ordinario.

La classificazione può essere vista anche come lo studio qualitativo, per mezzo di opportuni invarianti topologici, delle caratteristiche di una equazione cubica ai differenziali totali in due variabili.

I casi particolari studiati confermano l'esistenza del fenomeno della diramazione per il 3-tessuto verticale di un *ovaloide* e giustificano la complessità dei metodi suggeriti in [3] per lo studio *in grande* del tessuto verticale per un ovaloide (vedere anche [2]).

1 – Sia

$$(1) \quad z = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + \dots + R_4$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Facoltà di Architettura, Via Bonardi 3, 20133 Milano, Italy.

(**) Ricevuto: 12-IX-1983.

la rappresentazione locale di una calotta di una superficie differenziabile Ω di classe C^r ($r \geq 4$) nello spazio euclideo E_3 , avente il piano xy come piano tangente in un punto P_0 , assunto come origine degli assi.

L'equazione

$$(2) \quad a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0,$$

purchè non identicamente soddisfatta, rappresenta tre piani per l'asse z , che segano la Ω secondo una curva dotata in P_0 di un *vertice* (vedere [3], e la bibliografia ivi riportata). La (2) può anche interpretarsi come la rappresentazione di una terna di *elementi lineari* per P_0 nel piano $z = 0$, che si dicono *elementi verticali* per P_0 .

Concependo l'intorno del punto P_0 di Ω come l'insieme delle anomalie *complesse* si può dunque dire che un punto generico P_0 di una superficie differenziabile E_3 passano tre e tre soli elementi verticali, con l'ovvia casistica seguente, valida dal punto di vista della realtà.

1.1 – Da P_0 escono tre elementi verticali reali (punto di prima specie).

1.2 – Da P_0 escono un solo elemento verticale e reale e due elementi verticali complessi coniugati (punto di seconda specie).

1.3 – Da P_0 escono due elementi verticali reali coincidenti ed un elemento verticale reale da essi distinto (punto di terza specie).

1.4 – Da P_0 escono tre elementi verticali reali coincidenti (punto di quarta specie).

Per ovvie ragioni di continuità ogni punto di Ω di prima o di seconda specie ammette un intorno di punti tutti di prima ovvero rispettivamente di seconda specie, mentre in generale i punti di terza e di quarta specie possono pensarsi come punti della serratura di intorni di punti di prima o di seconda specie e perciò non godono in generale di questa proprietà.

In un intorno di un punto di prima specie è definito un *3-tessuto verticale* ⁽¹⁾ e in un intorno di un punto di seconda specie è definito un *1-tessuto verticale* ovvero, banalmente, una *sezione locale* nel fibrato tangente alla Ω .

Con riferimento al piano tangente alla Ω complessificato si potrà dunque parlare indistintamente di *3-tessuto verticale* in tutti i casi, naturalmente con

⁽¹⁾ Sistema di curve differenziabili tale che per ogni punto ne passino tre distinte e tre sole.

le precisazioni che di volta in volta si potessero rendere utili o necessarie.

Se la (2) è un'identità ogni elemento lineare per P_0 è verticale e il punto P_0 si dice un *vertice* per Ω (vedere per esempio [1], [4]). Un tale punto può dirsi *singolare per il 3-tessuto verticale*.

1.5 - In [3] si dimostra che se Ω è un ovoido allora ammette *almeno sei vertici pur di contare ciascuno con una molteplicità accuratamente definita* (²). La nozione di molteplicità ineresce tuttavia ad un punto P_0 di una superficie differenziabile indipendentemente dal fatto che Ω sia o no un ovoido.

Nei successivi paragrafi viene data una *classificazione dei vertici di una superficie differenziabile in base ad alcuni rilevanti caratteri topologici del 3-tessuto verticale nell'intorno di un vertice*. Poichè le nozioni di vertice e di tessuto verticale relativo ad una superficie Ω sono covarianti di Ω rispetto al gruppo delle similitudini dello spazio ordinario in sè, gli invarianti topologici studiati qui di seguito sono a maggior ragione *invarianti simili* di Ω .

