Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 187-196

V. DE RIENZO e A. MESSINA (*)

Su un modello non lineare di diffusione in mezzi porosi con porosità distribuita su doppia scala (**)

1 - Introduzione

E. Ruckenstein, A. S. Vaidynathan e G. R. Youngquist hanno studiato in [1] il fenomeno della diffusione in mezzi con struttura porosa irregolare, esaminando in particolare quelli in cui si può individuare una doppia struttura di pori di dimensioni molto differenti tra loro (macropori, micropori), coi micropori uniformemente distribuiti nei macropori. Essi elaborano un modello, riferito al caso di simmetria sferica, costituito da due equazioni paraboliche lineari che traducono i processi diffusivi nei macropori e nei micropori, schematizzati come sfere. In tale modello l'accoppiamento tra i due processi avviene nel seguente modo: (i) la concentrazione v della sostanza diffondente alla superficie della microsfera col centro nel punto x all'istante t è proporzionale al valore ivi assunto dalla concentrazione u nella macrosfera (idealizzata come un mezzo omogeneo); (ii) lo scambio di massa tra macrosfera e microsfere è schematizzato mediante un termine di sorgente nell'equazione di diffusione per la macrosfera, proporzionale al flusso uscente delle pareti delle microsfere. Gli Autori ottengono una soluzione del problema coi dati iniziali e al contorno costanti mediante l'uso della trasformata di Laplace.

In [4], R. Steudel riprende lo stesso modello con simmetria sferica, introducendo delle non linearità sia nei singoli processi diffusivi, sia nei termini di accoppiamento. In tale lavoro viene dimostrata l'esistenza e l'unicità di una soluzione in senso generalizzato del corrispondente problema ai valori iniziali e al contorno.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari - Via Re David 200/A, 70125 Bari, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 1-IX-1983.

Nel presente lavoro consideriamo uno schema più generale, nel quale viene abbandonata l'ipotesi di simmetria sferica, con l'intento di dimostrare che il problema ai valori iniziali e al contorno possiede una unica soluzione *classica*.

Il problema è enunciato come segue: dati due domini, Ω, $\Omega_1 \subset R^n$, di frontiera regolare e una costante $T > 0$, poniamo $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $Q_{1,T} = \Omega_1 \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, $S_{1,T} = \partial\Omega_1 \times (0, T)$ e indichiamo con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i punti di Ω e con $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ i punti di Ω_1.

Problema P. Trovare $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, $v \in C^{2,1}(Q_{1,T}) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_{1,T})$, in modo che per qualche $T > 0$ siano verificate le equazioni

$$\nabla \cdot \big(K(u)\ \nabla u\big) = \frac{\partial u}{\partial t} + K_1(v) \frac{\partial v}{\partial n_1}\Big|_{y\in S_{1,T}} \qquad (x,t) \in Q_T\,,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega, \qquad u(x, t)\,|_{S_T} = 1 \qquad 0 < t < T,$$

$$\nabla_y \cdot \big(K_1(v)\ \nabla_y v\big) = \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (y, t) \in Q_{1,T}, \qquad v(y, 0; x) = v_0(y; x) \qquad y \in \Omega_1\,,$$

$$v(y, t; x)\,|_{S_{1,T}} = h\big(u(x, t)\big) \qquad 0 < t < T\,,$$

dove ∇_y, $\nabla_y\cdot$ sono gli operatori gradiente e divergenza sulle variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n_1 la normale esterna ad S_1 e K, K_1, h, u_0, v_0 sono funzioni assegnate.

