Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 123-129

CRISTINA REGGIANI (*)

Alcune osservazioni sulle diadi (**)

1 - Introduzione

Nel presente lavoro continuo lo studio delle diadi iniziato in [3] (1).

Inizialmente, fissata una diade $\mathscr{D}$, caratterizzo in modo più semplice che in [3] i concetti di $\mathscr{D}$-algebra e di $\mathscr{D}$-morfismo, e mostro come da questa semplificazione segua una diversa dimostrazione del Teorema 2 di [3] (una costruzione di tipo Eilenberg-Moore per le diadi).

Successivamente completo lo studio delle doppie aggiunzioni che generano una diade, associando ad ogni diade una doppia aggiunzione che gode di una proprietà universale analoga a quella della aggiunzone di Kleisli di una monade.

Infine, dall'osservazione che in un preordine il concetto di diade si riduce a quello di operatore di chiusura che ammetta un aggiunto destro, è sorto spontaneamente il problema se, per ogni categoria $\boldsymbol{A}$, ogni terna $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$ costituita da una monade, $\mathscr{M} = (H, \mu, \varepsilon)$, una comonade, $\mathscr{C} = (J, \nu, \eta)$, entrambe in $\boldsymbol{A}$, ed un'aggiunzione, $\mathscr{A} = (H, J, \gamma, \delta)$, sia una diade (in $\boldsymbol{A}$). Dopo aver risposto negativamente a tale quesito attraverso un esempio costruito con una monade ed una comonade in un gruppo, ho verificato che per ogni gruppo $\boldsymbol{A}$, date una monade ed una comonade (in $\boldsymbol{A}$) definite come sopra e tali che $H \dashv J$, è sempre possibile scegliere un'aggiunzione $\mathscr{A} = (H, J, \gamma, \delta)$ tale che $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$ sia una diade (in $\boldsymbol{A}$). Si è quindi presentata la questione se tale scelta sia sempre possibile in ogni categoria. Non ho ancora risolto questo problema; tuttavia ho individuato delle condizioni sufficienti ad assicurare che $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$ sia una diade.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università di Parma, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 21-VI-1983.

(1) Presuppongo la lettura di [3]. Di tale lavoro utilizzerò definizioni e, salvo differenze inessenziali, notazioni, talora senza specifica menzione.

2 - Sul concetto di $\mathscr{D}$-algebra

Sia $\mathscr{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$ una diade in una categoria $\boldsymbol{A}$. Nel presente paragrafo caratterizziamo in modo più semplice i concetti di $\mathscr{D}$-algebra e di $\mathscr{D}$-morfismo dati in [**3**]. Successivamente, utilizzando le semplificazioni introdotte, presentiamo una nuova dimostrazione del Teorema 2 di [**3**]. Premettiamo due lemmi.

Siano $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = (H, J, \gamma^{\mathscr{D}}, \delta^{\mathscr{D}})$ l'aggiunzione determinata da una diade $\mathscr{D}$ (in $\boldsymbol{A}$) (cfr. [**3**]), $\mathscr{M}(\mathscr{D}) = (H, \mu, \varepsilon)$ e $\mathscr{C}(\mathscr{D}) = (J, \nu, \eta)$ la monade e la comonade sottogiacenti a $\mathscr{D}$. Per ogni $A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}$ ed ogni $m \colon H(A) \to A$, indichiamo con $\overline{m}$ il trasformato di m mediante $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$.

Lemma 1. *(A, m) è un'algebra di $\mathscr{M}(\mathscr{D})$ se e solo se $(A, \overline{m})$ è una coalgebra di $\mathscr{C}(\mathscr{D})$.*

Dim. Supponiamo che (A, m) sia un'algebra di $\mathscr{M}(\mathscr{D})$. Essendo $\overline{m}$ il trasformato di m mediante $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$, si ha

$$\overline{m} = J(m)\gamma^{\mathscr{D}}(A) \,. \tag{1}$$

Proviamo innanzi tutto che $J(\overline{m})\overline{m} = \nu(A)\overline{m}$. Dalla (1) e dalla naturalezza di $\gamma^{\mathscr{D}}$ segue che

$$J(\overline{m})\overline{m} = JJ\big(mH(m)\big)\, J\gamma^{\mathscr{D}} H(A)\gamma^{\mathscr{D}}(A) \,. \tag{2}$$

