Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 65-72

Y. SUREAU (*)

Structures d'hypergroupes induites sur des familles de parties d'un hypergroupe et théorèmes d'isomorphisme s'y rapportant (**)

Notations et conventions

Dans la suite $(H, \cdot)$ désigne un hypergroupe multiplicatif (que l'on notera plus simplement H) où H est l'ensemble (non vide) sous-jacent et dont l'hyperproduit de deux éléments x et y est noté xy. Pour tout ensemble E, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et $\mathscr{P}^*(E)$ celui des parties non vides de E. Enfin, pour tout élément $A \in \mathscr{P}(E)$, le complémentaire de A dans E s'écrit $E - A$.

L'hyperproduit de H sera naturellement étendu à $\mathscr{P}^*(H)$: pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathscr{P}^*(H)$ on pose

$$AB = \{c \in H;\ (\exists a \in A)(\exists b \in B)[c \in ab]\} .$$

Toute application $q\colon H \to \mathscr{P}^*(H)$ sera étendue d'une part en une application de $\mathscr{P}^*(H)$ dans lui-même $(\forall A \in \mathscr{P}^*(H),\ q(A) = \{x \in H;\ (\exists a \in A)[x \in q(a)]\} = \bigcup\limits_{a \in A} q(a))$ d'autre part en une application de $\mathscr{P}^*(H)$ dans $\mathscr{P}^*(\mathscr{P}^*(H))$ $(\forall A \in \mathscr{P}^*(H),$ $q(A) = \{q(a) \in \mathscr{P}^*(H);\ a \in A\})$ qui seront généralement identifiées à q.

L'hyperproduit «$\cdot$» défini sur $q(H)$ par $\forall (x, y) \in H^2$, $q(x) \cdot q(y) = q(q(x)\, q(y))$ s'appellera l'*hyperproduit induit* sur $q(H)$ par q.

(*) Indirizzo: Université de Clermont II, Mathématiques Pures, B. P. 45, 63170 Aubière, France.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 6-VI-1983.

Efin, si A est un sous-ensemble de H *la notation* $q(A) = A$ *signifie que l'on a les deux égalités suivantes*

$$A = \{x \in H;\ (\exists a \in A)[x \in q(a)]\} \qquad (\text{i.e.: } A = \bigcup_{a \in A} q(a))$$
$$q(A) = \{q(x) \in q(H);\ q(x) \subset A\} \qquad (\text{i.e.: } q(x) \subset A \leftrightarrow (\exists a \in A)[q(x) = q(a)]) .$$

1 - Introduction

M. Krasner et P. Lecompte [3] ont étudié l'application $q\colon H \to \mathscr{P}(H)$ vérifiant pour tout couple (x, y) d'éléments de H les trois propriétés suivantes

$$(1)\ x \in q(x), \quad (2)\ q^2 = q\ \big(i - e\colon q(q(x)) = q(x)\big), \quad (3)\ q\big(q(x)q(y)\big) = q(x)\,q(y).$$

Ils ont montré qu'alors $(q(H), \cdot)$ est un hypergroupe.

L'origine du résultat précédent était une étude sur les demi-hypergroupes. On se place ici d'emblée dans le cadre plus restreint des hypergroupes et l'on donne des conditions pour que $(q(H), \cdot)$ soit un hypergroupe; on verra, en particulier, que les conditions (1) et (2) précédentes peuvent être remplacées par une condition plus générale. Enfin on établit l'équivalent des théorèmes d'isomorphismes entre hypergroupes construits de cette manière à partir de H.

2 - Etude de deux exemples simples

Soient h un sous-hypergroupe de H et $q\colon H \to \mathscr{P}^*(H)$ définie par $q(x) = xh$ $(\forall x \in H)$. Dans l'exemple suivant on a $q(x)\cdot q(y) = q\big(q(x)q(y)\big) = q(x)\,q(y)$ et l'on vérifie facilement que $(q(H), \cdot)$ est un hypergroupe mais l'on a pas nécessairement $x \in q(x)$.

Soit $(H, \cdot)$ l'hypergroupe commutatif défini par l'ensemble $H = \{a, b, c, d\}$ muni de l'hyperproduit donné par le tableau suivant et soit $h = \{a\}$

	a	b	c	d
a	a	a	$H-d$	$H-c$
b	a	a	$H-d$	$H-c$
c	$H-d$	$H-d$	$H-d$	c, d
d	$H-c$	$H-c$	c, d	$H-c$

$q(a) = ah = \{a\} = q(b)$

$q(c) = ch = H - d$

$q(d) = dh = H - c$

$b \notin q(b) = \{a\}$.

