Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10*** (1984), 55-79

M. JURCHESCU (*)

# Variétés mixtes et cohomologie

Cet exposé fait suite à l'article [**14**] et traite essentiellement les deux thèmes suivants:

(a) Familles différentiables de variétés complexes (**2**, **3**).

(b) Cohomologie à supports compacts sur une variété de Cartan (**4**, **5**).

## 1 - Variétés mixtes

Nous rappellons ici les définitions et les faits généraux sur les variétés mixtes qui seront utilisés dans ce travail; pour les détails on renvoit à [**14**].

Pour tout espace topologique $T$, on désignera par $\mathscr{C}_T$ le faisceau de fonctions complexes continues sur les ouverts de $T$; c'est un faisceau de $\boldsymbol{C}$-algèbres. Un *espace annelé* sera, par définition, un espace topologique $T$ muni d'un sous-faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_T$ de $\mathscr{C}_T$; on dira que $\mathcal{O}_T$ est le *faisceau structural* de l'espace annelé $T$. Si $S$ et $T$ sont deux espaces annelés, une application continue $\varphi\colon S \to T$ sera dite *application morphe* si, pour tout ouvert $V$ de $T$ et toute fonction $g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_T)$, on a $g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} \in \Gamma(\varphi^{-1}(V), \mathcal{O}_S)$.

Les espaces annelés et les applications morphes forment une catégorie; par isomorphisme d'espaces annelés on entendra un isomorphisme dans cette catégorie.

(Rappelons que la notion d'espace annelé que nous venons de définir est due à Cartan [**2**], [**3**] et Serre [**18**]. Un point de vue plus général est du à Grothendieck [**7**]).

(*) Adresse: Facultatea de Matematică, Universitatea București, Strada Academiei 14, 70109 București, Romania.

Les modèles (de variétés mixtes) seront définis comme espaces annelés comme suit. Considérons l'espace numérique mixte $E = \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{C}^n$ muni de la topologie usuelle. Si $U$ est un ouvert de $E$, on dit qu'une fonction $f \in C^\infty(U, \boldsymbol{C})$ est *morphe* lorsque, pour tout point $s \in \mathrm{pr}_1(U)$, la fonction

$$U(s) \ni z \mapsto f(s, z) \in \boldsymbol{C}$$

est holomorphe sur l'ouvert $U(s) = \{z \in \boldsymbol{C}^n \,|\, (s, z) \in U\}$. Les fonctions morphes sur les ouverts de $E$ forment un sous-faisceau d'anneaux (même de $\boldsymbol{C}$-algèbres) $\mathcal{O}_E$ de $\mathcal{C}_E$, par suite $(E, \mathcal{O}_E)$ est un espace annelé. Un *modèle de type* $(m, n)$ est, par définition, un espace annelé $(D, \mathcal{O}_D)$ avec $D$ un ouvert non-vide de $E = \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{C}^n$ et $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{E|D}$.

Une *variéte mixte de type* $(m, n)$ est un espace annelé $X$ localement isomorphe à des modèles de type $(m, n)$. La catégorie $\mathcal{M}_0$ des variétés mixtes est, par définition, la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces annelés ayant pour objets les variétés mixtes. Évidemment le type d'une variété mixte est stable par les isomorphismes de $\mathcal{M}_0$ qu'on appelera *isomorphismes de variétés mixtes*.

Notons que les variétés mixtes considérées ici ne sont pas nécessairement séparées.

On dit qu'une variété mixte $X$ est *purement réelle* de dimension $m$ lorsqu'elle est de type $(m, 0)$ et *purement complexe* de dimension $n$ lorsqu'elle est de type $(0, n)$.

Par *variété différentiable* on entendra une variété différentiable de classe $C^\infty$. Les variétés différentiables et les variétés complexes se réalisent canoniquement comme souscatégories pleines de $\mathcal{M}_0$.

Tout modèle de type $(m, n)$ est une variété mixte de type $(m, n)$. De même, si $X$ est une variété mixte de type $(m, n)$, tout ouvert non-vide $U$ de $X$ est une variété mixte de type $(m, n)$ avec faisceau structural $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{X|U}$. Si $U$ est un ouvert de la variété mixte $X$ et $D$ un modèle, on dira qu'un isomorphisme de variétés mixtes $h\colon U \to D$ est une *carte locale* de $X$.

Soient $X$ et $Y$ deux variétés mixtes et $Z$ l'espace topologique produit de $X$ et $Y$. Alors il y a un et un seul sous-faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Z$ de $\mathcal{C}_Z$ tel que $(Z, \mathcal{O}_Z)$ soit une variété mixte et tel que, pour toute carte locale $\varphi\colon U \to D$ de $X$ et toute carte locale $\psi\colon V \to D'$ de $Y$, le produit $\varphi \times \psi\colon U \times V \to D \times D'$ soit une carte locale de $Z$, où $D \times D'$ est considéré comme modèle de manière canonique. On a alors $(Z, \mathcal{O}_Z) = (X, \mathcal{O}_X) \times (Y, \mathcal{O}_Y)$ dans la catégorie $\mathcal{M}_0$.

Notons que si $X$ est de type $(m, n)$ et $Y$ de type $(p, q)$, alors leur produit est de type $(m + p, n + q)$.

Soient $X$ une variété mixte, $A$ un sous-ensemble de $X$ et $p$ et $q$ deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant m$, $0 \leqslant q \leqslant n$. On dit que $A$ est une *sous-variété mixte* de type

$(p, q)$ de $X$ si, pour tout point $a \in A$, on peut trouver une carte locale $h: U \to D \subset \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{C}^n$ de $X$ telle que $a \in U$ et que $U \cap A = h^{-1}(\boldsymbol{R}^p \times \{0\} \times \boldsymbol{C}^q \times \{0\})$. Évidemment, on a alors sur $A$ une structure de variété mixte et une seule avec le propriétés suivantes:

(a) l'inclusion $i_A: A \to X$ est une application morphe;

(b) pour toute variété mixte $X'$ et toute application $\varphi: X' \to A$, $\varphi$ est morphe si et seulement si $i_A \circ \varphi$ l'est.

Lorsque $p = 0$, on dira que $A$ est une *sous-variété complexe* de $X$.

Soit $X$ une variété mixte fixée. Le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est certainement un faisceau de $\boldsymbol{C}$-algèbres. Pour tout ouvert $U$ de $X$, les fonctions $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ seront appelées *fonctions morphes* sur $U$; ce sont exactement les applications morphes de $U$ dans $\boldsymbol{C}$, où $\boldsymbol{C}$ est considéré comme modèle de type $(0, 1)$.

D'une manière analogue, on appelle *fonction morphe réelle* sur $U$ toute application morphe de $U$ dans $\boldsymbol{R}$, où $\boldsymbol{R}$ est considéré comme modèle de type $(1, 0)$. Les fonctions morphes réelles sur les ouverts de $X$ forment un sous-faisceau de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\mathcal{O}_X$; on le désignera içi par $\mathcal{O}'_X$.

Notons que la variété mixte $X$ est purement réelle si et seulement si $\mathcal{O}'_X \times i\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X$, et purement complexe si et seulement si $\mathcal{O}'_X = \boldsymbol{R}$.

Soit $x$ un point fixé de $X$. Les fibres de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}'_X$ dans le point $x$ seront désignées par $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}'_{X,x}$ respectivement; la première est une $\boldsymbol{C}$-algèbre locale à corps résiduel $\boldsymbol{C}$, et la seconde une $\boldsymbol{R}$-algèbre locale à corps résiduel $\boldsymbol{R}$.

Considérons l'espace vectoriel complexe $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{O}_{X,x})$ des dérivations de l'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$. Les dérivations qui prennent des valeurs réelles sur $\mathcal{O}'_{X,x}$ forment un sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{O}_{X,x})$; on le désignera par $T(X)_x$. De même les dérivations qui s'annullent sur $\mathcal{O}'_{X,x}$ forment un sous-espace vectoriel complexe de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{O}_{X,x})$ qui sera désigné par $T_1(M)_x$; manifestement $T_1(X)_x$ est un sous-espace vectoriel réel de $T(X)_x$.

Nous considérerons $T(X)_x$ comme espace vectoriel mixte de composante complexe $T_1(X)_x$ et nous dirons que cet espace vectoriel mixte est l'*espace tangent mixte* à $X$ dans le point $x$; la composante réelle de $T(X)_x$ sera désignée par $T_2(X)_x$, donc $T_2(X)_x = T(X)_x / T_1(X)_x$.

Notons que la variété mixte $X$ est de type $(m, n)$ si et seulement si l'espace vectoriel mixte $T(X)_x$ est de type $(m, n)$, i.e. l'espace vectoriel réel $T_2(X)_x$ est de dimension $m$ et l'espace vectoriel complexe $T_1(X)_x$ de dimension $n$.

Soit maintenant $\varphi: X \to Y$ une application morphe de variétés mixtes et soit $x \in X$. La composition avec $\varphi$ à droite définit une application $\varphi^*_x: \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ qui induit une application $\varphi'^*_x: \mathcal{O}'_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}'_{X,x}$. La première est un morphisme de $\boldsymbol{C}$-algèbres et la seconde un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres; toutes les deux sont évidemment locales.