Poichè (A, m) è un'algebra, è, in particolare, $mH(m) = m\mu(A)$, perciò da (2) si ha che

$$J(\overline{m})\overline{m} = JJ(m)J(J\mu\cdot\gamma^{\mathscr{D}}H)(A)\gamma^{\mathscr{D}}(A) \,. \tag{3}$$

Ora, poichè $\mathscr{D}$ è una diade, è $J\mu\cdot\gamma^{\mathscr{D}}H = \delta^{\mathscr{D}}JH\cdot H\nu H\cdot H\gamma^{\mathscr{D}}$ (cfr. (20) di [**3**]), quindi da (3) segue che $J(\overline{m})\,\overline{m} = J(J(m)\;\delta^{\mathscr{D}}\;JH(A))\,JH\nu H(A)\,JH\gamma^{\mathscr{D}}(A)\,\gamma^{\mathscr{D}}(A)$, da cui, in virtù della naturalezza di $\delta^{\mathscr{D}}$, si ha

$$J(\overline{m})\;\overline{m} = J\delta^{\mathscr{D}}J(A)\;\; JH(JJ(m)\;\; \nu H(A))\;\; JH\gamma^{\mathscr{D}}(A)\;\; \gamma^{\mathscr{D}}(A) \,. \tag{4}$$

Ma, poichè ν è naturale, è $JJ(m)\nu H(A) = \nu(A)J(m)$, quindi da (4) segue che $J(\overline{m})\overline{m} = J\delta^{\mathscr{D}}J(A)JH\big(\nu(A)J(m)\gamma^{\mathscr{D}}(A)\big)\gamma^{\mathscr{D}}(A)$, da cui, per la naturalezza di $\gamma^{\mathscr{D}}$, si ha

$$J(\overline{m})\overline{m} = J\delta^{\mathscr{D}}J(A)\gamma^{\mathscr{D}}JJ(A)\nu(A)J(m)\gamma^{\mathscr{D}}(A) \,. \tag{5}$$

Poichè $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ è un'aggiunzione, è $J\delta^{\mathscr{D}}\cdot\gamma^{\mathscr{D}}J = \mathrm{id}_J$, quindi da (5) e (1) segue l'asserto. Dimostriamo ora che $\eta(A)\overline{m} = 1_A$. Da (1) si ha che $\eta(A)\overline{m} = \eta(A)J(m)\gamma^{\mathscr{D}}(A)$, da cui, per la naturalezza di η, segue che

$$\eta(A)\overline{m} = m\eta H(A)\gamma^{\mathscr{D}}(A)\,. \tag{6}$$

Ma $\eta H\cdot\gamma^{\mathscr{D}} = \varepsilon$ (cfr. (19) di [**3**]), quindi da (6) si ha che $\eta(A)\overline{m} = m\varepsilon(A)$. Ne segue l'asserto, perchè, essendo (A, m) un'algebra, è $m\varepsilon(A) = 1_A$.

L'implicazione inversa si dimostra in modo analogo, tenendo presente che $m = \delta^{\mathscr{D}}(A)H(\overline{m})$, e utilizzando la naturalezza di $\gamma^{\mathscr{D}}$, $\delta^{\mathscr{D}}$ e μ e la commutatività dei diagrammi (21) e (22) di [**3**].

Lemma 2. *Siano* $m\colon H(A)\to A$, $m'\colon H(A')\to A'$ *ed* $f\colon A\to A'$ *tre morfismi di* $\boldsymbol{A}$. *Allora* $fm = m'H(f)$ *se e solo se* $\overline{m}'f = J(f)\overline{m}$.

Dim. Supponiamo che sia $fm = m'H(f)$. Poichè $\overline{m} = J(m)\gamma^{\mathscr{D}}(A)$, è $J(f)\overline{m} = J(fm)\gamma^{\mathscr{D}}(A)$, da cui, in virtù dell'ipotesi e della naturalezza di $\gamma^{\mathscr{D}}$, si ha che $J(f)\overline{m} = J(m')\gamma^{\mathscr{D}}(A')f$. Ne segue l'asserto, perchè $\overline{m}' = J(m')\gamma^{\mathscr{D}}(A')$. Similmente si prova l'implicazione inversa.