2 - Sia P_0 un vertice di Ω . Allora nella (1) è $a_{30} = a_{21} = a_{12} = a_{03} = 0$. Si supponga che almeno uno dei coefficienti a_{40} , a_{31} , a_{22} , a_{13} , a_{04} sia diverso da zero (³). Siano (ξ, η) le coordinate di un punto P in un intorno di P_0 (nel piano xy). Gli elementi verticali uscenti da P si rappresentano allora utilizzando uno sviluppo di Taylor opportuno, nella forma

$$(3) \quad (a_{40}\xi + a_{31}\eta)h^3 + 3(a_{31}\xi + a_{21}\eta)h^2k + 3(a_{22}\xi + 4a_{13}\eta)hk^2 + (a_{13}\xi + a_{04}\eta)k^3 = 0,$$

potendosi interpretare h, k come coordinate omogenee di un elemento verticale per P e avendo trascurato infinitesimi di ordine superiore al terzo rispetto a $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Ovviamente gli elementi verticali rappresentati dalla (3) nel piano xy sono proiezioni di altrettanti elementi verticali della superficie Ω e con questi possono essere identificati quando ciò non comporti equivoci.

Si introducano ora le coordinate non omogenee $u = \eta/\xi$ per individuare un punto P infinitamente vicino a P_0 e $v = k/h$ per individuare una direzione verticale per P . La (3) diviene allora

$$(4) \quad (a_{40} + a_{31}u) + 3(a_{31} + a_{22}u)v + 3(a_{22} + a_{13}u)v^2 + (a_{13} + a_{04}u)v^3 = 0.$$

(²) L'enunciato di questo teorema si trova anche in [2], dove sono accennate le difficoltà che vengono affrontate in [3] e nella nota presente.

(³) Questa limitazione può essere rimossa formulando un'analoga ipotesi successivamente sui coefficienti dei termini di quarto grado, quinto grado, e così via, della (1). Ciò comporta esclusivamente qualche complicazione nello studio del 3-tessuto verticale relativo alla calotta differenziabile (1). I risultati contenuti nel presente lavoro sono tuttavia estendibili anche a questi casi senza alcuna particolare difficoltà concettuale.

Questa equazione ammette una comoda interpretazione geometrica. Essa fa corrispondere ad ogni punto P prossimo a P_0 nella direzione u , con un errore trascurabile nelle considerazioni che seguono, le direzioni verticali uscenti da P . Queste sono le radici della (4) pensata come equazione in v .

Le coordinate non omogenee u, v possono pensarsi anche come *coordinate proiettive* rispettivamente su due rette proiettive r, s . In tal modo la (4) può essere interpretata come l'equazione di un ciclo sul toro $T = r \times s$, prodotto usuale di r, s .

Si può interpretare la (4) anche come la *curva nel piano affine* (u, v) e, se comodo, come una curva nel piano proiettivo in cui u, v sono coordinate non omogenee.

Naturalmente queste diverse interpretazioni geometriche, di volta in volta comode, richiedono qualche cautela nell'uso delle diverse topologie del toro, del piano affine e del piano proiettivo. In relazione al toro $T = r \times s$ si chiamerà per comodità *meridiano* ogni ciclo di T luogo dei punti (u_0, v) con $u_0 \in r$ costante e v variabile su s , e *parallelo* ogni ciclo di T luogo dei punti (u, v_0) con u variabile su r e $v_0 \in s$ costante.

Due omeomorfismi $\varrho: r \rightarrow r$ e $\sigma: s \rightarrow s$ delle rette proiettive r, s in sè inducono una deformazione omotopica del toro T in sè che non altera evidentemente la natura del tessuto verticale in P_0 . Perciò *la classificazione dei vertici equivale alla classificazione omotopica delle curve* (4) *sul toro* T , rispetto al gruppo delle trasformazioni omotopiche che lasciano fermi i meridiani e i paralleli.

3 – Dal punto di vista proiettivo la (4) rappresenta un sistema lineare di quartiche C_4 passanti semplicemente per il punto improprio V_∞ dell'asse $u = 0$ e triplamente per il punto improprio U_∞ dell'asse $v = 0$. Pertanto da V_∞ escono quattro rette tangenti al finito alla generica curva C_4 del sistema. Queste rette possono pensarsi anche come meridiani sul toro T , che saranno detti *meridiani critici* per il ciclo unidimensionale di T dato dalla parte reale di C_4 . Per semplicità si identificherà talvolta questo ciclo con la C_4 .