La composition avec $\varphi_x^*$ à droite définit une application $\boldsymbol{R}$-linéaire $\mathrm{d}\varphi_x\colon T(X)_x \to T(Y)_{\varphi(x)}$, qui induit une application $\boldsymbol{C}$-linéaire $\mathrm{d}_1\varphi_x\colon T_1(X)_x \to T_1(Y)_{\varphi(x)}$ et une application $\boldsymbol{R}$-lineaire $\mathrm{d}_2\varphi_x\colon T_2(X)_x \to T_2(Y)_{\varphi(x)}$

Par suite, $\mathrm{d}\varphi_x$ est un morphisme d'espaces vectoriels mixtes à composante complexe $\mathrm{d}_1\varphi_x$; on l'appelle l'*application linéaire tangente* à $\varphi$ au point $x$.

On dit que l'application morphe $\varphi\colon X \to Y$ est une *immersion locale au point* $x$ (resp. *submersion locale au point* $x$) si les applications $\mathrm{d}\varphi_x$, $\mathrm{d}_1\varphi_x$ et $\mathrm{d}_2\varphi_x$ sont injectives (resp. surjectives). On dit que $\varphi$ est une *immersion* (resp. *submersion*) si elle l'est dans tous les points. On dit que $\varphi$ est un *plongement* si $\varphi$ est une immersion et un homéomorphisme sur l'image, et un *plongement fermé* si $\varphi$ est un plongement et $\varphi(X)$ un sousensemble fermé de $Y$.

Notons que $\varphi$ est une immersion au point $x$ si et seulement s'il y a un ouvert $U$ contenant $x$ dans $X$ et un ouvert $V$ contenant $\varphi(U)$ dans $Y$ tels que l'on ait une factorisation de la forme

$$\varphi_{|U}\colon U \xrightarrow{i} U \times D \xrightarrow{h} V\,,$$

où $D$ est un modèle, $0 \in D$, $i$ l'application $x \mapsto (x, 0)$ et $h$ un isomorphisme de variétés mixtes (théorème de l'immersion locale). Analoguement, $\varphi$ est un submersion locale au point $x$ si et seulement s'il existe un ouvert $U$ contenant $x$ dans $X$ et un ouvert $V$ contenant $\varphi(U)$ dans $Y$ tels qu'on ait une factorisation de la forme

$$\varphi_{|U}\colon U \xrightarrow{h} V \times D \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} V\,,$$

où $D$ est un modèle et $h$ un isomorphisme de variétés mixtes (théorème de la submersion locale).

Moyennant le théorème de l'immersion locale on voit que $\varphi$ est un plongement si et seulement si $\varphi(X)$ est une sous-variété mixte de $Y$ et l'application $\varphi\colon X \to \varphi(X)$, induite par $\varphi$, un isomorphisme de variétés mixtes.

On dit que l'application $\varphi\colon X \to Y$ est *$\boldsymbol{C}$-analytique au point $x$* lorsque l'application $\mathrm{d}_2\varphi_x\colon T_2(X)_x \to T_2(Y)_{\varphi(x)}$ est injective, et *$\boldsymbol{C}$-analytique* tout court si $\varphi$ est $\boldsymbol{C}$-analytique dans tous les points de $X$.

Par exemple, les immersions sont des applications $\boldsymbol{C}$-analytiques et elles sont les seules lorsque $X$ est purement réel. Notons que l'application morphe $\varphi$ est $\boldsymbol{C}$-analytique au point $x$ si et seulement s'il y a un ouvert $U$ contenant $x$

dans $X$ et un ouvert $V$ contenant $\varphi(U)$ dans $Y$ tels qu'on ait une factorisation de la forme

$$\varphi_{|U}\colon U \xrightarrow{j} V\times D \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} V\,,$$

où $D$ est un modèle purement complexe et $j$ un plongement fermé (théorème de l'application $\boldsymbol{C}$-analytique).

Si la variété mixte $Y = S$ est purement réelle et $\varphi\colon X \to S$ une application $\boldsymbol{C}$-analytique, alors on voit moyennant le théorème de l'application $\boldsymbol{C}$-analytique que les fibres $X(s) = \varphi^{-1}(s)$ de $\varphi$ sont toutes des sous-variétés complexes de $X$. (Lorsque $Y$ est une variété mixte quelconque, les fibres $X(s)$ de $\varphi$, annelées dans le sens de Grothendieck, sont des espaces complexes !).

Notons aussi que, pour $X$ de type $(m, n)$ et $Y=S$ purement réelle, l'application morphe $\varphi\colon X \to S$ est une submersion $\boldsymbol{C}$-analytique si et seulement si l'application $\mathrm{d}_2\varphi_x$ est bijective en tout point $x$ de $X$, et si et seulement si $\varphi$ est une submersion et $\dim S = m$.

## 2 - Familles différentiables de variétés complexes

On a vu que, si $X$ est une variété mixte, $S$ une variété différentiable et $\varphi\colon X \to S$ une application $\boldsymbol{C}$-analytique, alors les fibres $X(s) = \varphi^{-1}(s)$ sont toutes des sous-variétés complexes de $X$. Par suite, la définition suivante est tout à fait légitime.

Déf. Une *famille différentiable de variétés complexes* est une variété mixte $X$ munie d'une application $\boldsymbol{C}$-analytique $\varphi\colon X \to S$, où $S$ est une variété différentiable. On dit que $\varphi$ est *l'application structurale* de la famille et $S$ la *variété des paramètres*.

Une variété mixte $X$ est dite *à suffisamment de fonctions morphes réelles* si, pour tout point $x \in X$, il existe une application morphe $\varphi\colon X \to \boldsymbol{R}^p$ qui soit $\boldsymbol{C}$-analytique au point $x$; évidemment il y en a alors une avec $p=m$ si $X$ est de type $(m, n)$.

Notons d'abord la proposition suivante.

Proposition 1. *Si la variété mixte $X$ de type $(m, n)$ est séparée, à base dénombrable, et à suffisamment de fonctions morphes réelles, alors il existe une application $\boldsymbol{C}$-analytique $\varphi\colon X \to \boldsymbol{R}^{2m}$.*

Autrement dit, *toute variété mixte, de type $(m, n)$, séparée, à base dénombrable et à suffisamment de fonctions morphes réelles, admet une réalisation comme famille différentiable de variétés complexes avec $S = \boldsymbol{R}^{2m}$.*

(Cette proposition, démontrée dans [**14**], est liée au théorème du plongement des variétés de Cartan).

On se demande maintenant si de telles réalisations existent sans l'hypothèse de séparation et dénombrabilité, et même s'il y en a une préférée.

Soit $\mathscr{R}_X$ la catégorie des paires $(S, \varphi)$, où $S$ est une variété différentiable et $\varphi: X \to S$ une application morphe; un morphisme de $(S, \varphi)$ à $(S', \varphi')$ dans la catégorie $\mathscr{R}_X$ est simplement une application $\theta: S \to S'$, de classe $C^\infty$, telle que $\varphi' = \theta \circ \varphi$. Soit, en outre, $\mathscr{R}_X^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}_X$ constituée par les paires $(S, \varphi)$ telles que l'application $\varphi: X \to S$ soit $\boldsymbol{C}$-analytique; c'est donc la catégorie des réalisations de $X$ comme famille différentiable de variétés complexes.

Si $T$ est un espace annelé et $\varrho$ une rélation d'équivalence sur $T$, alors l'espace quotient $T_\varrho = T/\varrho$ sera considéré comme espace annelé avec le faisceau structural $\mathcal{O}_{T_\varrho}$ défini, pour tout ouvert $V$ de $T$, par

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_{T_\varrho}) = \{f: V \to \boldsymbol{C} \,|\, f \circ \pi \in \Gamma(\pi^{-1}(V), \mathcal{O}_X)\} ,$$

où $\pi: T \to T_\varrho$ est l'application canonique.

Si $X$ est une variété mixte à suffisamment de fonctions morphes réelles, nous considérerons ici deux relations d'équivalence, $R$ et $R'$, sur $X$, où $(x, y) \in R$ si et seulement s'il existe une sous-variété complexe connexe de $X$ joignant $x$ et $y$, et $(x, y) \in R'$ si et seulement si $f(x) = f(y)$ pour toute fonction morphe réelle $f$ sur $X$.

Évidemment $R'$ est une relation d'equivalence et $R \subset R'$; un contre-exemple à l'égalité est le modèle $X = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \times S^1$, où $S^1 = \{z \in \boldsymbol{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Théorème 1. *Soit $X$ une variété mixte, de type $(m, n)$, à suffisamment de fonctions morphes réelles. Alors:*

(a) *$R$ est une relation d'equivalence. Les classes d'équivalence* mod $R$ *sont les sous-variétés complexes connexes fermées de dimension $n$ de $X$.*

(b) *Le quotient annelé $X_R = X/R$ est une variété mixte de dimension $m$ et l'application canonique $\pi_R: X \to X_R$ est une submersion $\boldsymbol{C}$-analytique*

(c) *La paire $(X_R, \pi_R)$ est un objet initial dans chacune des catégories $\mathscr{R}_X$ et $\mathscr{R}_X^0$.*

(C'est l'énoncé exact du théorème 1 dans [**13**] dans le sens que le quotient $X_R$ n'est pas en général séparé même si $X$ l'est. On trouve içi une motivation de considérer des variétés mixtes non nécéssairement séparées!)

Démonstration. Nous dirons qu'une carte locale $h: U \to D$ de $X$ est une *carte spéciale* si $D = D' \times D''$ avec $D'$ un modèle purement réel et $D''$ un modèle purement complexe connexe, et la partie réelle $h'$ de $h$ est induite par une application morphe $f: X \to R^m$.

