Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 197-202

Gilbert Monna (*)

Feuilletage de contact défini par une forme de contact régulière (**)

Introduction et définitions

R. Lutz définit dans [2] la notion de forme de contact régulière: V étant un fibré principal en cercles de fibre type S^1, de dimension 3, soit X le champ de vecteurs global sans singularité défini par l'action de S^1 sur V. Une forme de contact α, invariante par l'action de S^1 sur V, est dite *régulière* si la fonction $\alpha(X)$ est sans zéro sur V.

α étant une forme de contact sur V, on appelle *système dynamique* de α l'unique champ de vecteurs sans singularité sur V noté Y_α tel que $i_{Y_\alpha}\alpha = 1$ et $i_{Y_\alpha}\mathrm{d}\alpha = 0$. Le feuilletage de V défini par les trajectoires du champ de vecteurs Y_α est appelé *feuilletage de contact associé à la forme de contact.*

Si α_0 est une forme de contact admettant X pour système dynamique (voir [2] pour une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle forme de contact), le feuilletage de contact associé à α_0 est régulier puisqu'il coïncide avec la fibration.

Une question naturelle est alors:
en est-il de même pour d'autres feuilletages de contact associés à des formes de contact régulières sur V?

Le premier paragraphe de cet article apporte une réponse partielle négative, en donnant une description précise, au voisinage de certaines de ses feuilles, du feuilletage de contact associé à une forme de contact régulière sur V.

(*) Indirizzo: Centre Universitaire d'Avignon, Dépt. de Mathématiques, 33 rue Luis Pasteur, 84000 Avignon, France.

(**) Ricevuto: 1-IX-1983.

Dans le deuxième paragraphe, on rappelle la notion de métrique adaptée à une forme de contact. On montre ensuite que les résultats du paragraphe **1** permettent d'établir la non existence de métriques adaptées à certaines formes de contact régulières, alors qu'il existe des métriques adaptées aux formes de contact admettant X pour système dynamique.

1 - Feuilletages de contact définis par les formes de contact réguliéres sur un fibré principal en cercles

Soit (V, π, W) un fibré principal de fibre type S^1, de base W. On note toujours X le champ de vecteurs défini par l'action de S^1 sur V, et on appelle *fonction basique* une fonction $C^\infty f$ sur V telle que $Xf = 0$. On suppose que la classe caractéristique de V n'est pas nulle, de telle sorte (voir [**2**]) qu'il existe une forme de contact α_0 admettant X pour système dynamique.

Proposition 1. *Les formes de contact régulières sont les multiples par les fonctions basiques sans zéro des formes de contact admettant X pour système dynamique.*

Dém. Soit α telle que $i_X\alpha = 1$, $i_X \mathrm{d}\alpha = 0$ et f telle que $Xf = 0$. On a $\mathscr{L}_X(f\alpha) = (\mathscr{L}_X f)\alpha + f\mathscr{L}_X\alpha = 0$.

Donc $\alpha' = f\alpha$ est une 1-forme invariante. D'autre part le champ de plans défini par les noyaux de α vérifie la condition de contact donné par Gray [**1**]. Le champ d'éléments de contact défini par les noyaux de $f\alpha$ étant le même, il vérifie la condition de contact, et donc $f\alpha$ est une forme de contact invariante. f étant sans zéro, il est clair que $f\alpha$ est régulière.

Si α' est une forme de contact régulière, posons $\alpha = \alpha'/\alpha'(X)$. On a $\alpha(X) = 1$ et $\mathscr{L}_X\alpha = 0$, d'où $i_X \mathrm{d}\alpha = 0$.

On montre de la même façon que précédemment que α est une forme de contact, qui admet donc X pour système dynamique.

Soit f une fonction basique, considérons la forme de contact régulière $f\alpha_0$ et désignons par X' son système dynamique. On a $\alpha_0(X) = 1$, donc $(f\alpha_0)\big((1/f)X\big) = 1$. On en déduit $(f\alpha_0)\big(X' - (1/f)X\big) = 0$. Donc $X' = (1/f)X + Y$, où Y est un champ de vecteurs sur V tel que $\alpha_0(Y) = 0$, c'est à dire que Y est un champ de vecteurs horizontal pour la connexion définie par α_0 sur V.

On doit d'autre part avoir $i_{(1/f)X+Y}(\mathrm{d}f \wedge \alpha_0 + f\,\mathrm{d}\alpha_0) = 0$ c'est à dire $-(\mathrm{d}f)/f + (Yf)\alpha_0 + f i_Y \mathrm{d}\alpha_0 = 0$, donc $i_Y \mathrm{d}\alpha_0 = (\mathrm{d}f)/f^2 - (Yf)\alpha_0$. Si on applique les deux membres de cette égalité au champ de vecteurs X, on obtient $Yf = 0$. On a finalement $i_Y \mathrm{d}\alpha_0 = (\mathrm{d}f)/f^2$, $Yf = 0$.