Nel seguito assumeremo che:

— K, K_1 siano funzioni hölderiane (esponente $\alpha \in (0, 1)$), che verificano delle ipotesi standard di crescita asintotica (v. ad es. [**2**] pag. 452) tali che

$$0 < \nu(|u|) \leqslant K(u) \leqslant \mu(|u|)\,, \qquad 0 < \nu_1(|v|) \leqslant K_1(v) \leqslant \mu_1(|v|)$$

(ν, ν_1 funzioni continue non crescenti; μ, μ_1 funzioni continue non decrescenti);

— $h \in C^2(R)$;

— $u_0 \in H^{2+\alpha}(\Omega)$, $v_0(\cdot\,; x) \in H^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $v_0(y; \cdot) \in H^{2+\alpha}(\Omega)$ (¹);

— siano soddisfatte le seguenti condizioni di compatibilità:

(i) tra $u_0(x)$ e $u(x, t)\,|_{S_T}$: $u_0(x)\,|_{\partial\Omega} = 1$; (ii) tra $v_0(y; x)$ e $v(y, t; x)\,|_{S_{1,T}}$: $v_0(y; x)\,|_{\partial\Omega_1} = h\big(u_0(x)\big)$; tra $u_0(x)$ e $v_0(y; x)$: (iii) $\{\nabla\cdot\big(K(u_0)\nabla u_0\big)\}_{x\in S_T} = \{K_1\big(h(u_0)\big) \cdot (\partial v_0/\partial n_1)\,|_{y\in S_{1,T}}\}_{x\in S_T}$; (iv) $\nabla_y\big(K_1(v_0)\nabla_y v_0\big)_{y\in S_{1,T}} = h'(u_0)\{\nabla\cdot\big(K(u_0)\nabla u_0\big) - K_1\big(h(u_0)\big) \cdot (\partial v_0/\partial n_1)\,|_{y\in S_{1,T}}\}$.

(¹) Sia per i simboli usati per gli spazi funzionali di Hölder, che per le norme in essi definite cfr. [**2**].

Dimostreremo il seguente

Teorema 1.1. *Nelle ipotesi sopra enunciate esiste* $T_0 > 0$ *tale che il Problema* P *ammette una e una sola soluzione in* $(0, T_0)$. *Inoltre*

$$u \in H^{2+\alpha,\, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_{T_0}), \qquad v \in H^{2+\alpha,\, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_{1,T_0}).$$

Il processo dimostrativo consiste nella identificazione della soluzione con il punto fisso di un opportuno operatore.

2 - L'operatore $\mathscr{X}$

Definito l'insieme di funzioni

$$X(M, M_1, T, \alpha)$$

$$=\{\omega \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T):\ \|\omega\|_{Q_T}^{(0)} \leqslant M,\ \|\omega\|_{Q_T}^{(\alpha)} \leqslant M_1, \qquad \omega(x, 0) = K_1(h(u_0))\,\frac{\partial v_0}{\partial n_1}\Big|_{y \in S_{1,T}}\},$$

con M, M_1 costanti da determinare e preso $\omega \in X$ risolviamo il problema

$$\nabla\cdot\big(K(U)\,\nabla U\big) = \frac{\partial U}{\partial t} + \omega(x, t) \qquad (x, t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$U(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$U(x, t)\,|_{S_T} = 1 \qquad 0 < t < T, \tag{2.3}$$

che (per le ipotesi fatte) ammette una ed una sola soluzione $U(x, t) \in H^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ (v. [2] Teor. 6.1, pag. 452). Il problema

$$\nabla_y\cdot\big(K_1(V)\,\nabla_y V\big) = \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (y, t) \in Q_{1,T}, \tag{2.4}$$

$$V(y, 0; x) = v_0(y; x) \qquad y \in \Omega_1, \tag{2.5}$$

$$V(y, t; x)\,|_{S_{1,T}} = h\big(U(x, t)\big) \quad 0 < t < T, \tag{2.6}$$

per lo stesso teorema citato, ammette una ed una sola soluzione $V(\cdot, \cdot; x)$

$\in H^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{Q}_{1,T})$. Definiamo quindi l'operatore $\mathscr{L}$

$$\tilde{\omega}(x,t) = \mathscr{L}\omega(x,t) = K_1(V)\,\frac{\partial V}{\partial n_1}\,\Big|_{y\in S_{1,T}}. \tag{2.7}$$

Osserviamo che in corrispondenza di ogni punto fisso di $\mathscr{L}$ le funzioni U e V risolvono il Problema P.