Puisque $X$ est à suffisamment de fonctions morphes réelles, il existe une application $F = (f_i)_{i\in I}: X \to \boldsymbol{R}^I$, dont les composantes $f_i$ soient des fonctions morphes, et ayant la propriété suivante: pour tout point $a \in X$ il existe des indices $i_1, \ldots, i_m \in I$ et une carte spéciale $h = (h', h''): U \to D' \times D''$ telle que $a \in U$ et que les composantes $h_1, \ldots, h_m$ de $h'$ soient induites par les fonctions $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m}$.

Puisque les composantes de $F$ sont des fonctions morphes réelles sur $X$, il est clair que, pour une telle carte, on a

$$F^{-1} F(a) \cap U = h^{-1}(\{h'(a)\} \times D'') .$$

Ceci signifie que la fibre $F^{-1} F(a)$ est une sous-variété complexe, de dimension $n$, de $X$. On en déduit immédiatement que $R$ est une relation d'equivalence et que les classes de $R$-équivalence dans $X$ sont exactement les composantes connexes des fibres de $F$, et exactement les sous-variétés complexes connexes fermées de dimension $n$ de $X$, ce qui prouve l'assertion (a).

Nous démontrerons maintenant que l'application $\pi_R: X \to X_R$ est ouverte; on posera $\pi = \pi_R$. En effet, soient $W$ un ouvert de $X$, $b \in \pi^{-1}\pi(W)$ et soit $c \in W$ tels que $\pi(b) = \pi(c)$; on a donc $\pi(c) = \Gamma$, où $\Gamma$ est la composante connexe de $F^{-1} F(c)$ qui contient les points $b$ et $c$.

Soit $\Gamma'$ l'ensemble des points $x \in \Gamma$ ayant la propriété qu'il existe un voisinage ouvert $U_x$ de $x$ tel que $\pi(U_x) \subset \pi(W)$. Alors $\Gamma'$ est ouvert relativement à $\Gamma$ et $c \in \Gamma'$. Soit $a \in \Gamma$ un point adhérent à $\Gamma'$ et soit $h: U \to D' \times D''$ une carte locale spéciale de $X$ telle que $a \in U$.

Puisque $a$ est adhérent à $\Gamma'$, il existe un point $x \in U \cap \Gamma'$ et un ouvert $\Delta' \times \Delta'' \subset D' \times D''$ tels que $h(x) \in \Delta' \times \Delta''$ et que $\pi(h^{-1}(\Delta' \times \Delta'')) \subset \pi(W)$. Évidemment $h'(x) = h'(a)$, donc $a \in h^{-1}(\Delta' \times D'')$, et $\pi(h^{-1}(\Delta' \times D'')) = \pi(h^{-1}(\Delta' \times \Delta'')) \subset \pi(W)$, d'où $a \in \Gamma'$.

Par conséquent $\Gamma' = \Gamma$, et en particulier $b \in \Gamma$. Ceci signifie que l'ensemble $\pi^{-1}(\pi(W))$ est ouvert dans $X$, c'est-à-dire que $\pi(W)$ est ouvert dans $X_R = X/R$. Ainsi $\pi$ est une application ouverte.

Il est facile de voir maintenant que toute carte locale spéciale $h: U \to D' \times D''$ induit un isomorphisme d'espaces annelés $h: \pi(U) \to D'$, ce qui prouve l'assertion (b).

Enfin (c) résulte aisément de (a) et de (b).

Corollaire 1. *$(S, \varphi)$ est un objet initial de $\mathscr{R}_X$ si et seulement si $\varphi$ est une submersion $\boldsymbol{C}$-analytique surjective et à fibres connexes.*

Corollaire 2. *Soit $X$ une variété mixte séparée et à suffisamment de fonctions morphes réelles. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'espace quotient $X_R$ est séparé.*

(ii) *Il existe une variété différentiable separée $S$ et une application $\boldsymbol{C}$-analytique $\varphi\colon X \to S$ à fibres connexes.*

(iii) $R = R'$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du Théorème 1, et (iii) $\Rightarrow$ (i) est banale.

Prouvons que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $(x, y) \in R'$. Puisque $S$ est une variété différentiable séparée il est clair alors que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Par suite $(x, y) \in X(s)$ pour un point $s \in S$ et, comme $\varphi$ est à fibres connexes, on en conclut que $(x, y) \in R$.

Exemple. Pour $X = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \times S^1$, où $S^1 = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = 1\}$, $R \neq R'$, donc $X_R$ n'est pas séparé.

Nous allons décrire maintenant une classe importante de variétés mixtes séparées et à suffisamment de fonctions morphes réelles qui se réalisent comme familles différentiables de variétés complexes connexes dont les varétés des paramètres sont séparées.

Déf. Une variété mixte séparée $X$, de type $(m, n)$, est dite *propre* si:

(1) $X$ est à suffisamment de fonctions morphes réelles.

(2) Toute sous-varété complexe connexe fermée de dimension $n$ de $X$ est compacte.

Théorème 2. *Soit $X$ une variété mixte séparée et à suffisamment de fonctions morphes réelles. Alors $X$ est propre si et seulement si l'espace quotient $X_R$ est séparé et l'application canonique $\pi\colon X \to X_R$ est propre.*

Démonstration. L'assertion *si* est immédiate. Nous allons démontrer l'assertion *seulement si.*

Soient $\Gamma$ et $\Gamma'$ deux points distincts de $X_R$. Considérons l'application $F\colon X \to \boldsymbol{R}^I$ utilisée dans la démonstration du Théorème 1.

Manifestement $F$ est constante sur $\Gamma$ et sur $\Gamma'$. Si $F(\Gamma) \neq F(\Gamma')$, on prend deux voisinages disjoints, $V$ et $V'$, de $F(\Gamma)$ et $F(\Gamma')$ dans $\boldsymbol{R}^I$; alors $\pi(F^{-1}(V))$ et $\pi(F^{-1}(V'))$ sont deux voisinages disjoints de $\Gamma$ et $\Gamma'$ dans $X_R$.

Nous allons examiner maintenant le cas $F(\Gamma)=F(\Gamma')$; soit $X^0(t_0)=F(\Gamma)$.

Puisque la famille des composantes connexes de la fibre $F^{-1}(t_0)$ est localement finie évidemment, on peut écrire $F^{-1}(t_0) = \Gamma \cup \Gamma' \cap A$, avec $A$ un ensemble fermé de $X$ tel que $A \cap \Gamma = A \cap \Gamma' = \emptyset$. Comme $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont des compacts disjoints, on peut trouver deux ouverts relativement compacts $U$ et $U'$ de $X$, tels que $\Gamma \subset U$, $\Gamma' \subset U'$, $\overline{U} \cap \overline{U}' = \emptyset$ et $A \cap \overline{U} = A \cap \overline{U}' = \emptyset$.

Soient $B = \overline{U} \setminus U$ et $B' = \overline{U}' \setminus U'$; ce sont des compacts de $X$.

Si $F^{-1}(\overline{V}) \cap (B \cup B') \neq \emptyset$ pour tout ouvert $V \ni t_0$ dans $\boldsymbol{R}^I$, alors les ensembles $F^{-1}(\overline{V}) \cap (B \cup B')$ formeraient une base de filtre sur le compact $B \cup B'$, donc il existerait un point $x \in \bigcap_V F^{-1}(\overline{V}) \cap (B \cup B')$, où $V$ parcourt le filtre des voisinages de $t_0$ dans $\boldsymbol{R}^I$.

Mais alors on aurait nécessairement $F(x) = \{t_0\}$, donc $x \in F^{-1}(t_0) = \Gamma \cup \Gamma' \cup A$ et $x \in B \cup B'$, ce qui est une contradiction.

Il s'ensuit qu'il existe un voisinage ouvert $V$ de $t_0$ dans $\boldsymbol{R}^I$ tel que $F^{-1}(V) \cap B = F^{-1}(V) \cap B' = \emptyset$.

Les ensembles $U_0 = F^{-1}(V) \cap U$ et $U'_0 = F^{-1}(V) \cap U'$ sont ouverts, disjoints et $R$-saturés dans $X$; par suite $\pi(U_0)$ et $\pi(U'_0)$ sont des voisinages ouverts disjoints de $\Gamma$ et $\Gamma'$ dans $X_R$. Ainsi $X_R$ est séparé. Comme $\pi$ est continue, ouverte, surjective et à fibres connexes compactes, on en deduit $\pi$ est propre.

### 3 - Théorème de la base

Une variété mixte séparée $X$ est dite *$\mathcal{O}$-séparée au point $x \in X$* s'il existent deux entiers non-négatifs $p$ et $q$ et une application morphe $f: X \to \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{C}^q$ qui soit $\boldsymbol{C}$-analytique au point $x$ et telle que $x$ soit un point isolé dans la fibre $f^{-1}(f(x))$. On dit que $X$ est *$\mathcal{O}$-séparée* si elle l'est en tout point $x \in X$.

Notons que toute variété mixte $\mathcal{O}$-séparée est à suffisamment de fonctions morphes réelles.

H. Grauert [**6**] à démontré le théorème suivant (pour une démonstration alternative voir [**11**]):

*Si $X$ est une variété complexe $\mathcal{O}$-séparée, alors $X$ est à base dénombrable si et seulement si l'ensemble des composantes connexes de $X$ est au plus dénombrable.*

Nous démontrons maintenant le suivant théorème de la base.

Théorème 1. *Soit $X$ une variété mixte $\mathcal{O}$-séparée. Alors $X$ est à base dénombrable si et seulement si l'espace quotient $X_R = X/R$ est à base dénombrable.*

Déf. Soit $X$ une variété mixte. On dit qu'un ensemble fermé $A$ de $X$ est un *ensemble morphe* si, pour tout point $a \in A$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $a$ dans $X$, un entier non-négatif $N$ et une application morphe $f: U \to \mathbf{C}^N$ telle que $A \cap U = f^{-1}(0)$.