I caratteri presi in considerazione per la classificazione topologica dei vertici sono:

3.1 – *il numero di elementi verticali uscenti da ogni punto* P *nell'intorno del vertice* P_0 , *ossia l'indice* i *dell' i -tessuto verticale* ($i = 1, 2, 3$) *in* P , *ovvero ancora il numero delle determinazioni reali della funzione* $v(u)$ *definita dalla* (4);

3.2 – *le permutazioni subite dagli elementi verticali per un giro di* P *intorno a* P_0 ;

3.3 – *il numero di meridiani critici sul toro* T .

Ci si limita qui a fare vedere con esempi quali siano i casi che si possono effettivamente presentare in relazione a un vertice della superficie Ω . Con ovvie considerazioni topologiche si riesce ad escludere l'esistenza di altri casi a priori figuranti nella classificazione in base ai caratteri 3.1, 3.2, 3.3.

4 - Prima di procedere alla classificazione anzidetta conviene fare un'ultima *osservazione preliminare*: il 3-tessuto verticale relativo ad una calotta differenziabile, rappresentato dalla (3), non è il più generale 3-tessuto rappresentabile localmente con una equazione cubica ai differenziali totali

$$(5) \quad A_{30} dx^3 + 3A_{21} dx^2 dy + 3A_{12} dx dy^2 + A_{03} dy^3 = 0,$$

con $(A_{30}, A_{21}, A_{12}, A_{03})$ funzioni differenziabili di xy nell'ipotesi che i coefficienti A_{ik} svaniscano per $x = y = 0$, ossia nell'ipotesi che l'origine sia un punto singolare. Perciò la classificazione che segue, fondata sulla considerazione della curva indicatrice (4), può anche essere riguardata come lo studio qualitativo delle caratteristiche di una equazione differenziale nell'intorno di un punto singolare. Molti aspetti del metodo seguito sono estendibili senza alcuna difficoltà concettuale al caso della più generale equazione differenziale (5).

4.1 - *Primo caso*. La quartica (4), pensata come un ciclo unidimensionale sul toro T presenta zero meridiani critici, tre determinazioni reali che subiscono per un giro del punto P attorno al vertice P_0 una sostituzione ciclica del tipo (123). Questo caso si presenta per la quartica (4) nel caso particolarmente semplice

$$(6) \quad a + 3uv + 3v^2 - uv^3 = 0$$

per $a = -6$, come si verifica con calcoli immediati, che non si riportano per brevità. In corrispondenza alla indicatrice (6) si ha la calotta seguente, come caso particolare della (1)

$$(7) \quad z = \varphi_2 - 6x^4 + 6x^2y^2 - y^4 + R_4,$$

con φ_2 forma quadratica qualunque in x, y . Per φ_2 definita positiva la calotta (7) può pensarsi appartenente ad un ovaloide. In generale per la (7) si ha dunque la seguente proprietà: nell'intorno del vertice P_0 il 3-tessuto verticale presenta tre determinazioni reali distinte che diramano fra loro ciclicamente.

4.2 - *Secondo caso*. La quartica (4), come ciclo sul toro T , presenta due o quattro meridiani critici, e perciò una o tre determinazioni reali che non dira-

mano fra loro. Questo caso si presenta per l'indicatrice (6) per $a = 1$ e, rispettivamente per $a < -18$. La quartica (6) ammette una parte reale immediatamente tracciabile, costituita, sia che la si pensi appartenente al piano proiettivo sia che la si pensi sul toro T , da un solo ramo reale. Le corrispondenti calotte, rientranti come casi particolari nella (1), sono date da

$$z = \varphi_2 + ax^4 + 6x^2y^2 - y^4 + R_4 \quad \text{per } a = 1 \quad \text{e} \quad a < -18.$$

4.3 - *Terzo caso.* Per ogni valore reale di u le determinazioni reali della funzione $v(u)$ data dalla (4) si riducono ad una sola. Non vi sono (ovviamente) meridiani critici e perciò non si presenta il fenomeno della diramazione degli elementi verticali. Un esempio di curva indicatrice (4) rientrante in questo caso è quello dato dalla quartica

$$1 + 3uv + 3v^2 + uv^3 = 0,$$

alla quale corrisponde la calotta

$$z = \varphi^2 + x^4 + 6x^2y^2 + y^4 + R_4.$$

In un intorno di P_0 il tessuto verticale si presenta come un 1-tessuto. Si verifica facilmente che questo caso corrisponde, in relazione alle caratteristiche della (5), al caso classico del *nodo a stella* in relazione ad una equazione ai differenziali totali del tipo $A dx + B dy = 0$.