Dopo aver dimostrato che $\tilde{\omega}(x,t)$ appartiene ad X per un'opportuna scelta dei parametri che definiscono X (in **4**), la dimostrazione del Teorema 1.1 è ricondotta alla dimostrazione della contrattività dell'operatore $\mathscr{L}$.

3 - Alcune stime

Diamo ora alcune stime delle soluzioni $U(x,t)$ e $V(y,t;x)$ dei problemi di **2**.

Se $U(x,t)$ è soluzione del problema (2.1)-(2.3) per essa sussistono le stime (3.1), (3.2) e (3.3) seguenti, dove le costanti che compaiono dipendono dai dati, oltre che dalle grandezze specificate.

$$\|U\|^{(0)}_{Q_T} \leqslant N(\|\omega\|^{(0)}_{Q_T}), \qquad \|\nabla U\|^{(0)}_{Q_T} \leqslant N_0(\|\omega\|^{(0)}_{Q_T}). \tag{3.1}$$

Le stime (3.1) si ottengono immediatamente applicando il principio di massimo e il Lemma 3.1 [**2**] (pag. 535).

$$\|U\|^{(2+\alpha)}_{Q_T} \leqslant N_1(\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_T}). \tag{3.2}$$

La stima (3.2) si ottiene applicando il Teor. 5.2 [**3**] (pag. 320)

$$\|U\|^{(2+\alpha)}_{Q_T} \leqslant \text{cost}\,\big(\|u_0(x)\|^{(2+\alpha)}_{Q_T} + \|\omega(x,t)\|^{(\alpha)}_{Q_T}\big)\,.$$

$$\|U\|^{(1+\nu)}_{Q_T} \leqslant N_2^{(\nu)}(\|\omega\|^{(0)}_{Q_T}), \qquad \forall \nu \in (0,1). \tag{3.3}$$

Posto, infatti,

$$A(x,t) = U(x,t) - \Psi(x,t)$$

con $\Psi \in H^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ funzione nota, tale che $\Psi(x,0) = u_0(x)$, $\Psi(x,t)|_{S_T} = 1$, consideriamo il problema

$$\nabla\cdot\big(K(U)\,\nabla A\big) - \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \omega(x,t) - \nabla\cdot\big(K(U)\,\nabla\Psi\big)\,,$$

$$A(x,0) = 0\,, \qquad A(x,t)|_{S_T} = 0\,.$$

Poichè risulta (cfr. le condizioni di compatibilità (i)-(iv) e la definizione di ω)

$$\{\omega(x, 0) - \nabla\cdot\big(K(u_0)\ \nabla\Psi\big) + \frac{\partial\Psi}{\partial t}|_{t=0}\}_{S_T} = 0$$

e sono inoltre verificate tutte le altre ipotesi di applicabilità del Teor. 4.1 [**1**] (pag. 191) grazie alle (3.1), segue (3.3).

Stime analoghe alle stime (3.1) e (3.2) valgono per la soluzione $V(y, t; x)$ del problema (2.4)-(2.6) ([2])

$$(3.1)' \qquad \|V\|^{(0)}_{Q_{1,T}} \leqslant N'(\|\omega\|^{(0)}_{Q_T}) , \qquad (3.2)' \qquad \|V\|^{(2+\alpha)}_{Q_{1,T}} \leqslant N'_1(\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_{1,T}}) .$$

Sussiste inoltre la seguente stima

$$(3.3)' \qquad \|V\|^{(1+\nu)}_{Q_{1,T}} \leqslant k_1(M) + k_2(\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_T})\ T^{\alpha/2} \qquad \forall\nu\in(0, 1)$$

con k_1 e k_2 costanti che dipendono dalle quantità indicate e dai dati.