Si $\pi: X \to S$ est une réalisation de $X$ comme famille différentiable de variétés complexes et si $A$ est un ensemble morphe dans $X$, alors, évidemment, pour tout point $s \in S$, $A(s) = A \cap X(s)$ est un ensemble analytique fermé dans la variété complexe $X(s)$. Dans ce cas, on posera $\operatorname{codim}_s(A) = \inf_{s \in S} \cdot \operatorname{codim} A(s)$.

Remarque. Les théorèmes de prolongement de Riemann s'étendent au cas des familles différentiables de variétés complexes comme suit.

Soit $\pi: X \to S$ une famille différentiable de variétés complexes, $A$ un ensemble morphe dans $X$ et $f$ une fonction morphe sur $X \setminus A$. Alors $f$ admet un prolongement morphe sur $X$ dans chacune de deux situations suivantes:

(a) $f$ est localement bornée relativement à $X$ et $\operatorname{codim}_s(A) \geqslant 1$,

(b) $\operatorname{codim}_s(A) \geqslant 2$.

Déf. Soit $X$ une variété mixte et soit $N$ un entier, $N \geqslant 1$. Pour tout $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^N$ et tout $x \in X$, on désignera par $I_x(f)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$ engendré par les germes (au point $x$ des fonctions) $f_1 - f_1(x), \ldots, f_N - f_N(x)$.

Lemme 1. *Soit $X$ une variété mixte et soit $p \in \mathbf{N}$. Alors*

(a) *Pour tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^N$, l'ensemble*

$$A_p(f) = \{x \in X \mid \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X,x}/I_x(f) \geqslant p\}$$

*est morphe dans $X$.*

(b) *Pour tout $x \in X$, l'ensemble*

$$F_p(x) = \{f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^N \mid \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X,x}/I_x(f) \geqslant p\}$$

*est fermé dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^N$ pour la topologie canonique (i.e. la topologie de la $C^\infty$-convergence compacte).*

Démonstration. Pout tout faisceau localement libre $\mathcal{F}$ sur $X$ et tout $k \in \mathbf{N}$, on désigne par $J^k(\mathcal{F})$ le fibré vectoriel morphe sur $X$ avec les fibres $J^k_x(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_x / m_x^{k+1} \mathcal{F}_x$ et avec les trivialisations locales évidentes, et par $\pi: J^k(\mathcal{F}) \to X$ l'application canonique.

Nous considérons içi le cas $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^N$. Soit

$$M_p = \{u \in J^k(\mathcal{O}_X^N) \mid \operatorname{codim} I(u) \geqslant p\} ,$$

où $I(u)$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{X,x}/m_x^{k+1}$ engendré par les éléments $u_1 - u_1(x), \ldots, u_N - u_N(x)$.

On voit alors, de la même manière que dans le cas purement complexe (cf. Forster [**5**]), que $M_p$ est un ensemble morphe dans $J^k(\mathcal{O}_X^N)$.

Nous choisirons un entier $k$ tel qu'on ait $k+1 \geqslant p$. Pour tout point $x \in X$, considérons l'application canonique

$$j_x^k\colon \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^N \to J_x^k(\mathcal{O}_X^N);$$

pour tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^N$, soit

$$j^k f\colon X \to J^k(\mathcal{O}_X^N) \qquad \text{l'application } x \mapsto j_x^k(f)\,.$$

On voit alors facilement, moyennant le lemme de Nakayama, que $A_p(f) = (j^k f)^{-1}(M_p)$. Comme, évidemment, l'application $j^k f$ est morphe, on en déduit que $A_p(f)$ est un ensemble morphe. D'autre part, pareillement, $F_p(x) = (j_x^k)^{-1}(M_p)$. Comme l'application $j_x^k$ est continue pour les topologies canoniques de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^N$ et de $J_x^k(\mathcal{O}_X^N)$, on en déduit que $F_p(x)$ est un ensemble fermé dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Lemme 2. *Soit $\pi\colon X \to S$ une famille différentiable de variétés complexes et soit $A \subset X$ un ensemble morphe avec* $\operatorname{codim}_S(A) \geqslant 1$. *Alors l'application de restriction*

$$\varrho\colon \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X \setminus A, \mathcal{O}_X)$$

*est un plongement d'espaces vectoriels topologiques (pour les topologies canoniques).*

Démonstration. Vu le caractère local de l'énoncé, on peut supposer $\pi$ une submersion $\boldsymbol{C}$-analytique. Évidemment $\varrho$ est une application linéaire continue injective. Soit $a \in A$ et soit $h\colon U \to V \times D$ une carte locale de $X$, avec $U$ un voisinage ouvert de $a$, $V$ un voisinage ouvert de $s_0 = \pi(a)$ et $D$ un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$, et telle que la première composante de $h$ soit induite par $\pi$; on supposera que $0 \in D$ et que $h(a) = 0$.

D'après l'hypothèse faite sur $A$, on a nécessairement $n \geqslant 1$. En outre, si le voisinage ouvert $U$ de $a$ est assez petit, on peut trouver une fonction $F \in \Gamma(V \times D, \mathcal{O}_{S \times \boldsymbol{C}^n})$ telle que $F|_{h(A)} = 0$, mais $F(s_0, z) \not\equiv 0$ sur $D$. Après un changement linéaire de variables dans $\boldsymbol{C}^n$ et restriction convenable de $U$, on peut supposer que $D = D_1 \times \ldots \times D_n = D' \times D_n$ est un polydisque de centre $O$ dans $\boldsymbol{C}^n$ et que $F(s_0, O', z_n) \not\equiv 0$ sur $D_n$, où $O'$ est l'origine de $\boldsymbol{C}^{n-1}$.

Il en résulte alors qu'on peut trouver un voisinage compact $K'$ de $(s_0, O')$ dans $V \times D'$ et un disque compact $K_n$ de centre $O$ dans $\boldsymbol{C}$ et contenu dans $D_n$

tels que $F(s, z', z_n) \neq 0$ lorsque $(s, z') \in K'$ et $z_n \in \partial K_n$, donc $h(A) \cap (K' \times \partial K_n) = \emptyset$. Il s'ensuit, d'après le principe du maximum, que

$$\sup_{K' \times K_n} |f| = \sup_{K' \times \partial K_n} |f| \qquad \text{pour tout } f \in \Gamma(V \times D, \mathcal{O}_{S \times C^n}) \text{ , etc .}$$

Dans la démonstration du théorème de la base on utilisera aussi le résultat suivant (de type Poincaré-Volterra-Stoilow)

Théorème 2 [**10**]. *Soit $X$ un espace topologique connexe, localement connexe, localement compact et localement à base dénombrable et soit $Y$ un espace topologique séparé (à base dénombrable). S'il existe une application continue 0-dimensionelle $\varphi: X \to Y$, alors $X$ est à base dénombrable.*

(Rappelons que $X$ est dit *localement à base dénombrable* si tout point de $X$ a un voisinage à base dénombrable. Pour $X$ localement compact et $Y$ séparé, on dit d'une application continue $\varphi: X \to Y$ qu'elle est 0-*dimensionelle* lorsque les fibres $X(s) = \varphi^{-1}(s)$ de $\varphi$ sont toutes totalement discontinues).

Démonstration du Théorème 1. L'assertion *seulement si* est triviale. Nous démontrerons donc l'assertion *si*; l'idée sera celle de [**10**].

La question étant de caractère local sur $S = X_R$, on peut supposer que $S$ est un ouvert connexe de $\boldsymbol{R}^m$. Soit alors $f_1, \ldots, f_m$ les composantes de $\pi = \pi_R$.

Soient $a \in X$ un point fixé et $s_0 = \pi(a)$. Puisque la variété mixte $X$ est $\mathcal{O}$-séparée, on peut trouver un entier $N > m$ et des fonctions morphes $f_{m+1}, \ldots, f_N$ sur $X$ telles que $a$ soit un point isolé de la fibre $\varphi^{-1}\varphi(a)$ de l'application $\boldsymbol{C}$-analytique

$$\varphi = (f_1, \ldots, f_N): X \to \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{C}^{N-m};$$

on peut supposer évidemment que $\varphi(a) = 0$.

Soit $\mathscr{I}(\varphi) \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal engendré par les composantes $f_1, \ldots, f_N$ de $\varphi$, considérées comme sections globales du faisceau $\mathcal{O}_X$, et soit $Z$ le sous-espace annelé de $X$ (dans le sens de Grothendieck) défini par l'idéal $\mathscr{I}(\varphi)$. On a alors $Z = \varphi^{-1}(0)$ comme espace topologique et $\mathscr{I}_a(\varphi) = I_a(\varphi)$, où $\mathscr{I}_x(\varphi)$ est la fibre de $\mathscr{I}(\varphi)$ au point $x$ et $I_x(\varphi) = I_x(g)$ pour $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^N$ constitué par les composantes de $\varphi$.

Puisque l'application $\varphi$ est $\boldsymbol{C}$-analytique, on voit aisément que $Z$ est un espace complexe. Puisque $a$ est un point isolé de $\varphi^{-1}(0)$, l'algèbre $\mathcal{O}_{X,a}/I_a(\varphi)$ est artinienne (d'après le théorème des zéros de Hilbert).

$$\text{Soit } p = \dim_{\boldsymbol{C}} \mathcal{O}_{X,a}/I_a(\varphi) \qquad \text{et soit } A = \{x \in X \,|\, \dim_{\boldsymbol{C}} \mathcal{O}_{X,x}/I_x(\varphi) > p\}\,;$$

alors $A$ est un ensemble morphe (d'après le Lemme 1) et $a \notin A$.

