Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 1-13

GIUSEPPE MASTROIANNI (*)

Sui momenti di un operatore lineare e positivo ed alcuni teoremi di tipo asintotico (**)

Introduzione

Indichiamo con $M_t(I)$ l'insieme delle funzioni f definite in $[0, \infty[$, limitate in $I = [0, 1]$ e verificanti la seguente condizione: esistono due numeri reali non negativi M e t tali che per $x > 1$ si abbia $|f(x)| \leqslant M e^{tx}$.

$M_t^k(I)$ sia poi l'insieme delle funzioni di $M_t(I)$ continue in I con le loro derivate successive fino alla k-ma inclusa.

Poniamo inoltre

$$\omega_A(f;\, \delta) = \operatorname{Sup}\{|f(x) - f(x')| / |x - x'| < \delta,\ \delta > 0,\ x, x' \in A \subseteq [0, \infty[\}\,.$$

Consideriamo ora l'operatore M_n^α lineare e positivo definito da

$$(M_n^\alpha f)(x) = M_n^\alpha(f;\, x) = \sum_0^\infty{}_k\, w_{n,k}^\alpha(x)\, f(k/n)\,, \tag{1.1}$$

ove è $f \in M_t(I)$, $\alpha = \alpha_n$ un parametro reale non negativo dipendente solo da $n \in N$ e tale che

$$0 \leqslant n\alpha \leqslant 1$$

$$w_{n,k}^\alpha(x) = (1 + n\alpha)^{-x/\alpha - k} \cdot n^k \frac{x^{(k,-\alpha)}}{k!}\,, \tag{1.2}$$

$$x^{(k,-\alpha)} = x(x + \alpha) \dots (x + \overline{k-1}\alpha)\,.$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica « R. Caccioppoli », Via Mezzocannone 8, 80134 Napoli, Italy.

(**) Ricevuto: 22-X-1982.

L'operatore (1.1), che, per $\alpha = 0$, si riduce all'operatore di Favard-Szasz-Mirakyan [**8**], è stato introdotto in [**9**] e studiato in dettaglio nei lavori [**4**]$_3$ e [**10**]. In particolare nel lavoro [**4**]$_3$ l'autore ha dimostrato che la condizione « $f \in M_t(I)$ » non si può sostituire con un'altra più debole.

In questo lavoro studieremo i momenti centrali $T^{\alpha}_{n,m}(x)$ di M^{α}_{n} definiti da

$$T^{\alpha}_{n,m}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_k\, w^{\alpha}_{n,k}(x)(k/n - x)^m . \tag{1.3}$$

Dimostreremo che questi godono delle medesime proprietà possedute dai momenti centrali relativi all'operatore di Bernstein o, più in generale, agli operatori di tipo esponenziale [**6**].

Ci serviremo di queste proprietà per stabilire alcuni teoremi di tipo asintotico riguardanti l'operatore M^{α}_{n} definito sulle funzioni di $M_t(I)$ sufficientemente regolari.

Successivamente, a partire da M^{α}_{n} costruiremo, mediante una trasformazione proposta da C. P. May in [**6**], un nuovo operatore di approssimazione $\bar{M}^{\alpha}_{n,k}$. Usando poi un procedimento adottato in [**4**]$_{1,2}$, [**5**]$_{1,2}$, [**7**], otterremo ancora un diverso operatore $M^{\alpha}_{n,k}$.

Entrambi gli operatori ottenuti non sono positivi; tuttavia dimostreremo che $\bar{M}^{\alpha}_{n,k} f$ e $M^{\alpha}_{n,k} f$ sono due approssimazioni della funzione f migliori di $M^{\alpha}_{n} f$.

Tornando ai momenti $T^{\alpha}_{n,m}(x)$, stabiliremo, per il loro calcolo, una formula in cui intervengono degli opportuni numeri interi $\sigma^m_{i,j}$ così definiti

$$i, j, m \in N , \qquad \sigma^m_{i,j} = \Delta^m_1 (s^p_i |S^{p-i}_j|)_{p=0} = \sum_{0}^{m}{}_k (-1)^{m-k} \binom{m}{k} s^k_i |S^{k-i}_j| , \tag{1.4}$$

ove S^k_i e s^h_j sono i numeri di Stirling di prima e di seconda specie rispettivamente.