Osservazione 1. È utile per il seguito notare che il Lemma 2 è valido in una forma più generale di quella in cui è stato enunciato; più precisamente, esso vale per ogni coppia di funtori H, $J\colon \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$ ed ogni aggiunzione $\mathscr{A} = (H, J, \gamma, \delta)$. Tuttavia si è preferito enunciarlo nella forma più restrittiva per sottolineare il rapporto esistente tra i concetti di $\mathscr{D}$-morfismo e di morfismo di algebre e coalgebre.

I lemmi appena dimostrati mettono in evidenza il legame esistente tra la categoria $\boldsymbol{Alg}$ delle $\mathscr{D}$-algebre e la categoria $\boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ ($\boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$) delle algebre (coalgebre) della monade (comonade) sottogiacente a $\mathscr{D}$.

Corollario 1. $(A, m, \overline{m})$ *è una $\mathscr{D}$-algebra se e solo se* (A, m) *è un'algebra di* $\mathscr{M}(\mathscr{D})$. *Inoltre* f *è un $\mathscr{D}$-morfismo da* $(A, m, \overline{m})$ *in* $(A', m', \overline{m}')$ *se e solo se* f *è un morfismo di algebre da* (A, m) *ad* (A', m') [2].

Siano $E_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}\colon \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}\to\boldsymbol{A}$ e $E_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}\colon \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}\to\boldsymbol{A}$ i funtori dimenticanti.

---

(2) Ovviamente, si ha anche che $(A, m, \overline{m})$ è una $\mathscr{D}$-algebra se e solo se $(A, \overline{m})$ è una coalgebra di $\mathscr{C}(\mathscr{D})$, ed f è un $\mathscr{D}$-morfismo da $(A, m, \overline{m})$ ad $(A', m', \overline{m}')$ se e solo se f è un morfismo di coalgebre da $(A, \overline{m})$ ad $(A', \overline{m}')$.

Corollario 2. *Le categorie* $\boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ *e* $\boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$ *sono isomorfe. Più precisamente, esiste un isomorfismo* $I_{\mathscr{D}}\colon \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})} \to \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$ *tale che* $E_{\mathscr{C}(\mathscr{D})} I_{\mathscr{D}} = E_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$.

Dim. Dal Corollario 1 e dal Lemma 4 di [**3**] segue che i funtori dimenticanti $U_1\colon \boldsymbol{Alg} \to \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ e $U_2\colon \boldsymbol{Alg} \to \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$ sono isomorfismi. È immediato provare che il funtore $I_{\mathscr{D}} = U_2 U_1^{-1}$ verifica l'asserto.

Dimostreremo tra poco una proposizione che, in un certo senso, è l'implicazione inversa del Corollario 2.

Siano $\mathscr{M} = (H, \mu, \varepsilon)$ una monade e $\mathscr{C} = (J, \nu, \eta)$ una comonade in una categoria $\boldsymbol{A}$. Siano

$$\mathscr{A}_{\mathscr{M}} = (S_{\mathscr{M}}, E_{\mathscr{M}}, \varepsilon, \vartheta)\colon \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}} \quad \text{e} \quad \mathscr{A}_{\mathscr{C}} = (E_{\mathscr{C}}, D_{\mathscr{C}}, \zeta, \eta)\colon \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}} \rightharpoonup \boldsymbol{A}$$

le aggiunzioni di Eilenberg-Moore per $\mathscr{M}$ e $\mathscr{C}$ rispettivamente.

Proposizione 1. *Se esiste un isomorfismo* $I\colon \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}} \to \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}}$ *tale che* $E_{\mathscr{C}} I = E_{\mathscr{M}}$, *allora*

(i) *esiste un'aggiunzione* $\bar{\mathscr{A}}_{\mathscr{C}}\colon \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}} \rightharpoonup \boldsymbol{A}$ *tale che* $(\mathscr{A}_{\mathscr{M}}, \bar{\mathscr{A}}_{\mathscr{C}})$ *è una doppia aggiunzione da* $\boldsymbol{A}$ *ad* $\boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}}$,

(ii) *indicata con* $\mathscr{D}$ *la diade generata da* $(\mathscr{A}_{\mathscr{M}}, \bar{\mathscr{A}}_{\mathscr{C}})$, *è* $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathscr{D})$ *e* $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathscr{D})$.