L'hypergroupe $(q(H), \cdot)$ est donné par

$\cdot$	$q(a)$	$q(c)$	$q(d)$
$q(a)$	$q(a)$	$q(a), q(c)$	$q(a), q(d)$
$q(c)$	$q(a), q(c)$	$q(a), q(c)$	$q(H)$
$q(d)$	$q(a), q(d)$	$q(H)$	$q(a), q(d)$

Remarquons qu'ici $q(a)$ est un sous-hypergroupe de $q(H)$ mais que l'image réciproque de $q(a)$, $q^{-1}(q(a)) = \{a, b\}$, n'est pas un sous-hypergroupe de H.

Enfin, si pour $q\colon H \to \mathscr{P}^*(H)$ on prend $q(a) = \{a, c, d\} = q(b)$ et $q(c) = q(d) = H$ alors $(q(H), \cdot)$ est un hypergroupe; $\forall (x, y) \in H^2$, on a $q(q(x)q(y)) = q(x)q(y)$ mais $q^2(a) = q(q(a)) = H \neq q(a)$ et $b \notin q(b)$

	$q(a)$	$q(c)$
$q(a)$	$q(H)$	$q(H)$
$q(c)$	$q(H)$	$q(H)$

Les deux exemples précédents incitent à chercher des conditions plus générales que les conditions (1) et (2).

3 - Un théorème fondamental

Théorème 3.1. *Soit $q\colon H \to \mathscr{P}^*(H)$ une application de H dans l'ensemble des parties non vides de H et soit «$\cdot$» l'hyperproduit induit sur $q(H)$.*

(1) *Si, $\forall (x, y) \in H^2$, $q(x)\cdot q(y) = q(q(x)q(y)) = q(x)q(y)$ (resp. $q(xy)$), alors « $\cdot$ » est associatif dans $q(H)$; on dira dans ce cas que q est congruente (resp. régulière) sur H.*

(2) *Si $H = \{x \in q(a);\ a \in H\} = \bigcup_{a\in H} q(a)$, alors «$\cdot$» est reproductible dans $q(H)$; on dira dans ce cas que q est reproductible.*

Dém. (1) Si pour tout x et y de H on a $q(x)\cdot q(y) = q(x)q(y)$ alors, $\forall (x, y, z) \in H^3$,

$$q(x)\cdot\big(q(y)\cdot q(z)\big)$$

$$= q(x)\cdot q\big(q(y)q(z)\big) = q\big(q(x)q[q(y)q(z)]\big) = q\big(q(x)[q(y)q(z)]\big) = q\big([q(x)q(y)]q(z)\big)$$

$$= q\big(q[q(x)q(y)]q(z)\big) = q\big(q(x)q(y)\big)\cdot q(z) = \big(q(x)\cdot q(y)\big)\cdot q(z)\,.$$

Si pour tout x et y de H on a $q(x)\cdot q(y) = q(xy)$ alors, $\forall (x, y, z) \in H^3$,

$$q(x)\cdot[q(y)\cdot q(z)] = q(x)\cdot q(yz) = q(x(yz)) = q((xy)z) = [q(x)\cdot q(y)]\cdot q(z) .$$

(2) Pour tout x de H on a alors

$$q(x)\cdot q(H) = \bigcup_{y\in H} q(x)\cdot q(y) = \bigcup_{y\in H} q(q(x)\,q(y)) = q(q(x)H) = q(H)$$

et corrélativement

$$q(H)\cdot q(x) = q(H) .$$

N.B. Bien évidemment, si H est commutatif, il en est de même pour « $\cdot$ ». Enfin les deux corollaires suivants sont immédiats.

Corollaire 3.1. *Si $q\colon H \to \mathscr{P}^*(H)$ est congruente (resp. régulière) et reproductible, alors $(q(H), \cdot)$ est un hypergroupe.*

Corollaire 3.2. *Si R est une congruence (resp. une relation d'équivalence régulière), alors l'ensemble quotient H/R est un hypergroupe pour l'hyperproduit induit* (*).