In un precedente lavoro [**4**]$_4$ abbiamo introdotto e studiato una classe di numeri interi più ampia di $\{\sigma^m_{i,j}\}$ ed in particolare abbiamo dimostrato che sussistono le formule iterative

$$\begin{aligned} &\sigma^0_{0,0} = 1 , \quad \sigma^{m+1}_{i,0} = (m + 1 - i)\sigma^m_{i-1,0} + m\sigma^{m-1}_{i-1,0} , \\ &\sigma^{m+1}_{0,j} = m(\sigma^m_{0,j-1} + \sigma^{m-1}_{0,j-1}) , \\ &\sigma^{m+1}_{i,j} = (m + 1 - i)\sigma^m_{i-1,j} + (m - i)\sigma^m_{i,j-1} + m(\sigma^{m-1}_{i-1,j} + \sigma^{m-1}_{i,j-1}) , \end{aligned} \tag{1.5}$$

ed il seguente

Teorema 1.I. *Se i, j ed m sono numeri naturali, si ha*

$$\sigma^m_{i,j} \begin{cases} > 0 & \textit{se } \left[\dfrac{m+1}{2}\right] \leq i + j \leq m - 1 \\ = 0 & \textit{negli altri casi}, \end{cases}$$

$[\alpha]$ essendo la parte intera di $\alpha \in R$.

Questo teorema assicura che, per ogni fissato $m \in N$, esistono esattamente $[m/2]$ numeri $\sigma^m_{i,j}$ positivi, mentre i rimanenti risultano nulli.

2 - Sulle proprietà di $T_{n,m}$

Dimostriamo il seguente

Teorema 2.I. *Sussiste la formula*

$$T^{\alpha}_{n,m}(x) = \sum_{\overline{m}}^{m-1}{}_i \frac{x^{m-i}}{n^i} t_{m,i}(\alpha n) \qquad x \in [0, \infty[\,, \tag{2.1}$$

ove è $\overline{m} = [(m+1)/2]$ *e* $t_{m,i}(y) = \sum_0^i{}_k \sigma^m_{i-k,k} y^k$.

Infatti dalla definizione (1.3) segue

$$T^{\alpha}_{n,m}(x) = \sum_0^m{}_k (-1)^{m-k} \binom{m}{k} M^{\alpha}_n(e_k; x)\,, \tag{2 2}$$

con $e_k(x) = x^k$.

Calcolando i polinomi $M^{\alpha}_n(e_k; x)$ mediante la formula

$$(M^{\alpha}_n f)(x) = \sum_0^{\infty}{}_k x^{(k,-\alpha)}[0, 1/n, \ldots, k/n; f]\,,$$

si ottiene

$$M^{\alpha}_n(e_k; x) = \sum_0^{k-1}{}_i \frac{s^k_i}{n^i} x^{(k-i,-\alpha)} = \sum_0^{k-1}{}_i \sum_0^{k-i-1}{}_j s^k_i |S^{k-i}_j| \frac{\alpha^j}{n^i} x^{k-i-j}\,. \tag{2.3}$$

Sostituendo la (2.3) nella (2.2), ordinando secondo le potenze della x e tenendo conto della (1.4) si ha

$$T^{\alpha}_{n,m}(x) = \sum_0^m{}_{i+j} \frac{x^{m-i-j}}{n^i} \alpha^j \sigma^m_{i,j}\,.$$

Dal Teorema 1.I, segue infine la (2.1).

La formula (2.1) può essere con profitto impiegata per il calcolo di $T^{\alpha}_{n,m}(x)$, se si tiene conto delle (1.4), mediante le quali i numeri $\sigma^m_{i,j}$ possono essere calcolati una volta per tutte.