Comme l'application $\pi$ est ouverte et à fibres connexes, on peut trouver un voisinage ouvert connexe $S'$ de $s_0$ dans $S$ tel que'on ait codim $A(s) \geqslant 1$ pour tout point $s \in S'$. Vu le caractère local par rapport à $S$ du théorème on peut supposer que $S' = S$.

Soient $\pi_A$ et $\varphi_A$ les réstrictions à $X \setminus A$ des applications $\pi$ et $\varphi$ respectivement. Alors $\pi_A \colon X \setminus A \to S$ est une famille différentiable de variétés complexes connexes; comme $S = \pi(X \setminus A)$ est supposé connexe, la variété $X \setminus A$ est connexe aussi.

Évidemment, tout point $x \in X \setminus A$ est isolé dans la fibre $\varphi^{-1}\varphi(x)$, donc l'application $\varphi_A$ est 0-dimensionelle. Il en résulte, d'après le Théorème 2, que la variété mixte $X \setminus A$ est à base dénombrable, donc $\Gamma(X \setminus A; \mathcal{O}_X)$ est un espace de Fréchet séparable pour la topologie de la convergence compacte.

D'après le Lemme 2, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est également un espace de Fréchet séparable.

Soient $\{f_\nu \mid \nu \in \boldsymbol{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, tel que $f_1, \ldots, f_m$ soient les composantes de $\pi$ (ici $f_1, \ldots, f_m$ sont considérées comme sections globales du faisceau $\mathcal{O}_X$), et soit $f \colon X \to \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{N}}$ l'application de composantes $f_\nu$, $\nu \in \boldsymbol{N}$.

Puisque la variété $X$ est $\mathcal{O}$-séparée, on voit à l'aide du Lemme 1 (b), que l'application $f$ est 0-dimensionelle. Puisque l'espace produit $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{N}}$ est séparé et à base dénombrable, un nouveau recours au Théorème 2 fournit le résultat.

## 4 - Une formule de type Künneth pour la cohomologie à supports compacts

Sauf mention expresse du contraire, toutes les variétés considérées dorénavant seront supposées *séparées* et *à base dénombrable*.

On démontrera ici le théorème suivant

Théorème 1. *Soit $S$ une variété différentiable, $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ un polydisque dans $\boldsymbol{C}^n$ et $X = S \times D$. Alors on a*

$$H_c^q(X, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } q \neq n \\ \Gamma_c(S, \mathcal{E}_S) \hat{\otimes} H_c^1(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} H_c^1(D_n, \mathcal{O}_{D_n}) & \text{lorsque } q = n\,. \end{cases}$$

(Ici $c$ désigne supports compacts et $\hat{\otimes}$ le produit tensoriel complété qui sera défini ci-dessous. Le polydisque $D$ peut être remplacé par n'importe quel ouvert de $\boldsymbol{C}^n$ ayant la forme $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$).

Pour la démonstration nous utiliserons une formule de type Künneth pour les complexes dans le catégorie $\boldsymbol{LF}$ établie dans [**11**]. Nous la rappelerons ici en version bornologique. Naturellement le corps de base sera $\boldsymbol{C}$.

Soit ***ebc*** la catégorie des espaces bornologiques de type convexe (cf. Houzel [**9**]). Dans la suite les termes *fermé*, *séparé* et *complet* seront pris dans le sens bornologique.

Tout espace de Fréchet $F$ sera considéré comme espace vectoriel bornologique avec la bornologie de von Neumann associée. Puisqu'une application linéaire d'espaces de Fréchet est continue si et seulement si elle est bornée, on voit que la bornologie de von Neumann plonge pleinement les espaces de Fréchet dans la catégorie ***ebc***.

Précisons maintenant deux termes utilisés ci-après et concernant les limites inductives dans la catégorie ***ebc***. Soit $\mathscr{S} = (E_i, u_{ji})_{i\in I}$ un système inductif dans la catégorie ***ebc***, où $I$ est un ensemble ordonné filtrant non-vide. Soient $E = \varinjlim E_i$ dans ***ebc*** et $u_i\colon E_i \to E$, $i \in I$, les applications canoniques. Nous dirons que le système inductif $\mathscr{S}$ est *séparé* si l'espace bornologique $E$ est séparé (i.e. si l'espace $u_i^{-1}(0)$ est fermé dans $E_i$ pour tout $i \in I$), et de *type dénombrable* lorsque l'ensemble ordonné filtrant $I$ admet un sous-ensemble cofinal dénombrable.

Nous désignerons par ***LF*** (resp. ***LFN***) la plus petite sous-catégorie pleine de ***ebc*** qui contient les espaces de Fréchet (resp. les espaces de Fréchet nucléaires) et est stable par limite inductive filtrante séparée de type dénombrable.

(Notons que dans [**11**] ces deux catégories sont définies d'une manière intrinsèque).

Par définition, ***LFN*** est une sous-catégorie pleine de ***LF***; on dit qu'un objet de ***LF*** est *nucléaire* s'il est un objet de ***LFN***.

Évidemment tout objet de ***LF*** est une espace bornologique de type convexe séparé complet. De plus, la catégorie ***LS*** des espaces de Silva est une sous-catégorie pleine de ***LF*** (cf. H. Hogbe-Nlend [**8**]).

Notons que, si $E$ et $F$ sont des objets de ***LF*** (resp. ***LFN***) et si $H$ est un sous-espace vectoriel bornologique fermé de $E$, alors $E\times F$, $H$ et $E/H$ sont aussi des objets de ***LF*** (resp. ***LFN***).

Il est aisé de voir qu'il existe un (et, à des isomorphismes fonctoriels près, un seul) foncteur $\hat{\otimes}\colon \boldsymbol{LF}\times \boldsymbol{LFN} \to \boldsymbol{LF}$ tel que

(a) Si $E$ et $F$ sont des espaces de Fréchet et $F$ nucléaire, alors $E\hat{\otimes} F = E\hat{\otimes}_\pi F = E\hat{\otimes}_\varepsilon F$.

(b) $\hat{\otimes}$ commute avec les limites inductives filtrantes séparées de type dénombrable, en chaque variable.

Pour tout $E \in \boldsymbol{LF}$ et tout $F \in \boldsymbol{LFN}$, nous dirons que $E\hat{\otimes} F$ est le *produit tensoriel complété* de $E$ et $F$.

Notons que, si $E$ et $F$ sont tous les deux nucléaires, alors leur produit tensoriel complété $E\hat{\otimes} F$ l'est aussi. On a le théorème suivant.

Théorème 2 [**11**]. *Soient $E^\cdot$ et $F^\cdot$ deux complexes bornés et à cohomolgie séparée d'espaces vectoriels bornologiques. On suppose que $E^n \in$ **LF** et $F^n \in$ **LFN** pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$. Alors le complexe simple associé au complexe double $E^\cdot\hat{\otimes} F^\cdot$*

*est à cohomologie séparée et, pour tout entier $n$, l'application canonique*

$$H^n(E^\cdot \hat{\otimes} F^\cdot) \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(E^\cdot) \hat{\otimes} H^q(F^\cdot)$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels bornologiques.*

Rappelons que, dans le cas de Fréchet, ce résultat est du à Grothendieck [**15**].

Soit maintenant $X$ une variété différentiable. On désigne par $c(X)$ les compacts de $X$ et par $\mathscr{E}_X$ le faisceau des fonctions complexes de class $C^\infty$ sur les ouverts de $X$, donc $\mathscr{E}_X = \mathscr{O}_X$ lorsqu'on considère $X$ comme variété mixte. Pour tout ouvert $U$ de $X$, $\Gamma(U, \mathscr{E}_X)$ muni de sa topologie canonique, est un espace de Fréchet nucléaire.

Si $A$ est un ensemble fermé de $X$, l'ensemble

$$\Gamma_A(X, \mathscr{E}_X) = \{f \in \Gamma(X, \mathscr{E}_X) \mid f|_{X \setminus A} = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $\Gamma(X, \mathscr{E}_X)$, donc également un espace de Fréchet nucléaire. En outre, si $A$ et $B$ sont deux fermés de $X$ et $A \subset B$, alors $\Gamma_A(X, \mathscr{E}_X) \subset \Gamma_B(X, \mathscr{E}_X)$ et l'application d'inclusion $i_{B,A}$ est continue.

La *bornologie canonique* de $\Gamma_c(X, \mathscr{E}_X)$ est, par définition, celle pour laquelle on a

$$\Gamma_c(X, \mathscr{E}_X) = \varinjlim_{K \in c(X)} \Gamma_K(X, \mathscr{E}_X)\,,$$

dans la catégorie ***ebc***; il est clair que $\Gamma_c(X, \mathscr{E}_X)$ est alors un objet de ***LFN***.

Notons que, lorsque $X = \boldsymbol{R}^m$, $\Gamma_c(X, \mathscr{E}_X)$ n'est rien d'autre que l'espace $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^m)$ complexe de L. Schwartz (cf. H. Hogbe-Nlend [**8**]).

Lemme 1. *Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentiables et $Z = X \times Y$ la varété produit. Alors, l'application canonique*

$$\Gamma_c(X, \mathscr{E}_X) \hat{\otimes} \Gamma_c(Y, \mathscr{E}_Y) \to \Gamma_c(Z, \mathscr{E}_Z)$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriel bornologiques.*

Démonstration. D'abord on connaît bien que l'application canonique du Lemme 1, mais avec $\Gamma$ au lieu de $\Gamma_c$, est un isomorphisme d'espaces de Fréchet (e.g., Trèves [**19**]).