Per effettuare questa stima si introduce la funzione

$$(3.4) \qquad \Psi_1(y, t; x) = v_0(y; x) + h(U(x, t)) - h(u_0(x))$$

tale che $\Psi_1(y, 0; x) = v_0(y; x)$, $\Psi_1(y, t; x)|_{S_{1,T}} = h(U(x, t))$, e quindi la funzione $A_1(y, t; x) = V(y, t; x) - \Psi_1(y, t; x)$, che risolve il problema

$$\nabla_y\cdot\big(K_1(V)\ \nabla_y A_1\big) - \frac{\partial A_1}{\partial t} = \frac{\partial\Psi_1}{\partial t} - \nabla_y\cdot\big(K_1(V)\ \nabla_y\Psi_1\big) ,$$

$$A_1(y, 0; x) = 0 , \qquad A_1(y, t; x)|_{S_{1,T}} = 0 .$$

Poichè $K_1(V)$ è lipschitziana su $S_{1,T}$, in quanto U_t risulta limitata in funzione di $\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_T}$ ed inoltre

$$\{\nabla_y\cdot\big(K_1(v_0)\ \nabla v_0\big)\}_{y\in S_{1,T}} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\ |_{\substack{t=0\\ y\in S_{1,T}}} = 0 ,$$

dal Teor. 4 [**1**] (pag. 191), segue

$$(3.5) \qquad \|V\|^{(1+\nu)}_{Q_{1,T}} \leqslant k_0\{\|\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} - \big(K'_1(V)(\nabla_y\Psi_1)^2 + K_1(V)\ \Delta_y\Psi_1\big)\|^{(0)}_{Q_{1,T}} + \|\Psi_1\|^{(1+\nu)}_{Q_{1,T}}\} ,$$

([2]) $\|V\|^{(0)}_{Q_{1,T}} \equiv \sup\limits_{x\in\Omega} \|V(\cdot, \cdot; x)\|_{Q_{1,T}}$.

dove k_0 è una costante che dipende (in modo continuo) oltre che dai dati, da $\|\partial U/\partial t\|_{Q_T}^{(0)}$ e da M [3]. Poichè $\nabla_y \Psi_1 = \nabla_y v_0$, $\Delta_y \Psi_1 = \Delta_y v_0$, $\partial \Psi_1/\partial t = h'(\partial U/\partial t)$ e inoltre $\|\partial U/\partial t\|_{Q_T}^{(0)} \leqslant k_3 + \|U\|_{Q_T}^{(2+\alpha)} T^{\alpha/2}$, usando le stime (3.2) e (3.5) si giunge facilmente alla dimostrazione della (3.3)'. Poichè tutte le stime in $1+\nu$ valgono $\forall \nu \in (0,1)$, d'ora in poi assumeremo $\nu = \alpha$.

4 - $\mathscr{T}: X \to X$.

Osserviamo anzitutto che per le (3.1) e (3.3)', $\tilde{\omega}(x, t)$ è limitata e hölderiana rispetto a t con esponente $\alpha/2$. Per mostrare poi che $\tilde{\omega}(x, t)$ è hölderiana rispetto ad x con esponente α, occorre stimare

$$\|\tilde{\omega}(x', t) - \tilde{\omega}(x'', t)\|_{Q_T}^{(0)} \tag{4.1}$$

$$\leqslant \Big\|\Big\{K_1(V(y, t; x'))\Big(\frac{\partial V(y, t; x')}{\partial n_1} - \frac{\partial V(y, t; x'')}{\partial n_1}\Big) + \big(K_1(V(y, t; x')) - K_1(V(y, t; x''))\big) \cdot \frac{\partial V(y, t; x'')}{\partial n_1}\Big\}_{S_{1,T}}\Big\|_{Q_T}^{(0)}.$$