Si ha ad esempio

$$T^{\alpha}_{n,0}(x) = 1\ ; \qquad T^{\alpha}_{n,1}(x) = 0\ ; \qquad T^{\alpha}_{n,2}(x) = \frac{1+\alpha n}{n}\, x;$$

$$T^{\alpha}_{n,3}(x) = \big(1 + 3\alpha n + 2(\alpha n)^2\big)\frac{x}{n^2}\ ; \qquad T^{\alpha}_{n,4}(x) = \big(3 + 6\alpha n + 3(\alpha n)^2\big)\frac{x^2}{n^2}$$

$$+ \big(1 + 7\alpha n + 12(\alpha n)^2 + 6(\alpha n)^3\big)\frac{x}{n^3}\,.$$

Dalla formula (2.1) e tenendo conto del Teorema 1.I segue il

Corollario 2.II. *I momenti $T^{\alpha}_{n,m}(x)$ sono polinomi omogenei di grado $[m/2]$ in x. Inoltre si ha*

$$T^{\alpha}_{n,m}(x) > 0 \qquad (x > 0,\ m \neq 1), \tag{2.4}$$

$$T^{\alpha}_{n,m}(x) = O(n^{-m}) \qquad (n \to \infty)\,. \tag{2.5}$$

In particolare, per $\alpha = 0$, posto $T_{n,m} = T^{0}_{n,m}$, si ottiene la formula

$$T_{n,m} = \sum_{\overline{\overline{m}}}^{m-1}{}_i\ \sigma^{m}_{i,0}\,\frac{x^{m-i}}{n^i}\,, \tag{2.6}$$

che può essere utilmente impiegata per il calcolo dei momenti centrali dell'operatore di Favard-Szasz-Mirakyan.

Se poi si pone $\alpha = 1/n$ si ottiene la

$$T^{1/n}_{n,m}(x) = \sum_{\overline{\overline{m}}}^{m-1}{}_i\ \frac{t_{n,i}(1)}{n^i}\, x^{m-i}\,, \tag{2.7}$$

che consente il calcolo dei momenti centrali dell'operatore

$$M^{1/n}_{n}(f; x) = 2^{-nx} \sum_{0}^{\infty}{}_k \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^{(k,-\alpha)}}{k!}\, f(k/n)\,,$$

introdotto e studiato in $[4]_3$.

Sussistono anche le limitazioni

$$0 < T_{n,m}(x) \leqslant T^{\alpha}_{n,m}(x) \leqslant T^{1/n}_{n,m}(x) \qquad (x > 0,\ m \neq 1)\,,$$

e le seguenti relazioni di limite

$$\lim_{n\to\infty} n^{\bar m} T^{\alpha}_{n,m}(x) = t_{m,\bar m}(1) x^{[m/2]} = \lim_{n\to\infty} n^{\bar m} T_{n,m}(x) \qquad (\alpha n = O(1)) , \tag{2.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\bar m} T^{\alpha}_{n,m}(x) = (2m-1)!! x^{[m/2]} = \lim_{n\to\infty} n^{\bar m} T_{n,m}(x) \qquad (\alpha n = o(1)) . \tag{2.9}$$

Osserviamo ancora che, per ogni $f \in M_t(I)$ e analitica in I, sussiste la formula

$$M^{\alpha}_n(f; x) = \sum_0^{\infty}{}_m \frac{f^{(m)}(x)}{m!} T_{n,m}(x) , \tag{2.10}$$

da cui, se si pone $f = e_k$, si ottiene la

$$M_n(e_k; x) = \sum_0^{k}{}_m \binom{k}{m} T_{n,m}(x) , \tag{2.11}$$

che è la formula inversa della (2.2).

Due funzioni generatrici di $M^{\alpha}_n e_k$ e $T^{\alpha}_{n,m}$ sono date poi dagli sviluppi

$$\sum_0^{\infty}{}_k \frac{M_n(e_k; x)}{k!} y^k = [1 - n\alpha(\mathrm{e}^{y/n} - 1)]^{-x/\alpha} , \tag{2.12}$$

$$\sum_0^{\infty}{}_m \frac{y^k}{k!} T_{n,m}(x) = \mathrm{e}^{-xy}[1 - n\alpha(\mathrm{e}^{y/n} - 1)]^{-x/\alpha}. \tag{2.13}$$

Si osservi infine il legame esistente fra la (2.12) e la

$$M^{\alpha}_n(\mathrm{e}^{tk/n}; x) = [1 - n\alpha(\mathrm{e}^{t/n} - 1)]^{-x/\alpha} , \quad \frac{n\alpha}{1 + n\alpha} \mathrm{e}^{t/n} < 1 , \tag{2.14}$$

che consente di poter definire l'operatore M^{α}_n su $M_t(I)$.