Pour tout fermé $A$ de $X$ on a la suite exacte d'espaces de Fréchet nucléaires

$$0 \to \Gamma_A(X, \mathscr{E}_X) \to \Gamma(X, \mathscr{E}_X) \to \Gamma(X \setminus A, \mathscr{E}_X)\,.$$

Par application du foncteur $E \to E \hat{\otimes} \Gamma(Y, \mathscr{E}_Y)$, et compte tenu de l'isomorphisme précédent, on obtient un isomorphisme canonique

$$\Gamma_A(X, \mathscr{E}_X) \hat{\otimes} \Gamma(Y, \mathscr{E}_Y) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{A\times Y}(Z, \mathscr{E}_Z) .$$

Pour tout fermé $A$ de $X$ et tout fermé $B$ de $Y$, on a le diagramme commutatif d'espaces de Fréchet

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to \Gamma_A(X, \mathscr{E}_X) \hat{\otimes} \Gamma_B(Y, \mathscr{E}_Y) & \to & \Gamma_A(X, \mathscr{E}_X) \hat{\otimes} \Gamma(Y, \mathscr{E}_Y) & \to & \Gamma_A(X, \mathscr{E}_X) \hat{\otimes} \Gamma(Y \setminus B, \mathscr{E}_Y) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to \qquad \Gamma_{A\times B}(Z, \mathscr{E}_Z) & \to & \Gamma_{A\times Y}(Z, \mathscr{E}_Z) & \to & \Gamma_{A\times(Y\setminus B)}(X \times (Y \setminus B), \mathscr{E}_Z)
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes et les deux flèches verticales à droite des isomorphismes. On en obtient un isomorphisme canonique d'espaces de Fréchet

$$\Gamma_A(X, \mathscr{E}_X) \hat{\otimes} \Gamma_B(Y, \mathscr{E}_Y) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{A\times B}(Z, \mathscr{E}_Z) .$$

Le lemme s'en déduit par passage à la limite inductive suivant $A \in c(X)$ et $B \in c(Y)$.

Lemme 2. *Soient $S$ une variété différentiable, $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ un polydisque dans $\mathbf{C}^n$ et $X = S \times D$. Alors on a un isomorphisme canonique de complexe* (*dans* **LFN**)

$$\Gamma_c(X, \mathscr{E}_X^{0,\cdot}) = \Gamma_c(S, \mathscr{E}_S) \hat{\otimes} \Gamma_c(D_1, \mathscr{E}_{D_1}^{0,\cdot}) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \Gamma_c(D_n, \mathscr{E}_{D_n}^{0,\cdot}) ,$$

*ou $\mathscr{E}_X^{p,q}$ est le faisceau des formes différentielles de type $(p, q)$ sur $X$.*

Démonstration. Par application du Lemme 1 on obtient immédiatement les isomorphismes de complexes

$$\Gamma_c(X, \mathscr{E}_X^{0,\cdot}) = \Gamma_c(S, \mathscr{E}_S) \hat{\otimes} \Gamma_c(D, \mathscr{E}_D^{0,\cdot}) ,$$

$$\Gamma_c(D, \mathscr{E}_D^{0,\cdot}) = \Gamma_c(D_1, \mathscr{E}_{D_1}^{0,\cdot}) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \Gamma_c(D_n, \mathscr{E}_{D_n}^{0,\cdot}) , \qquad \text{etc} .$$

Démonstration du Théorème 1. D'abord on voit que, pour tout $i$, le complexe

$$0 \to \Gamma_c(D_i, \mathscr{E}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_c(D_i, \mathscr{E}^{0,1}) \to 0$$

est acyclique en degré 0 et à cohomologie séparée en degré 1. Pour le voir il suffit d'appliquer le principe du prolongement analytique et la formule de

Cauchy généralisée qui donne, pour tout $i$ et tout compact $K \subset D_i$, l'égalité

$$(\operatorname{Im} \bar\partial) \cap \Gamma_K(D_i, \mathscr{E}^{0,1}) =$$

$$\{f\, d\bar z \in \Gamma_c(D_i, \mathscr{E}^{0,1}) \mid \iint \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz \wedge d\bar z = 0 \text{ pour tout } \zeta \in D_i \setminus K\}$$

Il en résulte, d'après le Théorème 2, que le complexe

$$\Gamma_c(S, \mathscr{E}) \hat\otimes \Gamma_c(D_1, \mathscr{E}^{0,\cdot}) \hat\otimes \dots \hat\otimes \Gamma_c(D_n, \mathscr{E}^{0,\cdot})$$

est acyclique en degré $\neq n$ et à cohomologie séparée égale à

$$\Gamma_c(S, \mathscr{E}) \hat\otimes H^1_c(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) \hat\otimes \dots \hat\otimes H^1_c(D_n, \mathcal{O}_{D_n})$$

en degré $n$. Maintenant il suffit d'appliquer le Lemme 2 et le théorème de de Rham abstrait.

### 5 - Cohomologie à supports compacts

Soit $X$ une variété mixte de type $(m, n)$, fixée; on la supposera toujours séparée et à base dénombrable, sauf mention expresse du contraire.

Un $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{F}$ est dit *cohérent* si, pour tout point $x$ de $X$ et tout entier $d \geqslant 0$, il existe un ouvert $U$ de $X$, contenant le point $x$, et une suite exacte de $\mathcal{O}_U$-modules

$$\mathcal{O}_U^{p_d} \to \dots \to \mathcal{O}_U^{p_0} \to \mathscr{F}|_U \to 0$$

avec $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{X|U}$ et $p_i$ des entiers $\geqslant 0$.

De même, si $A = \mathcal{O}_{X,x}$ pour un point $x$ de $X$, un $A$-module $M$ est dit *cohérent* s'il existe une suite exacte

$$\dots \to L_i \xrightarrow{\alpha_i} \dots \xrightarrow{\alpha_1} L_0 \xrightarrow{e} M \to 0$$

avec $L_i$ des $A$-modules libres de type fini pour $i \in \boldsymbol{N}$. Pour $M \neq 0$, on dit qu'une telle suite exacte est une *résolution libre minimale* de $M$ lorsque $\alpha_i \otimes \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}} = 0$ pour tout entier $i \geqslant 1$.

Pour tout $A$-module cohérent $M \neq 0$, il existe une résolution libre minimale $L_\cdot \to M$, unique à des isomorphismes fonctoriels près; on définit alors la *dimension homologique* de $M$ par

$$\mathrm{dh}_A(M) = \sup\{i \mid L_i \neq 0\}\ .$$

On a toujours $0 \leqslant \mathrm{dh}_A(M) \leqslant m+n$, $\mathrm{dh}_A(M) = 0$ si et seulement si $M$ est libre et

$$\mathrm{Tor}_d^A(M, \mathbf{C}) \neq 0 \qquad \text{pour } d = \mathrm{dh}_A(M)\ .$$

On pose, par définition, $\mathrm{dh}_A(0) = -1$.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, on définit la *dimension homologique de* $\mathscr{F}$ par $\mathrm{dh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) = \sup\limits_{x \in X} \mathrm{dh}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x)$.

On a donc $\mathrm{dh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) = -1$ lorsque $\mathscr{F} = 0$, $0 \leqslant \mathrm{dh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) \leqslant m+n$ lorsque $\mathscr{F} \neq 0$, et, pour $X$ connexe, $\mathrm{dh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) = 0$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est localement libre. (Pour les démonstrations on renvoit à [**14**]).

Déf. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F} \neq 0$, on définit la codimension homologique de $\mathscr{F}$ par $\mathrm{codh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) = m + n - \mathrm{dh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F})$.

On a donc $$0 \leqslant \mathrm{codh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) \leqslant m+n$$

et, pour $X$ connexe, $\mathrm{codh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) = m+n$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est localement libre.

Déf. [**12**], [**14**]. Une *variété de Cartan* est une variété mixte $X$, qu' on ne la suppose pas à priori à base denombrable, telle que:

($c_0$) l'espace quotient $X/R$ est à base dénombrable;

($c_1$) $X$ est $\mathcal{O}$-convexe, *i.e.* l'ensemble

$$\hat{K} = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant \sup_K |f| \ \text{ pour tout } f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\}$$

est compact pour tout compact $K$ de $X$;

($c_2$) $X$ est $\mathcal{O}$-séparée (cf. **3**).

Notons que, d'après le théorème de la base, toute variété de Cartan admet une base dénombrable; par conséquent la définition actuelle des variétés de Cartan, quoique plus économique, équivaut à celle de [**12**], [**14**]. Notons aussi que les variétés de Stein sont exactement les varétés de Cartan purement complexes (d'après le théorème de caractérisation de H. Grauert [**6**]).

Lorsque $X$ est une variété de Stein et $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, un théorème bien connu, dû essentiellement à Serre [**16**], [**17**], affirme que $H_c^q(X, \mathscr{F}) = 0$ pour $q < \mathrm{codh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F})$.

Nous démontrerons ici le

Théorème 1. *Soient $X$ une variété de Cartan, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent* *et* $\varphi: X \to S$ *une réalisation de* $X$ *comme famille différentiable de variétés complexes (avec* $S$ *séparée). Alors*

$$H_c^q(X, \mathscr{F}) = 0 \qquad \text{pour } q < \operatorname{codh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) - \dim S\,.$$

La démonstration de ce téorème utilise 4 ingrédients principaux: le théorème du plongement des variétés de Cartan, la stabilité de la codimension homologique par plongement fermé de variétés mixtes, le théorème $A'$ et la formule de Künneth établi dans **4**. Pour le théorème du plongement et le théorème $A'$, on renvoit à [**14**]. Nous démontrerons ici la stabilité de la codimenmension homologique.