4 - Théorèmes d'isomorphisme

Théorème 4.1 (1$^{\text{er}}$ Théorème d'Isomorphisme). *Soient p et q deux applications de H dans $\mathscr{P}^*(H)$ congruentes (resp. régulières) et reproductibles vérifiant, $\forall x \in H$, $p(q(x)) = q(x) = q(p(x))$. Alors, $\bar{q}\colon \operatorname{Im} p = p(H) \to \mathscr{P}^*(p(H))$ définie par $\bar{q}(p(x)) = p(q(x))$ est congruente (resp. régulière) et reproductible. De plus, si l'on note «$\cdot$» l'hyperproduit induit sur $p(H)$, «$*$» celui sur $q(H)$ et « $\square$ » celui induit sur $\bar{q}(p(H))$ par « $\cdot$ », les hypergroupes $(\bar{q}(p(H)), \square)$ et $(q(H), *)$ sont isomorphes.*

On vérifie tout d'abord que la définition de $\bar{q}$ a un sens: en effet, puisque $\bar{q}(p(x)) = p(q(x)) = q(p(x))$, pour tout couple (x, y) de H^2 tel que $p(x) = p(y)$ on a $\bar{q}(p(x)) = q(p(x)) = q(p(y)) = \bar{q}(p(y))$.

(*) On rappelle que l'hyperproduit induit sur H/R est défini par $cl(x)\cdot cl(y) = \{cl(z)\,;\, z \in cl(x)\,cl(y)\}$, qu'une congruence est une relation d'équivalence telle que $cl(x)\cdot cl(y) = cl(x)\,cl(y)$ et qu'une relation d'équivalence régulière est une équivalence telle que $cl(x)\cdot cl(y) = \{cl(z)\,;\, z \in xy\}$ (cf. [**1**], [**2**]). On notera d'ailleurs que Krasner et Lecompte emploie dans [**3**] le terme équivalence régulière pour ce que l'on appelle ici une congruence.

Si p et q sont congruentes, pour tout couple (x, y) d'éléments de H on a

$$\begin{aligned}
&\bar{q}(p(x)) \,\Box\, \bar{q}(p(y)) \\
&= \bar{q}[\bar{q}(p(x))\cdot\bar{q}(p(y))] = \bar{q}[p(q(x))\cdot p(q(y))] = \bar{q}[p(p(q(x))\,p(q(y)))] \\
&= \bar{q}[p(q(x)\,q(y))] = p[q(q(x)\,q(y))] = p[q(x)\,q(y)] \\
&= p[p(q(x))\,p(q(y))] = p(q(x))\cdot p(q(y)) = \bar{q}(p(x))\cdot\bar{q}(p(y))\,.
\end{aligned}$$

Donc $\bar{q}$ est congruente.

Si p et q sont régulières, pour tout couple (x, y) d'éléments de H on a

$$\begin{aligned}
&\bar{q}(p(x)) \,\Box\, \bar{q}(p(y)) \\
&= \bar{q}[\bar{q}(p(x))\cdot\bar{q}(p(y))] = \bar{q}[p(q(x))\cdot p(q(y))] = \bar{q}[p(q(x)\,q(y))] \\
&= p[q(q(x)\,q(y))] = p(q(xy)) = \bar{q}(p(xy)) = \bar{q}(p(x)\cdot p(y))\,.
\end{aligned}$$

Ainsi $\bar{q}$ est elle aussi régulière.
D'autre part, p et q étant reproductibles on peut écrire

$$\bigcup_{p(x)\in p(H)} \bar{q}(p(x)) = \bigcup_{x\in H} \bar{q}(p(x)) = \bigcup_{x\in H} p(q(x)) = p[\bigcup_{x\in H} q(x)] = p(H)$$

(remarquons qu'il suffit de supposer q reproductible, l'égalité $q(x) = p(q(x))$ impliquant alors la reproductibilité de p). D'après le Corollaire 3.1 précédent $H_p = (p(H), \cdot)$, $H_q = (q(H), *)$ et $(H_p)_{\bar{q}} = (\bar{q}(p(H)), \Box)$ sont des phyergroupes. Par ailleurs, pour tout couple $(x, y) \in H^2$ tel que $p(x) = p(y)$, on a $\bar{q}(p(x)) = \bar{q}(p(y))$ et $q(x) = q(p(x)) = q(p(y)) = q(y)$; on peut donc définir une application φ de $(H_p)_{\bar{q}}$ dans H_q par $\varphi(\bar{q}(p(x))) = q(x)$ pour tout $x \in H$; cette application φ est trivialement surjective et, s'il existe $(x, y) \in h^2$ tel que $\varphi(\bar{q}(p(x))) = \varphi(\bar{q}(p(y)))$, alors $\bar{q}(p(x)) = p(q(x)) = q(x) = \varphi(\bar{q}(p(x))) = \varphi(\bar{q}(p(y))) = q(y) = p(q(y)) = \bar{q}(p(y))$, ce qui démontre l'injectivité de φ. Ainsi φ est une bijection; on va démontrer que dans chaque cas (congruent et régulier) c'est un isomorphisme d'hypergroupes: quel que soit $(x, y) \in H^2$, si p et q sont congruentes on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\varphi(\bar{q}(p(x)) \,\Box\, \bar{q}(p(y))) \\
&= \varphi(\bar{q}(p(x))\cdot\bar{q}(p(y))) = \varphi(\bar{q}(\bar{q}(p(x))\cdot\bar{q}(p(y)))) = \varphi(\bar{q}(p(q(x))\cdot p(q(y)))) \\
&= \varphi(\bar{q}(p[p(q(x))\,p(q(y))])) = \varphi(\bar{q}(p[q(x)\,q(y)])) = q(q(x)\,q(y)) = q(x) * q(y) \\
&= \varphi(\bar{q}(p(x))) * \varphi(\bar{q}(p(y)))\,;
\end{aligned}$$