3 - Alcuni teoremi di tipo asintotico

Risulterà utile nel seguito il seguente

Lemma 3.I. *Se risulta*

$$0 < x , \quad n\alpha \leqslant 1 \quad e \quad n > \frac{t}{\ln(4/3)} ,$$

sussiste la limitazione

$$\theta_n^\alpha(x) = \sum_{2n \leqslant k} w_{n,k}^\alpha(x) e^{tk/n} < \frac{K[(1-\beta^2)^{1+1/\beta}]^n}{\sqrt{n}\, e^{2n}}, \tag{3.1}$$

ove è

$$\beta = \frac{n\alpha}{1+n\alpha}, \qquad K = \frac{e^{2t}}{2\pi\,[1-(3/4)^{1/(\ln(4/3))}]}.$$

Si ha infatti

$$\theta_n^\alpha(x) = w_{n,2n}^\alpha(x)\, e^{2t} \sum_0^\infty{}_k\, a_{n,k} \qquad \text{con} \quad a_{n,k} = \frac{n^k (x+2n\alpha)^{(k,-\alpha)}\, e^{tk/n}}{(1+n\alpha)^k (2n+1)^{(k,-1)}}.$$

Ora, qualsiasi siano i numeri naturali n e k, risulta

$$\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{n(x+2n\alpha+k\alpha)\, e^{t/n}}{(1+n\alpha)(2n+1+k)} < \frac{3}{4}\, e^{t/n},$$

e poichè è $n > t/\ln(4/3)$ sarà

$$\sum_0^\infty{}_k\, a_{n,k} < \sum_0^\infty{}_k \left(\frac{3\, e^{t/n}}{4}\right)^k = \frac{1}{1-(3/4)e^{t/n}} \leqslant \frac{1}{1-(3/4)^{1/t\ln(3/4)}}. \tag{3.2}$$

Per quanto riguarda $w_{n,2n}^\alpha(x)$, dalla disuguaglianza

$$e^{1/(12m+1)} \leqslant \frac{m!}{\sqrt{2\pi m}}\, (e/m)^m \leqslant e^{1/12m},$$

si ottiene

$$w_{n,2n}^\alpha(x) < \frac{(e^2/4)^n\, 1^{(2n,-\alpha)}}{2\sqrt{\pi n}\,(1+n\alpha)^{2n}}. \tag{3.3}$$

Inoltre, con semplici calcoli, si ha

$$\frac{1^{(2n,-\alpha)}}{(1+n\alpha)^{2n}} < \prod_1^n{}_i\, (1-(\beta i)^2/n^2) \leqslant \left[\frac{(1-\beta^2)^{1+1/\beta}}{e^2}\right]^n \qquad (0<\beta\leqslant 1/2). \tag{3.4}$$

Dalle (3.2), (3.3) e (3.4) segue il lemma.

In particolare è $\theta_n^{1/n} < (K/\sqrt{n})(3^3/4^4)^n$.

Osserviamo anche che si ha facilmente $\theta_n^0 < (K/\sqrt{n})(e/4)^n$.

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 3.II. *Per ogni funzione* $f \in M_t^{(2k)}(I)$ *e per ogni* α *che verifichi la condizione* (1.2), *sussiste la relazione di limite*

$$\lim_{n\to\infty} n^k \Big[M_n^\alpha(f;x) - f(x) - \sum_1^{2k}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!} T_{n,i}^\alpha(x)\Big] = 0 \tag{3.5}$$

uniformemente in I.

Si ha infatti

$$M_n^\alpha(f;x) - f(x) - \sum_1^{2k}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!} T_{n,i}(x)$$

$$= \sum_1^\infty{}_i\, w_{n,i}^\alpha(x)\,(i/n - x)^{2k} \frac{f^{(2k)}(\xi_i) - f^{(2k)}(x)}{(2k)!} = g_n(x)$$

per ogni $x \in I$ e per qualche $\xi_i > 0$ tale che $|\xi_i - x| < |i/n - x|$.