4.4 - *Quarto caso.* La quartica (4) presenta *due meridiani critici coincidenti, tre determinazioni reali fra le quali una si stacca dalle due rimanenti che diramano fra loro.* Questo caso è intermedio tra i casi 4.1, 4.2. Un esempio è fornito dalla quartica

$$(8) \quad 3uv + 3v^2 - uv^3 = 0,$$

alla quale corrisponde la calotta

$$(9) \quad z = \varphi_2 + 6x^2y^2 - y^4.$$

La quartica (8) è spezzata nella retta $v = 0$ e nella cubica residua

$$(10) \quad 3u + 3v - uv^2 = 0.$$

Le due determinazioni $v(u)$ della funzione algebrica definita dalla (10) al variare

di u su tutto l'intervallo reale, ossia per un giro di P attorno a P_0 , si scambiano fra loro come risulta da facilissime verifiche. L'intersezione nel punto P_0 fra la retta $v = 0$ e la cubica (10) può ovviamente pensarsi come un punto doppio per la quartica (4) e spiega la presenza del meridiano $u = 0$ come la sovrapposizione di due meridiani critici. Il 3-tessuto verticale in un intorno del punto P_0 presenta tre determinazioni reali fra le quali due diramano fra loro in modo analogo a quanto visto in 4.1. Vi è una terza determinazione del 3-tessuto verticale, corrispondente ad un fascio di caratteristiche tutte parallele (localmente e a meno di omotopie infinitesime) ad una direzione fissa.

4.5 - *Quinto caso.* La quartica (4) si spezza in due rette parallele all'asse u e in una conica residua per il punto improprio dell'asse v . Il 3-tessuto verticale in un intorno di un vertice P_0 presenta tre determinazioni reali fra loro non diramanti. Il 3-tessuto verticale può dunque pensarsi come la sovrapposizione di tre 1-tessuti K_1, K_2, K_3 : uno presenta un *nodo a stella* (4.3) mentre i *fili* di K_2, K_3 sono localmente paralleli (a meno di omotopie infinitesime) a due direzioni fisse fra loro distinte. Si hanno inoltre due coppie di meridiani critici coincidenti. Un esempio di questo caso è la quartica

$$uv + (1 - 3u)v^2 + (-1 + 2u)v^3 = 0,$$

che si spezza nelle componenti $v = 0$, $v = 1$ e $(2u - 1)v - u = 0$. La calotta (1) relativa a questo caso può essere scritta

$$z = \varphi_2 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4 + R_4.$$

5 - In relazione alla questione proposta la classificazione può ritenersi completa. Non interessano i casi particolari in cui la quartica (4) si spezza in una retta per il punto improprio dell'asse $u = 0$ (in particolare nella retta impropria) e in una cubica residua. Tali casi si riducono ai precedenti con omotopie del toro T in se stesso, nel modo precisato in 2.

I casi elencati in 4 confermano l'esistenza del fenomeno della diramazione per il 3-tessuto verticale anche nel caso in cui la superficie Ω sia un ovoidoide e giustificano la complessità dei metodi suggeriti in [3] per lo studio *in grande* del tessuto verticale per un ovoidoide.

Bibliografia

- [1] O. KARWOWSKY, *Vertical lines and points of a surface*, Ann. Polon. Math. **19** (1964), 141-168.

- [2] G. MELZI, *Fasci di fibre, fasci multipli e problemi di Geometria differenziale in grande*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **39** (1969), 1-36.
- [3] F. MERCANTI, *Sul numero minimo di vertici di un ovoido differenziabile*, Rend. di Matem. e delle sue applicazioni, Università di Roma 1984 (in corso di stampa).
- [4] G. VACCARO, *Sulla nozione di vertice di una superficie*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Matem. (8) **37** (1964), 401-406.

A b s t r a c t

The same types of vertices of a differentiable surface Ω has been classified interpreting same indicatrix curves of the vertices of Ω as classes of omology on the torus. The classification can be regarded as a qualitative study of the caractéristique of a first-order cubique differential equation around a singular point.

* * *