Dim. Ovviamente $\bar{\mathscr{A}}_{\mathscr{C}} = (E_{\mathscr{C}} I, I^{-1} D_{\mathscr{C}}, I^{-1}\zeta I, \eta)$ è un'aggiunzione da $\boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}}$ ad $\boldsymbol{A}$. Dall'ipotesi che $E_{\mathscr{C}} I = E_{\mathscr{M}}$ segue che essa verifica la (i). La condizione (ii) è soddisfatta banalmente.

Osservazione 2. La proposizione appena dimostrata permette di semplificare la dimostrazione del Teorema 2 di [**3**]. Infatti se $\mathscr{D}$ è una diade (in $\boldsymbol{A}$), allora dal Corollario 2 segue che $\mathscr{M}(\mathscr{D}), \mathscr{C}(\mathscr{D})$ e $I_{\mathscr{D}}$ verificano le ipotesi della Proposizione 1. Sia dunque $\big(\mathscr{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}, \bar{\mathscr{A}}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}\big)$ la doppia aggiunzione costruita come nella Proposizione 1. Si prova immediatamente che essa genera $\mathscr{D}$. Inoltre dalla universalità di $\mathscr{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ segue quella di $(\mathscr{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}, \bar{\mathscr{A}}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})})$. Infatti, per ogni doppia aggiunzione $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)\colon \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ che generi $\mathscr{D}$, posto $\mathscr{A}_2 = (E, D, \varepsilon_2, \eta)$, si ha che il funtore di confronto $L\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ (cfr. Teorema 1, paragrafo 3, capitolo 6 di [**1**]) è tale che $I_{\mathscr{D}} L D = D_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$.

3 - Una costruzione di tipo Kleisli per le diadi

Costruiamo ora la «minima» doppia aggiunzione che genera una diade

$\mathscr{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$ (in $\boldsymbol{A}$) utilizzando le costruzioni di Kleisli per $\mathscr{M}(\mathscr{D})$ e $\mathscr{C}(\mathscr{D})$. Come è noto, la costruzione di Kleisli per la monade $\mathscr{M}(\mathscr{D})$, $\mathscr{A}^{\mathrm{K}}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})} = (S^{\mathrm{K}}, E^{\mathrm{K}}_1, \varepsilon, \eta')\colon \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$, è la «più piccola» aggiunzione che genera $\mathscr{M}(\mathscr{D})$. Dualmente, la costruzione di Kleisli per la comonade $\mathscr{C}(\mathscr{D})$,

$$\mathscr{A}^{\mathrm{K}}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})} = (E^{\mathrm{K}}_2, D^{\mathrm{K}}, \varepsilon', \eta)\colon \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})} \rightharpoonup \boldsymbol{A},$$

è la più piccola aggiunzione che genera $\mathscr{C}(\mathscr{D})$. Per ogni $A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ ed ogni $B \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$, poniamo

$$\boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}[A, B] = \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}\big[(H(A), \mu(A)), (J(B), \tau(B))\big]\ (^3)\,.$$

Inoltre, dalla definizione di $\boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D}}$ (cfr. [**2**]), segue che si può definire in modo ovvio una composizione

$$\boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}[A, A'] \times \boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}[A', B] \to \boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}[A, B]\,,$$

per $A, A' \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ e $B \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$. Similmente, tenendo presente la costruzione di $\boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$, si può definire una ovvia composizione

$$\boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}[A, B] \times \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}[B, B'] \to \boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}[A, B']\,,$$

per $A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ e $B, B' \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$, perchè, essendo σ e ν le trasformate mediante $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ di μ e τ rispettivamente (cfr. [**3**]), per il Lemma 2 è

$$\boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}\big[(H(A), \mu(A)), (J(B), \tau(B))\big] = \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}\big[(H(A), \sigma(A)), (J(B), \nu(B))\big]\,.$$