Le champ de vecteurs Y étant horizontal pour la connexion α_0 projetable sur W, nous désignerons sa projection par $\overline{Y}$. La projection sur W de la fonction f sera notée $\bar{f}$. Enfin $d\alpha_0$ est projetable, donc il existe une forme volume sur W, notée β telle que $\pi^*\beta = d\alpha_0$. Les relations précédentes s'écrivent alors, en projection sur W $i_{\bar{Y}}\beta = (d\bar{f})/\bar{f}^2$, $\bar{Y}\bar{f} = 0$.

La première relation définit $\bar{Y}$ de manière unique. La deuxième entraine que les trajectoires du champ de vecteurs $\bar{Y}$ sont contenues dans les courbes de nivau de la fonction $\bar{f}$.

$\bar{f}$ étant une fonction C^∞ sur la variété compacte W, elle admet un extrémum au moins. Désignons par $\bar{x}_0$ un extremum de f. Au point $\bar{x}_0$ $d\bar{f}$ est nulle, donc $\bar{Y}$ est nul. Donc sur la fibre de V au dessus de $\bar{x}_0$ le champ de vecteurs Y est nul, donc le champ de vecteurs X' est égal à $(1/f)X$.

Soit x_0 un point de V, de projection $\bar{x}_0$ sur W. Désignons par $\mathscr{F}_{x_0}$ la feuille passant par x_0 du feuilletage de contact associé à la forme de contact régulière $f\alpha_0$. $\mathscr{F}_{x_0}$ coincide donc avec la fibre de V passant par x_0, que nous désignons par S_{x_0}.

Le théorème suivant donne une description du feuilletage de contact associé à certaines formes de contact régulières $f\alpha_0$.

Théorème. *Soit f une fonction basique transversalement de Morse sur V. Avec les notations précédentes, il existe un voisinage U de S_{x_0} tel que la feuille passant par x (élément de U) du feuilletage de contact associé à la forme de contact $f\alpha_0$ est fermée si et seulement si $f(x)$ est rationnel.*

Dém. $\bar{f}$ étant une fonction de Morse sur W, il existe un voisinage de $\bar{x}_0$ dans lequel les courbes de niveau de $\bar{f}$ sont des cercles de centre x_0. Les trajectoires de $\bar{Y}$ seront alors les mêmes cercles.

Soit x un élément de V, dont la projection sur W soit dans le voisinage précédent de $\bar{x}_0$. Notons S_x la fibre de V passant par x. Paramétrons S_x par $\exp(it)$, t appartenant à $\boldsymbol{R}$, le point de paramètre 0 étant x. La trajectoire de Y passant par x recoupe S_x en un point de paramètre h, h représentant l'holonomie de la connexion α_0. Rappellons que $h = \int_{D_{\bar{x}}} \beta$, $D_{\bar{x}}$ étant le disque de W de bord $C_{\bar{x}}$, trajectoire de $\bar{Y}$ passant par $\bar{x}$.

Si on est assez proche du point $\bar{x}_0$, il existe des coordonnées (ϱ, θ) telles que $\bar{Y} = \partial/\partial\theta$. Soit U' un voisinage de $\bar{x}_0$ dans lequel on ait un tel système de coordonnées locales, et dans lequel les courbes de niveau de $\bar{f}$ soient des cercles de centre $\bar{x}_0$. On pose alors $U = \pi^{-1}U'$. La 2-forme β s'écrit

$$\beta = g\, d\varrho \wedge d\theta.$$

On sait que $i_{\bar{Y}}\beta = (d\bar{f})/\bar{f}^2$. On en déduit $-g\, d\varrho = (d\bar{f})/\bar{f}^2$. $\bar{f}$ étant une fonction dont les courbes de niveau sont les cercles de centre $\bar{x}_0$, $d\bar{f} = ((\partial\bar{f})/\partial\varrho)\, d\varrho$

et donc $g = (-1/\bar{f}^2)\,\partial\bar{f}/\partial\varrho$.

$$\int_{D_{\bar{x}}} \beta = \int_{D_{\bar{x}}} (-1/\bar{f}^2)(\partial\bar{f}/\partial\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\wedge\mathrm{d}\theta = \int_{D_{\bar{x}}} \frac{\partial(1/\bar{f})}{\partial\varrho}\,\mathrm{d}\varrho\wedge\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{C_{\bar{x}}} (1/\bar{f})\,\mathrm{d}\varrho = (1/\bar{f})\int_{C_{\bar{x}}} \mathrm{d}\theta = (2\pi)/\bar{f}(\bar{x}) = (2\pi)/f(x)\,.$$

Donc dans un voisinage de l'orbite passant par x_0, l'orbite de Y passant par x est fermée si et seulement si $f(x)$ est rationnel.

Il ne reste plus qu'à démontrer que l'orbite de X' est fermée si et seulement si l'orbite de Y est fermée.