Basterà quindi dimostrare che $n^k \|g_n\| = o(1)$, ove la norma è quella uniforme.

A tal fine possiamo scrivere

$$(2k)!\,g_n(x) = \sum_0^\infty{}_i\, [f_{2I}^{(2k)}(\xi_i) - f^{(2k)}(x)](i/n - x)^{2k} w_{n,i}^\alpha(x) + \sum_{2n\leqslant i} w_{n,i}^\alpha(x)(i/n - x)^{2k} \bar f_{2I}(\xi_i)$$

$$= \sigma_1 + \sigma_2\,,$$

ove si è posto

$$f_{2I}^{(2k)}(x) = \begin{cases} f^{(2k)}(x) & x \in 2I \\ f^{(2k)}(2) & x > 2 \end{cases} \qquad \bar f_{2I}^{(2k)} = f^{(2k)} - f_{2I}^{(2k)}\,.$$

Ora, $f_{2I}^{(2k)}$ è uniformemente continua in $[0, \infty[$ ed è pure

$$\omega_{[0,\infty[}(f_{2I}^{(2k)};\delta) = \omega_{2I}(f^{(2k)};\delta)\,.$$

Pertanto, tenendo conto del Corollario 2.II, si ha

$$\sigma_1 \leqslant \omega_{2I}\big(f^{(2k)}; 1/\sqrt{n}\big)[2T_{n,2k}^\alpha(x) + nT_{n,2k+2}^\alpha(x)] = o(n^{-k})\,.$$

In virtù della disuguaglianza di Cauchy e del Lemma 3.I, si ottiene la limitazione

$$\sigma_2 < M\, e^t \sqrt{T^\alpha_{n,4k}(x)\,\theta^\alpha_n(x)} = o(n^{-k})\,.$$

Queste due ultime relazioni valgono uniformemente in I e la (3.5) è dimostrata.

Osserviamo che alla (3.5) si può dare la forma

$$\lim_{n\to\infty} n^k \left[M^\alpha_n(f;\, x) - f(x) - \sum_1^{2k-1}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, T^\alpha_{n,i}(x)\right] = \left[\lim_{n\to\infty} t_{2k,k}(\alpha n)\right] x^k \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}\,, \tag{3.6}$$

da cui, ricordando le (2.9) e (2.10) segue il

Corollario 3.III. *Se f verifica le ipotesi del Teorema* 3.II, *sussistono le relazioni di limite*

$$\lim_{n\to\infty} n^k \left[M^\alpha_n(f;\, x) - f(x) - \sum_1^{2k-1}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, T_{n,i}(x)\right] = t_{2k,k}(1)\, x^k \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!} \tag{3.7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^k \left[M^\alpha_n(f;\, x) - f(x) - \sum_1^{2k-1}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, T^{1/n}_{n,i}(x)\right] \qquad \textit{per } \alpha\ n = O(1)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k M^\alpha_n(f;\, x) - f(x) - \sum_1^{2k-1}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, T^\alpha_{n,i}(x) = x^k \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!!} \tag{3.8}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^k \left[M^\alpha_n(f;\, x) - f(x) - \sum_1^{2k-1}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, T^\alpha_{n,i}(x)\right] \qquad \textit{per } \alpha\ n = o(1).$$

In particolare, per $k = 1$, le (3.7) e (3.8) diventano

$$\lim_{n\to\infty} n[M^\alpha_n:(f;\, x) - f(x)] = xf''(x) = \lim_{n\to\infty} n[M_n(f;\, x) - f(x)] \text{ per } \alpha n = O(1). \tag{3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} n[M^\alpha_n(f;x) - f(x)] = \frac{x}{2} f''(x) = \lim_{n\to\infty} n[M_n(f;\, x) - f(x)] \text{ per } \alpha n = o(1), \tag{3.10}$$

che sono relazioni del tipo Voronovskaia, relative all'operatore M^α_n definito su $M^{(2)}_t(2I)$.