È immediato verificare che la famiglia di insiemi $\boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}[A, B]$ costituisce una connessione da $\boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ ad $\boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$ (cfr. [**2**]); indichiamo dunque con $\boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}$ la categoria direttamente connessa $\mathscr{V}(\boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}, \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})})$. Ovviamente possiamo considerare $\boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ e $\boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$ sottocategorie disgiunte di $\boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}$, e, di conseguenza, possiamo pensare che i funtori S^{K} e D^{K} abbiano entrambi codominio $\boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}$. Definiamo poi il funtore $E_{\mathscr{D}}\colon \boldsymbol{A}_{\mathscr{D}} \to \boldsymbol{A}$ mediante le seguenti relazioni: $E_{\mathscr{D}}(A) = A$, $E_{\mathscr{D}}(f) = f$. È evidente che $E_{\mathscr{D}} \restriction \boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})} = E^{\mathrm{K}}_1$ e $E_{\mathscr{D}} \restriction \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})} = E^{\mathrm{K}}_2$. Inoltre è $E_{\mathscr{D}} S^{\mathrm{K}} = H$ e $E_{\mathscr{D}} D^{\mathrm{K}} = J$. Estendiamo le trasformazioni naturali η' ed ε' rispettivamente a

(3) Come di consueto, è possibile rendere gli insiemi $\boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}[A, B]$ disgiunti a due a due.

$\vartheta\colon S^{\mathrm{K}}E_{\mathscr{D}} \to \mathrm{Id}_{A_{\mathscr{D}}}$ e $\zeta\colon \mathrm{Id}_{A_{\mathscr{D}}} \to D^{\mathrm{K}}E_{\mathscr{D}}$ come segue

$$\vartheta(A) = \begin{cases} \eta'(A) = \mu(A) & \text{per } A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})} \\ \tau(A) & \text{per } A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}, \end{cases}$$

$$\zeta(A) = \begin{cases} \sigma(A) & \text{per } A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})} \\ \varepsilon'(A) = \nu(A) & \text{per } A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}. \end{cases}$$

Si prova facilmente che ϑ e ζ sono trasformazioni naturali e che $\big((S^{\mathrm{K}}, E_{\mathscr{D}}, \varepsilon, \vartheta), (E_{\mathscr{D}}, D^{\mathrm{K}}, \zeta, \eta)\big)$ è una doppia aggiunzione che genera $\mathscr{D}$. Dalla universalità delle aggiunzioni di Kleisli, $\mathscr{A}^{\mathrm{K}}_{\mathscr{M}(\mathscr{D})}$ e $\mathscr{A}^{\mathrm{K}}_{\mathscr{C}(\mathscr{D})}$, segue che quella appena costruita è la minima doppia aggiunzione che genera $\mathscr{D}$, cioè che

Proposizione 2. *Per ogni categoria* $\boldsymbol{B}$ *ed ogni doppia aggiunzione* $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)\colon \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ *che generi* $\mathscr{D}$, *esiste un unico funtore* $K\colon \boldsymbol{A}_{\mathscr{D}} \to \boldsymbol{B}$ *che renda commutativi i triangoli che si formano.*

4 - Sull'aggiunzione di una diade

È noto che nelle categorie del preordine tutti i diagrammi sono commutativi. Ne segue che le diadi in un preordine sono tutte e sole le coppie costituite da un operatore di chiusura, h, da un operatore di interno, j, tali che $h \dashv j$ (4). Allora sorge spontanea la questione se, per ogni categoria $\boldsymbol{A}$, tutte le terne $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$ costituite da una monade, $\mathscr{M} = (H, \mu, \varepsilon)$, da una comonade, $\mathscr{C} = (J, \nu, \eta)$, entrambe in $\boldsymbol{A}$, e da un'aggiunzione, $\mathscr{A} = (H, J, \gamma, \delta)$, siano diadi. La seguente osservazione dà una risposta negativa a questo problema.