A tale scopo, introduciamo la funzione

$$W(y, t; x', x'') = V(y, t; x') - V(y, t; x'') \equiv V' - V''$$

e stimiamo $\|W\|_{Q_{1,T}}^{(1+\alpha)}$. Essa risolve il problema

$$\nabla_y \cdot (K_1(V') \nabla_y W) + \bar{K}_1(y, t; x', x'') W \Delta_y V'' + \nabla_y V'' \cdot \bar{K}_2(y, t; x', x'') \nabla_y W = \frac{\partial W}{\partial t},$$

$$W(y, 0; x', x'') = v_0(y; x') - v_0(y; x''),$$

$$W(y, t; x', x'')|_{S_{1,T}} = h(U(x', t)) - h(U(x'', t)),$$

con condizioni iniziali ed al contorno non nulle. Introdotta, similmente alla (3.4), la funzione nota $\Psi_2(\cdot\,\cdot; x', x'') \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_{1,T})$, tale che

$$\Psi_2(y, 0; x', x'') = v_0(y; x') - v_0(y; x''),$$

$$\Psi_2(y, t; x', x'')|_{S_{1,T}} = h(U(x', t)) - h(U(x'', t)),$$

---

[3] In un intervallo limitato di variabilità dei parametri si può sempre pensare che k_0 dipende da essi linearmente.

è possibile applicare il Teor. 4 [1] (pag. 191) alla differenza $W - \Psi_2$ ed ottenere infine

$$(4.2) \qquad \|W\|^{(1+\alpha)}_{Q_{1,T}} \leqslant N_3(\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_T})\Big(\|v_0(\cdot, x') - v_0(\cdot, x'')\|^{(2)}_{\Omega_1} + \Big\|h'(U(x', \cdot))\frac{\partial U(x', \cdot)}{\partial t} - h'(U(x'', \cdot))\frac{\partial U(x'', \cdot)}{\partial t}\Big\|^{(0)}_{(0,T)}\Big).$$

Se si tiene conto delle ipotesi fatte su v_0 e della (3.2), la (4.2) diventa

$$(4.3) \qquad \|W\|^{(1+\alpha)}_{Q_{1,T}} \leqslant N_4(\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_T})\,|x' - x''|^\alpha .$$

Segue in particolare la hölderianità di $\nabla_y W$ rispetto a t con esponente $\alpha/2$ e quindi

$$\|\nabla_y W\|^{(0)}_{Q_{1,T}} \leqslant \big(k_4(M) + N_4(\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_T})\,T^{\alpha/2}\big)\,|x' - x''|^\alpha .$$

A questo punto, tenendo presente la (4.1) e ricordando le (3.3), (3.3)$'$, si ha

$$(4.4) \qquad \|\tilde{\omega}(x', t) - \tilde{\omega}(x'', t)\|^{(0)}_{Q_T} \leqslant \big(k_5(M) + N_4(\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_T})\,T^{\alpha/2}\big)\,|x' - x''|^\alpha .$$

Indicati poi con $\langle\omega\rangle_T$ ed $\langle\tilde{\omega}\rangle_T$ i coefficienti di Hölder in Q_T di $\omega(x, t)$ ed $\tilde{\omega}(x, t)$ rispettivamente e tenendo conto della (3.3)$'$ e (4.4) possiamo scrivere

$$(4.5) \qquad \langle\tilde{\omega}\rangle_T \leqslant k_6(M) + k_7(\|\omega\|^{(\alpha)}_{Q_T})\,T^{\alpha/2} .$$

Sia ora

$$M = 2C_0 = 2\max_{x\in\Omega}|\omega(x, 0)|\,, \qquad M_1 = 2C_0 + 2k_6(M) .$$

Se prendiamo $\|\omega\|^{(0)}_{Q_T} \leqslant M$ ed $\langle\omega\rangle_T \leqslant 2k_6(M)$ verifichiamo che $\exists T_1(M)$ tale che $\|\tilde{\omega}\|^{(0)}_{Q_{T_1}} \leqslant M$, $\|\tilde{\omega}\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}} \leqslant 2C_0 + 2k_6(M)$.