si p et q sont réguliers on a

$$\varphi(\bar{q}(p(x)) \,\square\, \bar{q}(p(y))) = \varphi(\bar{q}(p(x)\cdot p(y))) = \varphi(\bar{q}(p(xy)))$$
$$= q(xy) = q(x) * q(y) = \varphi(\bar{q}(p(x))) * \varphi(\bar{q}(p(y))) \,.$$

Exemple. Si h et k sont deux sous-hypergroupes de H tels que $h \subset K$, alors les applications p et q de H dans $\mathscr{P}^*(H)$ définies, pour tout $x \in H$, par $p(x) = xh$ et $q(x) = xK$ sont reproductibles. Si de plus elles sont congruentes et vérifient $p(q(x)) = q(x) = q(p(x))$, le théorème précédent affirme que $(H_p)_{\bar{q}}$ et H_q sont isomorphes (ici $\bar{q}(p(x)) = \bar{q}(xh) = xK$); cela généralise le premier théorème d'ismorphisme entre $(H/h)/(K/h)$ et H/K dans le cas classique où h et K sont inversibles (unilatérement et du même côté).

Théorème 4.2 ($2^{\text{ème}}$ Théorème d'isomorphisme). *Soient l'application* $q\colon H \to \mathscr{P}^*(H)$, «$\cdot$» *l'hyperproduit induit, et* h *un sous-hypergroupe de* H. *On définit sur* $q(h)$ *un hyperproduit* « $*$ » *en posant, pour tout* $(x, y) \in h^2$

$$q(x) * q(y) = \{q(z) \in q(H);\ (z \in h)(q(z) \in q(x)\cdot q(y))\}$$
$$= [q(x)\cdot q(y)] \cap q(h) \qquad \text{(relation dans } \mathscr{P}(H)).$$

Si (1) $\forall x \in h \quad p(x) = q(x) \cap h \neq \emptyset$ *et* $q(p(x)) = q(x)$, (2) $\bigcup\limits_{x \in h} p(x) = h$ (*en d'autres termes* $p(h) = h$), (3) $\forall (x, y) \in h^2$, $p(x)p(y) = [q(x) * q(y)] \cap h$, *alors* p *est une application de* h *dans* $\mathscr{P}^*(h)$ *congruente et reproductible et* $(p(h), \circ)$ (*où* « $\circ$ » *est l'hyperproduit induit par* p *sur* $p(h)$) *est un hypergroupe. Si, de plus,* q *est régulière, sur* h *il en est de même pour* p.

Enfin, si q *vérifie les trois propriétés précédentes,* $(q(h), *)$ *est un hypergroupe isomorphe à* $(p(h), \circ)$.

Tout d'abord on remarque que si la condition (1) est vérifiée l'hyperproduit $*$ est toujours défini non vide sur $q(h)$ car, pour tout couple $(x, y) \in h^2$, on a $q(x) \cap h \neq \emptyset \neq q(y) \cap h$ donc $q(x)q(y) \cap h \neq \emptyset$, par conséquent dans $\mathscr{P}^*(H)$, $q(q(x)q(y)) \cap q(h) \neq \emptyset$ soit $q(x) * q(y) \neq \emptyset$.

Si la propriété (1) est vérifiée, p est par définition une application de h dans $\mathscr{P}^*(h)$ qui, si la condition (2) est remplie, est reproductible sur h. On notera qu'alors $p(h) = q(h) \cap h = h$. Il est bon de remarquer aussi, pour la suite, que pour $x \in h$, on a $p(p(x)) = q(p(x)) \cap h = q(x) \cap h = p(x)$.