Notons d'abord que, si $\varphi: X \to Y$ est un plongement fermé de variétés mixtes et $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, alors $\varphi_* \mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent (cf. [**14**]).

Proposition 1. *Soient* $\varphi: X \to Y$ *un plongement fermé de variétés mixtes et* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-module cohérent. Alors*

$$\operatorname{codh}_{\mathcal{O}_Y}(\varphi_* \mathscr{F}) = \operatorname{codh}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F})\,.$$

Démonstration. Par application du théorème de l'immersion locale et une induction évidente, on se ramène à démontrer l'assertion suivante

*Soient* $E = \mathbf{R}^m \times \mathbf{C}^n$, $B = \mathcal{O}_{E,0}$, $t$ *une des fonctions coordonnées* $t_1, \ldots, t_{m+n}$ *de* $E$ *et* $A = B/tB$. *Alors, pour tout* $A$*-module cohérent non-nul* $M$, *on a* $\operatorname{dh}_B(M) = \operatorname{dh}_A(M) + 1$.

Pour la démonstration on fera induction sur $d = \operatorname{dh}_A(M)$.

*Lorsque* $d = 0$, $M$ est libre, disons $M = A^p$, et l'assertion résulte de la suite exacte de $B$-modules

$$0 \to B \xrightarrow{t} B \xrightarrow{0} A \to 0\,,$$

qui fournit une résolution libre minimale de $A$ comme $B$-module; par conséquent la suite exacte

$$0 \to B^p \xrightarrow{t} B^p \xrightarrow{0_p} M \to 0$$

fournit une résolution minimale de $M$ comme $B$-module, donc $\operatorname{dh}_B(M) = 1$.

*Le cas* $d = 1$. Soit

$$0 \to A^p \xrightarrow{\alpha} A^q \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

une résolution libre minimale de $M$ comme $A$-module. Alors l'application $A$-linéaire $\alpha$ s'étend d'une manière évidente à une application $B$-linéaire $\beta: B^p \to B^q$.

Considérons la suite exacte de $B$-modules

$$0 \to B^p \xrightarrow{u} B^p \times B^q \xrightarrow{v} B^q \xrightarrow{\varepsilon'} M \to 0 ,$$

où

$$\varepsilon' = \varepsilon \circ \theta^q , \qquad u(f) = (tf, -\beta(f)) , \qquad v(f, g) = \beta(f) + tg$$

pour $f \in B^p$ et $g \in B^q$. On voit aisément que cette suite est une résolution libre minimale de $M$ comme $B$-module, donc $\mathrm{dh}_B(M) = 2$.

*Le cas* $d \geqslant 2$. Soit

$$0 \to M' \to A^p \to M \to 0$$

une suite exacte de $A$-modules telle que l'application $\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ soit bijective (lemme de Nakayama). Alors $M'$ est un $A$-module cohérent non-nul et $\mathrm{dh}_A(M') = \mathrm{dh}_A(M) - 1$. Il s'ensuit, d'après l'hypothèse de l'induction, que $\mathrm{dh}_B(M') = \mathrm{dh}_A(M') + 1 = \mathrm{dh}_A(M)$.

D'autre part, pour $i \geqslant 2$, on a évidemment $\mathrm{Tor}_i^B(A, \boldsymbol{C}) = 0$; on en déduit que $\mathrm{Tor}_i^B(M', \boldsymbol{C}) \simeq \mathrm{Tor}_{i+1}^B(M, \boldsymbol{C})$. Par suite

$$\mathrm{dh}_B(M) = \mathrm{dh}_B(M') + 1 = \mathrm{dh}_A(M) + 1 .$$

Démonstration du Théorème 1. Soit $k = \dim S$. On ramenera d'abord la démonstration au cas où $S = \boldsymbol{R}^k$. En fait, puisque $X$ est à base dénombrable, on peut trouver un ouvert à base dénombrable $S'$ de $S$ tel que $\varphi(X) \subset S'$; on peut donc supposer $S$ à base dénombrable.

Soit $(S_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de $S$ tel que chaque $S_i$ soit difféomorphe à $\boldsymbol{R}^k$. Soit $(\eta_i)_{i \in I}$ une $C^\infty$-partition de l'unité sur $S$ telle que $\operatorname{supp} \eta_i \subset S_i$ pour tout $i \in I$.

Soit $X_i = \varphi^{-1}(S_i)$ et supposons qu'on sait que

$$H_c^q(X_i, \mathscr{F}_i) = 0 \qquad \text{pour } q < \operatorname{codh}(\mathscr{F}_i) - k , \qquad \text{où } \mathscr{F}_i = \mathscr{F}|_{X_i} .$$

Soit $q < \operatorname{codh}(\mathscr{F}) - k$. Nous allons démontrer alors que $H_c^q(X, \mathscr{F}) = 0$.

En effet, il est clair que $\operatorname{codh}(\mathscr{F}) = \inf_{i \in I} \operatorname{codh}(\mathscr{F}_i)$; on a donc $q < \operatorname{codh}(\mathscr{F}_i) - k$ pour tout $i \in I$.

Afin de calculer le groupe $H_c^q(X, \mathscr{F})$ nous utiliserons la résolution flasque canonique de Godement de $\mathscr{F}$; soit $\mathscr{F} \to \mathscr{L}^\cdot$ cette résolution. Alors $\mathscr{L}^\cdot$ est, en particulier, un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules.

Soit $f \in \Gamma_c(X, \mathscr{L}^q)$ un cocycle, i.e. une section telle que $\mathrm{d}f = 0$, et, pour tout $i \in I$, soit $f_i = \eta_i f$. Alors $f_i \in \Gamma_c(X_i, \mathscr{F})$; en effet, on a

$$\operatorname{supp} f_i \subset \varphi^{-1}(\operatorname{supp} \eta_i) \cap \operatorname{supp} f\,,$$

donc la section $f_i$ est à support compact contenu dans $X_i$. De plus, $\mathrm{d}f_i = \eta_i \,\mathrm{d}f = 0$.

Mais, pour tout $i \in I$, $H_c^q(X_i, \mathscr{F}_i) = 0$ par hypothèse, donc on peut trouver une section $u_i \in \Gamma_c(X_i, \mathscr{L}^q)$ telle que $\mathrm{d}u_i = f_i$; on prendra $u_i = 0$ lorsque, $f_i = 0$.

Comme $(S_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert localement fini de $S$ et comme $f$ est à support compact, on a $f_i = 0$ sauf pour un numbre fini d'indices $i \in I$, donc $u_i = 0$ excepté un nombre fini d'indices. Soit $u = \sum_{i\in I} u_i$; alors $u \in \Gamma_c(X, \mathscr{L}^{q-1})$ et $\mathrm{d}u = \sum_{i\in I} \mathrm{d}u_i = \sum_{i\in I} f_i = f$, ce qui prouve que $H_c^q(X, \mathscr{F}) = 0$.

Ainsi on peut supposer dans la démonstration que $S = \boldsymbol{R}^k$.

D'après le théorème du plongement de variétés de Cartan **[12]**, **[14]**, il existe un plongement fermé de variétés mixtes $\varphi\colon X \to \boldsymbol{R}^k \times \boldsymbol{C}^N$ pour $N$ un entier convenable, par exemple $N = m + 2n + 1$. Le faisceau $\varphi_* \mathscr{F}$ étant cohérent sur $R^k \times \boldsymbol{C}^N$, le théorème $A'$ fournit, pour tout ouvert relativement compact $U$ de $\boldsymbol{R}^k \times \boldsymbol{C}^N$, une suite exacte de $\mathscr{O}_U$-modules

$$0 \to \mathscr{L}_d \xrightarrow{\alpha_d} \dots \to \mathscr{L}_0 \xrightarrow{\alpha_0} \varphi_*(\mathscr{F})|_U \to 0\,,$$

où $d = \mathrm{dh}(\varphi_*\mathscr{F})$ et $\mathscr{L}_i = \mathscr{O}_U^{p_i}$ pour certains entiers non-négatifs $p_i$, $i = 0, \dots, d$.

On choisira $U$ de la forme $U = V \times D$ avec $V$ un ouvert relativement compact de $\boldsymbol{R}^k$ et $D$ un polydisque de $\boldsymbol{C}^N$. Alors, d'après le Théorème 1 dans **4** $H_c^{q'}(U, \mathscr{O}) = 0$ pour $q' \neq N$.

Soit $\mathscr{F}_i = \ker \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant d-1$; on a $\mathscr{F}_{d-1} \simeq \mathscr{L}_d$. Il en résulte que, si $q + d < N$,

$$H_c^q(\varphi^{-1}(U), \mathscr{F}) = H_c^q(U, \varphi_* \mathscr{F}) = H_c^{q+1}(U, \mathscr{F}_0) = \dots = H_c^{q+d}(U, \mathscr{F}_{d-1}) = 0\,.$$

Mais la stabilité de la codimension homologique donne

$$d = k + N - \operatorname{codh}(\varphi_* \mathscr{F}) = k + N - \operatorname{codh}(\mathscr{F})\,,$$

donc on a $q + d < N$ si et seulement si $q < \operatorname{codh}(\mathscr{F}) - k$. Par conséquent

$$H_c^q(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_{U = V \times D} H_c^q(\varphi^{-1}(U), \mathscr{F}) = 0 \qquad \text{pour } q < \operatorname{codh}(\mathscr{F}) - k \quad \text{avec } k = \dim S,$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 1.