On désigne par $\gamma_t(x)$, $\varphi_t(x)$, $\vartheta_t(x)$ les groupes à un paramètre respectifs des champs de vecteurs $(1/f)X$, Y et X'. $\gamma_0(x)$, $\varphi_0(x)$ et $\vartheta_0(x)$ sont égaux à x. Si $t = 2\pi$, $\varphi_t(x)$ est le point de S_x de paramètre $(2\pi)/f(x)$, et $\gamma_t(x)$ est le même point. Pour tout élément n de $\boldsymbol{N}$, on a $\gamma_{2n\pi}(x) = \varphi_{2n\pi}(x)$. Si $1/f(x)$ est élément de $\boldsymbol{Q}$, il existe un réel t_0 tel que $\varphi t_0(x) = x$.

On a alors, pour toute fonction l définie de V dans $\boldsymbol{R}$: $X'l = (1/f)Xl + Yl$, c'est à dire

$$(\partial/\partial t)\,l(\vartheta_t(x)) = (\partial/\partial t)\,l(\varphi_t(x)) + (\partial/\partial t)\,l(\gamma_t(x))\,.$$

En intégrant l'égalité précédente, on obtient

$$l(\vartheta_{t_0}(x)) - l(x) = l(\gamma_{t_0}(x)) - l(x) + l(\varphi_{t_0}(x)) - l(x)\,,$$

c'est à dire que $l(\vartheta_{t_0}) = l(x)$, et ceci pour toute fonction l sur V. Donc $\vartheta_{t_0}(x) = x$ et l'orbite de X' est fermée.

Si $1/f(x)$ n'est pas élément de $\boldsymbol{Q}$, pour tout t dans R, $\varphi_t(x) \neq x$. Donc, pour tout t tel que $\varphi_t(x)$ soit sur S_x, $\gamma_t(x) \neq x$. Il existe une fonction C^∞ sur V telle que

$$l(\varphi_t(x)) \neq l(x) \qquad \text{et donc} \qquad l(\gamma_t(x)) \neq x\,.$$

On a alors

$$l(\vartheta_t(x)) - l(x) = 2l(\varphi_t(x)) - l(x))\,,$$

c'est à dire que $l(\vartheta_t(x)) \neq l(x)$ et donc $\vartheta_t(x) \neq x$.

Cela étant vrai pour tout réel t tel que $\varphi_t(x)$ soit sur S_x, l'orbite de X' passant par x n'est pas fermée. Le théorème est donc démontré. f étant une fonction transversalement de Morse, elle n'est pas constante. Elle prendra donc des valeurs rationnelles et des valeurs irrationnelles, et dans tout voisinage d'un point en lequel f prend une valeur rationnelle, il y aura des points en lesquels f prendra une valeur irrationnelle. On en déduit

Corollaire 1. *Si f est une fonction basique sans zéro, transversalement de Morse, le feuilletage de contact défini par la forme de contact $f\alpha_0$ a des feuilles compactes et des feuilles non compactes, certaines feuilles compactes n'étant pas isolées.*

Remarquons pour finir qu'un tel feuilletage ne peut être régulier.

2 - Métriques adaptés à une forme de contact

Défintion. On dit qu'une métrique riemannienne g est *adaptée à une forme de contact* α si et seulement si

(1) $g(Y_\alpha, X) = \alpha(X)$ pour tout champ de vecteurs local X sur V.

(2) $\mathscr{L}_{Y_\alpha} g = 0$.

Pour plus de détails sur les métriques riemanniennes adaptées à une forme de contact, nous renvoyons à [**4**]. Remarquons seulement que s'il existe une métrique riemannienne adaptée à une forme de contact α le système dynamique de α, Y_α est transversalement riemannien.

Proposition 2. *Si f est une fonction basique sur V, sans zéro et transversalement de Morse, il n'existe pas de métrique riemannienne adaptée à la forme de contact $f\alpha_0$.*

Dém. D'après [**3**] si un feuilletage transversalement riemannien a des feuilles compactes et des feuilles non compactes, les feuilles compactes sont isolées. Le feuilletage de contact défini par la forme de contact $f\alpha_0$ ne peut être transversalement riemannien, puisque d'après le Corollaire 1, il a des feuilles compactes non isolées.

Bibliografia

[1] J. W. Gray, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421-450.

[2] R. Lutz, *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension* 3, Ann. Inst. Fourier **87** (1977), 1-15.

[3] P. Molino, *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*, Indag. Math. **44** (1982), 45-76.

[4] G. Monna, *Connexions métriques adaptées à une structure de contact strict*, C. R. Acad. Sci. Paris (1981), 365-367.

Abstract

In [**2**] *R. Lutz define the notion of regular contact form. V being a principal circle fiber of dimension* 3, *let be X the global vector field without zero defined by a natural $\boldsymbol{S}^1$-action on V. A contact form α on V, invariant by the $\boldsymbol{S}^1$-action, is said to be regular if the function $\alpha(X)$ is without zero. This paper answer to the question.*

Is the foliation defined by a regular contact form regular? We give also a description of the foliation and an application to the non-existence of adapted metrics.

* * *