4 - L'operatore $\overline{M}_{n,k}$

In un recente lavoro [**6**], C. P. May applica una opportuna trasformazione lineare ad una particolare classe di operatori lineari e positivi (di tipo esponenziale) ed ottiene un nuovo operatore che non è positivo ma consente una più efficace approssimazione. Tale trasformazione contiene come casi particolari quelle introdotte da Butzer e Frentiu rispettivamente nei lavori [**1**] e [**3**].

Noi applicheremo questa trasformazione all'operatore M_n^α e dimostreremo alcuni teoremi di tipo asintotico del tutto analoghi a quelli dimostrati da questi autori.

Siano quindi $c_0, c_1, \dots, c_k$, $k+1$ numeri interi arbitrariamente fissati e poniamo

$$\pi_j = \prod_{\substack{0 \\ i \neq j}}^{j}{}_i (c_j - c_i) .$$

Se $\{A_n\}$ è una successione di operatori, la trasformazione di May F_k risulta definita dall'uguaglianza

$$F_k(A_n) = [c_0, \dots, c_k; e_k A_{e_1 n}] = \sum_0^k{}_j \frac{c_j^k}{\pi_j} A_{nc_j} .$$

È ovvio che

$$F_k(I) = 1 \qquad (I \text{ essendo l'operatore identico}) , \tag{4.1}$$

$$\|F_k\| < \infty . \tag{4.2}$$

Nel caso dell'operatore M_n^α si ha quindi

$$\overline{M}^\alpha_{n,k} = [c_0, c_1, \dots, c_k; M^{\alpha_{nc_1}}_{nc_1} e_k] . \tag{4.3}$$

Naturalmente per ogni particolare determinazione di $\alpha = \alpha_n$ otterremo un particolare operatore.

Ci limiteremo in questa nota a considerare i due casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1/n$ e dimostreremo il seguente

T e o r e m a 4.I. *Per ogni funzione $f \in M_t^{(2k)}(2I)$, le relazioni di limite*

$$\lim_{n \to \infty} n^k [\overline{M}^{1/n}_{n,k}(f; x) - f(x)] = 0 , \tag{4.4}$$

$$\lim_{n \to \infty} n^k [\overline{M}_{n,k}(f; x) - f(x)] = 0 \tag{4.5}$$

valgono uniformemente in I.

Infatti, per le ipotesi su f, si può scrivere

$$M_n^{1/n}(f;\, x) - f(x) = \sum_{1}^{2k}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, T_{n,i}^{1/n}(x) + g_n(x) \quad \text{con } n^k\|g_n\|_I = o(1)\,.$$

Quindi è anche

$$\bar{M}_{n,k}^{1/n}(f;\, x) - f(x) = \sum_{1}^{2k}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, F_k\big(T_{n,i}^{1/n}(x)\big) + F_k\big(g_n(x)\big)\,. \tag{4.6}$$

D'altra parte è

$$F_k\big(T_{n,i}^{1/n}(x)\big) = \sum_{\bar{i}}^{i-1}{}_j\, x^{i-j}\, t_{i,j}(1)\, F_k(n^{-j}) = \sum_{\bar{i}}^{i-1}{}_j \frac{x^{i-j}}{n^j}\, t_{i,j}(1)[c_0,\, c_1,\, \dots,\, c_k;\, e_{k-j}]\,.$$

Se ne trae, per una ben nota proprietà delle differenze divise, che risulta $F_k(T_{n,i}^{1/n}(x)) = 0$ per $i \leqslant k+1$, e quindi la (4.6) diventa

$$\bar{M}_{n,k}^{1/n}(f;\, x) - f(x) = \sum_{k+2}^{2k}{}_i \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, F_k\big(T_{n,i}^{1/n}(x)\big) + F_k\big(g_n(x)\big)\,. \tag{4.7}$$

Inoltre per $p \geqslant 2$, è anche

$$F_k\big(T_{n,k+p}^{1/n}(x)\big) = \sum_{1}^{p-1}{}_j \frac{t_{k+p,k+j}(1)}{n^{k+j}}\, x^{p-j}[c_0,\, c_1,\, \dots,\, c_k;\, 1/e_j] = O(n^{-k-1})\,.$$

Infine, per la (4.2), risulta $F_k(g_n(x)) = o(n^{-k})$.