Infatti per la (4.5) $\exists T_2(M)$ tale che $\langle\tilde{\omega}\rangle_{T_2} \leqslant 2k_6(M)$; inoltre, da quest'ultima stima e dal fatto che $\tilde{\omega}(x, 0) = \omega(x, 0)$ discende che $\exists T_1(M) \leqslant T_2$ tale che $\|\tilde{\omega}\|^{(0)}_{Q_{T_1}} \leqslant 2C_0$.

Possiamo allora concludere che l'operatore $\mathscr{L}\omega = \tilde{\omega}$ è tale che

$$\mathscr{L}X(2C_0, 2C_0 + 2k_6(2C_0), T_1, \alpha) \subseteq X(2C_0, 2C_0 + 2k_6(2C_0), T_1, \alpha) \equiv X_0(T_1) .$$

5 - Contrattività dell'operatore $\mathscr{X}$

Vogliamo dimostrare che $\mathscr{X}$ è una contrazione di $X(T_0) \subset H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ in sè coi valori già specificati per M ed M_1 e per un opportuno $T_0 \in (0, T_1)$.

Siano $U_1(x, t)$, $V_1(y, t; x)$ e $U_2(x, t)$, $V_2(y, t; x)$ due soluzioni dello stesso problema (2.1)-(2.6), ottenute la prima in corrispondenza di $\omega_1(x, t) \in X_0$, la seconda di $\omega_2(x, t) \in X_0$. Bisogna stimare

$$\begin{aligned}(5.1)\qquad &\|\mathscr{X}\omega_1 - \mathscr{X}\omega_2\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}}\\ &\leqslant \|K_1(h(U_1(x, t)))\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}} \|(\frac{\partial V_1}{\partial n_1} - \frac{\partial V_2}{\partial n_1})_{S_{1,T_1}}\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}}\\ &+ \|K_1(h(U_1(x, t))) - K_1(h(U_2(x, t)))\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}} \|\frac{\partial V_2}{\partial n_1}|_{S_{1,T_1}}\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}}.\end{aligned}$$

A tale scopo introduciamo le funzioni

$$(5.2)\qquad Y(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t),$$

$$(5.3)\qquad Z(y, t; x) = V_1(y, t; x) - V_2(y, t; x),$$

$$(5.4)\qquad \hat{W}(y, t; x', x'') = Z(y, t; x') - Z(y, t; x'')$$

che risolvono rispettivamente problemi del tipo

$$\nabla\cdot(K(U_1)\nabla Y) + H_1(x, t)\, Y \Delta U_2 + H_2(x, t)\nabla Y\cdot\nabla U_2 = \frac{\partial Y}{\partial t} + \omega_1(x, t) - \omega_2(x, t),$$

$$Y(x, 0) = 0, \qquad Y(x, t)|_{S_{T_1}} = 0,$$

$$\nabla_y\cdot(K_1(V_1)\nabla_y Z) + \bar{H}_1(y, t;\ x)\, Z \Delta_y V_2 + \bar{H}_2(y, t;\ x)\nabla_y Z\cdot\nabla_y V_2 = \frac{\partial Z}{\partial t},$$

$$Z(y, 0; x) = 0, \qquad Z(y, t; x)|_{S_{1,T_1}} = h(U_1(x, t)) - h(U_2(x, t)),$$

$$\nabla_y\cdot(\dot{K}_1(V_1)\nabla_y \hat{W}) + \bar{\bar{H}}_1(y, t;\ x', x'')\, \hat{W}\Delta_y V_2 + \bar{\bar{H}}_2(y, t;\ x', x'')\nabla_y \hat{W}\cdot\nabla_y V_2 = \frac{\partial \hat{W}}{\partial t},$$

$$\hat{W}(y, 0; x', x'') = 0,$$

$$\hat{W}(y, t; x', x'')|_{S_{1,T_1}} = h(U_1(x', t)) - h(U_2(x', t)) - (h(U_1(x'', t)) - h(U_2(x'', t))),$$

dove H_i, $\bar{H}_i$, $\bar{\bar{H}}_i$, $i = 1, 2$, denotano funzioni sufficientemente regolari. Per il