Si p vérifies les trois conditions, alors $\forall (x, y) \in h^2$, si $A = \{z \in h;\ q(z) \in q(x)q(y)\}$ on a $q(x) * q(y) = q(A)$ et $p(x)p(y) = q(A) \cap h = p(A)$, d'où $p(x) \circ p(y) = p(p(x)p(y)) = p(p(A)) = p(A) = p(x)p(y)$; ainsi p est congruente et, d'après le théorème fondamental $(p(h), \circ)$ est un hypergroupe. Si de plus q est régulière sur h alors $q(x) * q(y) = q(xy)$ et il s'ensuit les égalités $p(x)\circ p(y) = p(p(x)p(y)) = p(x)p(y) = q(xy) \cap h = p(xy)$; donc p est régulière.

Enfin, en supposant toujours que q vérifie les trois conditions, on peut définir une application φ de $q(h)$ dans $p(h)$ par $\varphi(q(x)) = p(x)$ $(\forall x \in h)$ puisque pour tout couple $(x, y) \in h^2$ tel que $q(x) = q(y)$ on a $p(x) = p(y)$. Cette application est trivialement surjective et injective (si $p(x) = p(y)$ alors $q(x) = q(p(x)) = q(p(y)) = q(y)$) donc φ est bijective. De plus, pour tout couple $(x, y) \in h^2$, si $A = \{z \in h;\ q(z) \in q(x)\cdot q(y)\}$ on a $\varphi(q(x) * q(y)) = \varphi(q(A)) = p(A) = p(x)\circ p(y) = \varphi(q(x))\circ\varphi(q(y))$ et, comme $(p(h), \circ)$ est un hypergroupe, il s'ensuit que $(q(h), *)$ est un hypergroupe isomorphe à $(p(h), \circ)$.

N.B. Si q est associée à une congruence R $(i-e\colon q(x) = cl_R(x))$, les conditions (1) et (2) sont trivialement satisfaites et (3) devient

$$q(x)\,q(y) \cap h = \big(q(x) \cap h\big)\big(q(y) \cap h\big)\ .$$

Exemple. Soient h et k deux sous-hypergroupes de H tels que h soit clos dans H, k soit invariant dans H et $h \cap k \neq \emptyset$ (on sait qu'alors $k \cap h$ est un sous-hypergroupe de H invariant dans h). Si $q\colon H \to \mathscr{P}^*(H)$ est définie par $q(x) = xK$ $(\forall x \in H)$, alors, pour tout $a \in h$, on a $p(a) = aK \cap h = a(K\cap h) \neq \emptyset$ et $\bigcup\limits_{b\in h} p(b) = h$. Si de plus *$q$ est congruente et vérifie, pour tout $a \in h$,* $q(p(a)) = q(a)$ alors, $\forall (a, b) \in h^2$, on a $q(a) * q(b) = abK$ et $p(a)p(b) = a(K \cap h)$ $b(K \cap h) = ab(K \cap h) = [q(a) * q(b)] \cap h$. Le Théorème 4.2 précédent affirme alors que $(q(h), *)$ et $(p(h), \circ)$ sont isomorphes. On généralise ainsi le deuxième théorème d'isomorphisme entre hk/k et $h/(k \cap h)$ dans le cas classique où k est inversible et invariant dans H, et h est clos (on sait qu'alors $h \cap k \neq \emptyset$; sinon $h \subset k \subset h(H - h) = H - h$ ce qui est absurde).

Bibliographie

[1] P. Corsini, *Sur les semi-hypergroupes*, Atti Soc. Peloritana Sci. Mat. Fis. Natur. 1979.

[2] M. Koskas, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pures Appl. **49** (1970), 155-192.

[3] M. Krasner et P. Lecomte, *Quotients projectifs des demi-hypergroupes et des hypergroupes*, C. R. Acad. Sci. Paris **283** (1976).

[4] Y. Sureau, *Contribution à la théorie des hypergroupes et hypergroupes opcrant transitivement sur un ensemble*, Thèse d'Etat 1980.

Summary

Suffisant conditions are given so that the image by a map of a hypergroup, H, into the set of its non-empty subsets may be a hypergroup with hyperproduct induced by the one of H (these results generalize one theorem of M. Krasner and P. Lecompte on projectives quotients hypergroups). Equivalents isomorphisms' theorems for hypergroups constructed by that way from H are established.

* * *