La (4.4) è quindi dimostrata. In modo analogo si dimostra la (4.5) e il teorema è provato.

5 - L'operatore $M_{n,k}$

Per ogni intero j definiamo la potenza j-ma $(M_n^\alpha)^j$ dell'operatore M_n^α ponendo $(M_n^\alpha)^0 = I$; $(M_n^\alpha)^j = M_n^\alpha(M_n^\alpha)^{j-1}$ $(j \geqslant 1)$.

L'operatore $(M_n^\alpha)^j$ è ancora positivo ed essendo $\|(M_n^\alpha)^j\| = \|M_n^\alpha\|$, $(M_n^\alpha)^j(f)$ è un'approssimazione di f dello stesso ordine di $M_n^\alpha f$.

Ciò posto, definiamo l'operatore $M_{n,k}^\alpha$ mediante l'uguaglianza

$$M_{n,k}^\alpha = I - (I - M_n^\alpha)^k = \sum_{1}^{k}{}_i (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (M_n^\alpha)^i\,. \tag{5.1}$$

Per ogni funzione $f \in M_t(I)$, possiamo scrivere la formula di approssimazione

$$f = M^{\alpha}_{n,k} f + R^{\alpha}_{n,k} f, \tag{5.2}$$

ove $R^{\alpha}_{n,k}$ è definito dalla (5.2) e si ha $R^{\alpha}_{n,k} = (R^{\alpha}_n)^k$.

Per la formula (5.2) sussiste il seguente

Teorema 5.I. *Il grado di esattezza della formula* (5.2) *è* k.

Si ha infatti

$$(R^{\alpha}_n e_m)(x) = -\sum_1^{m-1}{}_i\, p_{i,m}(\alpha n) \frac{x^{m-i}}{n^i} \qquad (m \in N),$$

con $p_{i,m}(t) = \sum_0^1{}_j\, s^m_{i-j} |S^{m-i+j}_j| t^j$, da cui

$$(R^{\alpha}_{n,m-1} e_m)(x) = (-1)^{m-1} \frac{p_{1,m}(\alpha n) p_{1,m-1}(\alpha n) \ldots p_{1,2}(\alpha n)}{n^{k-1}} x$$

$$= (-1)^{m-1} \frac{(m!)^2}{2^{m-1} m} (\alpha + 1/n)^{m-1} x .$$

Quindi è ovviamente

$$(R^{\alpha}_{n,k} e_k)(x) = 0, \qquad (R^{\alpha}_{n,k} e_{k+1})(x) = (-1)^k \frac{[(k+1)!]^2}{(k+1)2^k} (\alpha + 1/n)^k x,$$

cioè l'assunto.

Osserviamo ora che si ha facilmente

$$(M^{\alpha}_{n,k} f)(x) = \sum_0^{\infty}{}_i\, \mu^{\alpha}_{k,i}(x)[0, 1/n, \ldots, i/n; f], \tag{5.3}$$

ove è

$$\mu^{\alpha}_{k,i}(x) = (I + R^{\alpha}_n + R^{\alpha}_{n,2} + \ldots + R^{\alpha}_{n,k-1})(e_{(i,-\alpha)}; x), \qquad e_{(i,-\alpha)}(x) = x^{(i,-\alpha)}.$$

Dalla (5.3), ponendo successivamente $f = e_{(j,1/n)}$ $(j = \overline{0, k})$ segue

$$M^{\alpha}_{n,k}(f; x) = \sum_0^{\infty}{}_i\, (M^{\alpha}_{n,k} e_{(i,1/n)})(x)[0, 1/n, \ldots, i/n; f], \tag{5.4}$$

da cui, ricordando che la (5.2) ha grado di esattezza k, si ha

$$M_{n,k}^{\alpha}(f;x) = L_n(f;x) + \sum_{k+1}^{\infty}{}_i\, M_{n,k}^{\alpha}(e_{(i,1/n)};x)[0,\ldots,i/n;f]\,, \tag{5.5}$$

essendo $L_n(f;x)$ il polinomio di Lagrange relativo alla funzione f e ai nodi i/n $(i=\overline{0,k})$.