Teor. 5.2 [**2**] (pag. 320) si ha subito

$$\|Y\|^{(2+\alpha)}_{Q_{T_1}} \leqslant \mathrm{cost}\, \|\omega_1 - \omega_2\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}}; \tag{5.5}$$

inoltre per il Teor. 4.2 [**2**] (pag. 444)

$$\|\nabla_y Z(\cdot, \cdot; x)\|^{(\alpha)}_{Q_{1,T_1}} \leqslant \mathrm{cost}\, \|\partial Y(x, t)/\partial t\|^{(0)}_{Q_{T_1}}.$$

Usando poi una stima più fine (v. [**1**] formula (3.23) (pag. 200)) otteniamo che per T_3 opportuno, $T_3 \in (0, T_1)$,

$$\|\nabla_y \hat{W}(\cdot, \cdot; x', x'')\|^{(\alpha)}_{Q_{1,T_3}} \leqslant \mathrm{cost}\, T_3^{(1-\alpha)/2} \big(\sup_{0<t<T_3} |\partial Y(x', t)/\partial t - \partial Y(x'', t)/\partial t|\big).$$

Tenendo poi conto della (5.5) si ottiene

$$\|\nabla_y Z(y, t; x)\|^{(\alpha)}_{Q_{1,T_1}} \leqslant \mathrm{cost}\, \|\omega_1 - \omega_2\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}} T_1^{\alpha/2}, \tag{5.6}$$

$$\|\nabla_y \hat{W}(y, t; x', x'')\|^{(\alpha)}_{Q_{1,T_3}} \leqslant \mathrm{cost}\, \|\omega_1 - \omega_2\|^{(\alpha)}_{Q_{T_3}} T_3^{(1-\alpha/2)} |x' - x''|^{\alpha}. \tag{5.7}$$

Dalle (5.6) e (5.7) si deduce che

$$\|K_1(h(U_1(x, t)))\|^{(\alpha)}_{Q_{T_3}} \|(\frac{\partial V_1}{\partial n_1} - \frac{\partial V_2}{\partial n_1})_{S_{1,T_3}}\|^{(\alpha)}_{Q_{T_3}} \leqslant \mathrm{cost}\, \|\omega_1 - \omega_2\|^{(\alpha)}_{Q_{T_3}} T_3^{\alpha/2},$$

e poichè

$$\|K_1(h(U_1(x, t))) - K_1(h(U_2(x, t)))\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}} \|\frac{\partial V_2}{\partial n_1}|_{S_{1,T_1}}\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}} \leqslant \mathrm{cost}\, \|\omega_1 - \omega_2\|^{(\alpha)}_{Q_{T_1}} T_1^{\alpha/2},$$

possiamo allora affermare che $T_0 \in (0, T_3)$ tale che $\mathscr{L}: X(T_0) \to X(T_0)$ è una contrazione rispetto alla norma di $H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})$. Ciò completa la dimostrazione del Teorema 1.1.

Bibliografia

[1] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc. 1964.

[2] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs **23** (1968).

[3] E. Ruchenstein, A. S. Vaidyanathan and G. R. Youngquist, *Sorption by solids with bidisperse pore structures*, Chem. Engrg. Sc. **26** (1971), 1305-1318.

[4] R. Steudel, *An abstract equation modelling diffusion in solids with bidisperse pore structure*, Nonlinear Analysis, Berlin (1979), 417-420.

Abstract

A system of two parabolic non-linear equation, which describes the diffusion in solids with bidisperse pore size structure, is studied and existence of an unique classical solution is proved. The proof is based on the use of the Banach fixed point theorem.

* * *