Corollaire 1. *Soient $X$ une variété de Cartan de type $(m, n)$ et $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre. On suppose que $X$ admet une réalisation comme famille différentiable de variétés complexes au-dessus d'une variété de paramètres $S$ séparée et de dimension $m$. Alors $H_c^q(X, \mathscr{L}) = 0$ pour $q \neq n$.*

Démonstration. On a $\operatorname{codh}(\mathscr{L}) = m + n$ et $\dim S = m$, donc $H_c^q(X, \mathscr{L}) = 0$ pour $q < n$ d'après le Théorème 1. D'autre part la résolution de Dolbeault mixte donne $H_c^q(X, \mathscr{L}) = 0$ pour $q > n$; on peut d'ailleurs déduire ce dernier fait d'un résultat général (cf. Flondor-Pascu [**4**]).

Corollaire 2. *Soient $S$ une variété différentiable, $Z$ une variété de Stein, $X = S \times Z$, $\mathscr{G}$ un $\mathcal{O}_Z$-module cohérent et $\mathscr{F} = \operatorname{pr}_2^*(\mathscr{G})$. Alors $H_c^q(X, \mathscr{F}) = 0$ pour $q < \operatorname{codh}(\mathscr{G})$.*

Remarque. On peut aussi obtenir le résultat précédent moyennant une formule de type Künneth comme dans [**11**].

Comme application du Théorème 1, on prouvera ici un théorème de prolongement, de type Hartogs à paramètres. Le cas *sans paramètres* est traité dans Serre [**16**], [**17**].

Théorème 2. *Soient $X$ une variété de Cartan de type $(m, n)$, $Y$ un ouvert de $X$, $\pi\colon Y \to T$ une réalisation de $Y$ comme famille différentiable de variétés complexes (avec $T$ non nécessairement séparée), et $A$ un sous-ensemble de $Y$, propre relativement à $T$. On suppose que $n \geqslant 2$ et que l'ensemble $Y(t) \setminus A(t)$ est connexe quel que soit $t \in \pi(Y)$. Alors, pour toute fonction morphe $f$ sur $Y \setminus A$, il existe une fonction morphe $u$ sur $Y$ et une seule qui coincide avec $f$ sur $Y \setminus A$.*

(On dit d'un sous-ensemble $A$ de $Y$ qu'il est *propre relativement* à $T$ si, pour tout point $t \in T$, il existe un voisinage compact $N$ de $t$ dans $T$ tel que l'ensemble $A \cap \pi^{-1}(N)$ soit compact; manifestement $A$ est alors fermé dans $Y$).

Démonstration. Pour tout point $t$ de $\pi(Y)$, $Y(t) = \pi^{-1}(t)$ est une sous-variété complexe de dimension $n \geqslant 2$ de $X$. Comme $X$ est une variété de Cartan, $Y(t)$ est sans composantes connexes compactes. Comme $A(t)$ est compact et $Y(t) \setminus A(t)$ connexe, on en déduit que $Y(t)$ est connexe. Ainsi, $\pi\colon Y \to T$ est une famille différentiable de variétés complexes connexes de dimension $n \geqslant 2$.

Soient $\pi' : Y \to Y_R$ la réalisation de $Y$ comme famille différentiable de variétés complexes connexes donné par le Théorème 1 dans **2**. Alors $\pi = \theta \circ \pi'$ pour une application $\theta : Y_R \to T$, de classe $C^\infty$ et évidemment injective. On en déduit que l'ensemble $A$ est aussi propre relativement à $Y_R$. Ainsi on peut supposer $T = Y_R$.

Soit $\varrho : X \to S = X_R$ la réalisation de $X$ comme famille différentiable de variétés complexes connexes donnée par le Théorème 1 dans **2**. On a un plongement évident

$$\begin{array}{ccc} Y & \subset & X \\ \pi\downarrow & & \downarrow\varrho \\ Y_R = T & \subset & S = X_R \end{array}$$

où $T$ est un ouvert de $S$. Puisque $X$ est une variété de Cartan, $\varrho^{-1}(V)$ est un ouvert de Cartan de $X$ pour tout ouvert séparé $V$ de $S$.

L'unicité de $u$ étant manifeste d'après le principe du prolongement analytique, on en déduit que la conclusion du théorème est de caractère locale relativement à $T$. On peut donc supposer que la variété $T$ est séparée et que $T = S$. De plus, pour obtenir $u$ au-dessus d'un voisinage d'un point $s$ de $S$, on peut remplacer la fonction $f$ avec $\alpha f$ pour une fonction $\alpha \in C_c^\infty(S)$ telle que $\alpha = 1$ sur un voisinage de $s$. On peut donc supposer $A$ compact.

Soit alors $\eta \in C_c^\infty(Y)$ avec $\eta = 1$ sur un voisinage de $A$. Considérons la fonction $g$ su $Y$ définie par

$$g = (1 - \eta) f \quad \text{sur } Y \setminus A; \quad g = 0 \quad \text{sur } A\,.$$

Manifestement $g \in C^\infty(Y)$.

Considérons de même la forme différentielle $w$ sur $X$ défini par

$$w = -\bar\partial g \qquad \text{sur } Y; \qquad w = 0 \quad \text{sur } X \setminus Y\,.$$

Soit $K$ le support de $\eta$. Alors $K$ est un compact contenu dans $Y$ et, comme $g = f$ sur $Y \setminus K$, on voit que $w = 0$ sur $X \setminus K$ et, en particulier, que $w \in \Gamma_c(X, \mathscr{E}^{0,1})$. En outre $\bar\partial w = 0$.

Puisque $n \geqslant 2$ et $\dim S = m$, on a $H_c^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ d'après le Corollaire 1, donc la suite

$$\Gamma_c(X, \mathscr{E}) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma_c(X, \mathscr{E}^{0,1}) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma_c(X, \mathscr{E}^{0,2})$$

est exacte. Il en résulte qu'il existe une fonction $v \in \Gamma_c(X, \mathscr{E})$ telle que $\bar{\partial}v = w$. La fonction $u = g + v|_Y$ donne la solution.

En effet, soit $s$ un point fixé de $S$. Alors $X(s)$ est une variété connexe non-compacte, $Y(s)$ un ouvert de $X(s)$ et $K(s)$ un compact contenu dans $Y(s)$. Il en résulte qu'il existe une composante connexe $U$ de $X(s) \setminus K(s)$ qui n'est pas relativement compacte dans $X(s)$ et qui a une intersection non-vide avec $Y(s)$. Comme la fonction $v$ est à support compact sur $X$ et holomorphe sur $X(s) \setminus K(s)$, on a $v=0$ sur $U$ d'après le principe du prolongement analytique.

Comme $Y(s) \setminus A(s)$ est un ouvert connexe qui a une intersection non-vide avec $U$, une nouvelle application du principe du prolongement analytique donne $u = f$ sur $Y(s) \setminus A(s)$, ce qui termine la démonstration.

Exemple. Soient $Z$ une variété de Stein de dimension pure $n \geqslant 2$, $\Omega$ un ouvert de $Z$ et $K$ un compact de $\Omega$ tel que $\Omega \setminus K$ soit connexe. Alors la conclusion du Théorème 2 a lieu pour $X = S \times Z$, $Y = S \times \Omega$, $A = S \times K$ quelle que soit la variété différentiable séparée $S$.

## Références


[1] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193-259.

[2] H. Cartan, *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes, Bruxelles 1953, 41-55.

[3] H. Cartan, *Espaces fibrés analytiques*, Symposium Internacional de Topologia Algebraica, México 1956.

[4] P. Flondor et E. Pascu, *Some results on mixed manifolds*, Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis, Proceedings Part 2; Lecture Notes in Math. **1014**, Springer, Berlin 1983, 17-26.

[5] O. Forster, *Plongement des variétés de Stein*, Comment. Math. Helv., **45** (1970), 170-184.

[6] H. Grauert, *Charakterisierung der holomorphvollständiger komplexen Räume*, Math. Ann. **129** (1955), 233-259.

[7] A. Grothendieck, *Techniques de construction en Géométrie analytique*, Séminaire Cartan, esposé 9, 1960-61.

[8] H. Hogbe-Nlend, *Bornologies and functional analysis*, North Holland, Amsterdam 1977.

[9] C. Houzel, *Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude*, Math. Ann. **205** (1973), 13-54.

[10] M. JURCHESCU, *On a theorem of Stoilow*, Math. Ann. **138** (1959), 332-334.

[11] M. JURCHESCU, *Faisceaux sur un espace localement compact*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **19** (1974), 329-352.

[12] M. JURCHESCU, *Variétés mixtes*, Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis, Proceedings; Lecture Notes in Math. **743**, Springer, Berlin 1979, 431-448.

[13] M. JURCHESCU, *A theorem on $C^\infty$-families of complex manifolds*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **9** (1982), 981-988.

[14] M. JURCHESCU, *Faisceaux cohérents sur les variétés mixtes* (à paraître).

[15] L. SCHWARTZ, *Produits tensoriels topologiques...*, Séminaire Schwartz 1953-1954, Faculté des Sciences, Paris.

[16] J. P. SERRE, *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes, Bruxelles 1963, 55-68.

[17] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité*, Comment. Math. Helv. **29** (1955), 9-26.

[18] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math. **61** (1955), 197-278.

[19] F. TREVES, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York 1967.

* * *