Passando al limite per $k\to\infty$ nella (5.4) si ottiene il

Teorema 5.II. *Per ogni funzione $f\in M_t(I)$ e per ogni $\alpha\geqslant 0$, si ha*

$$\lim_{k\to\infty} M_{n,k}^{\alpha}(f;x) = \sum_{0}^{\infty}{}_i\, x^{(i,1/n)}[0,\ldots,i/n;f]\,,$$

sempre che exista la serie a secondo membro.

Vogliamo esplicitamente osservare che le proprietà espresse dalla formula (5.4) e dal precedente teorema sono possedute da altre importanti classi di operatori lineari e positivi [**4**]$_2$ e [**5**]$_2$.

Infine le capacità di approssimazione dell'operatore $M_{n,k}$ sono espresse dal seguente

Teorema 5.III. *Per ogni funzione $f\in M_t^{(2k)}(2I)$ e per ogni α verificante la condizione* (1.2), *la relazione di limite*

$$\lim_{n\to\infty} n^k R_{n,k}^{\alpha}(f;x) = 0 \tag{5.6}$$

sussiste uniformemente in I.

Infatti, per le ipotesi del teorema, si ha

$$R_n^{\alpha}(f;x) = -\sum_{1}^{2k}{}_i\, \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\, T_{n,i}^{\alpha}(x) + g_n(x) \qquad (x\in I)\,,$$

ove $n^k\|g_n\|_I = o(1)$. Segue quindi che la (5.6) è vera per $k=1$, riducendosi ad una relazione di tipo Voronovskaia. La dimostrazione si completa poi facilmente per induzione applicando successivamente alla (5.7) l'operatore R_n^{α} e tenendo conto delle ipotesi del teorema.

Bibliografia

[1] P. L. BUTZER, *Linear combination of Bernstein polinomials*, Canad. J. Math. **5** (1953), 559-567.

[2] G. FELBECKER, *Linearkombinationen von iterierten Bernstein-operatoren*, Manuscripta Math. **29** (1979), 229-248.

[3] M. FRENTIU, *Combinatii liniare de polinoame Bernstein si de operatori Mirakyan*, Mathematica-Meccanica **1** (1970), 63-68.

[4] G. MASTROIANNI: $[\cdot]_1$ *Sull'approssimazione di funzioni continue mediante operatori lineari*, Calcolo **14** (1977), 343-368; $[\cdot]_2$ *Su un operatore lineare e positivo*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **46** (1979), 1-16; $[\cdot]_3$ *Una generalizzazione dell'operatore di Mirakyan*, Liguori Edit. 1981; $[\cdot]_4$ *Due classi di interi che generalizzano i numeri di Stirling* (in corso di stampa).

[5] G. MASTROIANNI e M. R. OCCORSIO: $[\cdot]_1$ *Una generalizzazione dell'operatore di Bernstein*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **44** (1977), 151-169; $[\cdot]_2$ *Una generalizzazione dell'operatore di Stancu*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **45** (1978), 495-511.

[6] C. P. MAY, *Saturation and inverse theorems for combination of class of exponential type operator*, Canad. J. Math. (6) **28** (1976), 1224-1225.

[7] C. MICCHELLI, *The saturation class and iterates of the Bernstein polinomials*, J. Approx. Theory **8** (1973), 1-18.

[8] G. MIRAKYAN, *Approximation des fonctions continues en moyen de polynomes de la forme ...*, Dokl. Akad. Nauk UzSSR **31** (1957), 249-251.

[9] S. P. PETHE and G. C. JAIN, *Approximation of functions by a Bernstein type operator*, Canad. Math. Bull. (4) **15** (1972), 551-557.

[10] D. D. STANCU, *A studi of the remainder in an approximation formula using a Favard-Szasz operator*, Studie Univ. Babeș-Bolyai Math. (25) **4** (1980), 70-75.

Summary

The author studies the moments of a linear positive operator and establishes asymptotic type theorems for sufficiently smooth functions.

* * *