Osservazione 3. Si prova facilmente che le monadi e le comonadi in un gruppo, pensato come categoria con un solo oggetto, sono tutti e soli gli automorfismi interni del gruppo stesso. Più precisamente, la generica monade ha la forma (h, a, a^{-1}), con h automorfismo interno determinato da a. Sia dunque $\boldsymbol{A}$ un gruppo e sia 1_A il sue elemento neutro. Allora la terna $\mathscr{R} = (\mathrm{Id}_A, 1_A, 1_A)$ è sia una monade che una comonade (in $\boldsymbol{A}$), ed è immediato verificare che, per ogni elemento a appartenente al centro di $\boldsymbol{A}$, la quaterna $\mathscr{A} = (\mathrm{Id}_A, \mathrm{Id}_A, a, a^{-1})$, dove a^{-1} è l'inverso di a, è un'aggiunzione. Ma, se $a \neq 1_A$, la terna $(\mathscr{R}, \mathscr{R}, \mathscr{A})$

(4) Osserviamo che, in un preordine, l'aggiunto destro di un operatore di chiusura è un operatore d'interno; quindi potremmo dire che una diade (in un preordine) è un operatore di chiusura che ammette un aggiunto destro.

non è una diade. Infatti, ad esempio, non è soddisfatto l'assioma (19) (cfr. [**3**]), perchè si ha $1_A a \neq 1_A$.

Tuttavia, la terna $(\mathscr{R}, \mathscr{R}, \mathscr{A}^*)$, dove $\mathscr{A}^* = (\mathrm{Id}_A, \mathrm{Id}_A, 1_A, 1_A)$, è una diade, quindi è naturale chiedersi se, per ogni categoria $\boldsymbol{A}$ e per ogni coppia costituita da una monade, $\mathscr{M} = (H, \mu, \varepsilon)$, e da una comonade, $\mathscr{C} = (J, \nu, \eta)$, entrambe in $\boldsymbol{A}$ e tali che $H \dashv J$, sia possibile scegliere un'opportuna aggiunzione $\mathscr{A} = (H, J, \gamma, \delta)$ tale che $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$ sia una diade. A questo proposito, ho verificato che se $\boldsymbol{A}$ è un gruppo ([5]) allora tale scelta è sempre possibile, ma non ho ancora risolto il problema per una categoria $\boldsymbol{A}$ qualsiasi. La proposizione seguente dà una risposta parziale al quesito.

Proposizione 3. *Siano $\mathscr{M} = (H, \mu, \varepsilon)$ una monade e $\mathscr{C} = (J, \nu, \eta)$ una comonade (in $\boldsymbol{A}$). Sia $\mathscr{A} = (H, J, \gamma, \delta)$ un'aggiunzione. Se per ogni $A \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$ ed ogni $m: H(A) \to A$ si ha che (A, m) è un'algebra di $\mathscr{M}$ se e solo se $(A, J(m)\gamma(A))$ è una coalgebra di $\mathscr{C}$, allora $\mathscr{M}$ e $\mathscr{C}$ sono sottogiacenti ad una diade (in $\boldsymbol{A}$).*

Dim. Dall'ipotesi e dall'Osservazione 1 segue immediatamente che $I: \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{M}} \to \boldsymbol{Alg}_{\mathscr{C}}$ definito dalle relazioni

$$I(A, m) = (A, J(m)\gamma(A)), \qquad I(f) = f \qquad ((A, m) \xrightarrow{f} (A', m'))$$

è un isomorfismo tale che $E_{\mathscr{C}} I = E_{\mathscr{M}}$. Dalla Proposizione 1 si ha allora che esiste una diade $\mathscr{D}$ tale che $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathscr{D})$ e $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathscr{D})$ ([6]).

Bibliografia

[1] S. Mac Lane, *Categorie nella pratica matematica*, Boringhieri, Torino 1977.

[2] B. Pareigis, *Categories and Functors*, Academic Press, New York 1970.

[3] C. Reggiani, *Aggiunzioni doppie e diadi*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 151-160.

Summary

In this paper we characterize in a simpler way the concepts of $\mathscr{D}$-algebra and $\mathscr{D}$-morphism as introduced in [3], *and we present for diads a construction similar to the Kleisli construction for monads.*

* * *

([5]) In realtà, comunque si scelgano due automorfismi interni di $\boldsymbol{A}$, essi sono aggiunti. Ne segue che in $\boldsymbol{A}$ c'è un'unica monade (a meno di isomorfismi). Essa, in un certo senso, è una diade.

([6]) Si noti che, con semplicissimi calcoli, si prova che $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\mathscr{D}}$, e quindi che $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$ è essa stessa una diade.