Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 449-458

BIANCA MANFREDI (*)

Dissipatività, quasiperiodicità e ricorrenza (**)

A LUIGI CAPRIOLI per il suo 70° compleanno

Introduzione

Dissipatività, quasiperiodicità e ricorrenza interessano qui le oscillazioni forzate governate da sistemi differenziali non lineari e periodici del tipo

$$\dot{x} = f(t, x) , \tag{1}$$

ove: x e f sono vettori n-dimensionali, $n > 2$; $f \in \mathscr{C}(R \times S, R^n)$, con S insieme aperto e connesso di R^n, è periodica rispetto a t uniformemente rispetto ad ogni compatto di S, ed ha periodo minimo $\tau > 0$.

Nelle ipotesi di esistenza e di unicità delle soluzioni di (1), i sistemi differenziali considerati possono caratterizzare: vibrazioni tutte armoniche e subarmoniche quando godono della proprietà di *dissipatività* (¹) (per la quale ogni soluzione dopo un intervallo di tempo abbastanza grande è costretta a rimanere entro una regione fissa limitata); vibrazioni quasiperiodiche, in particolare armoniche e subarmoniche, quando, oltre all'ipotesi di J. Massera (esistenza di una soluzione limitata in futuro), si presuppone un'ipotesi complementare che in generale si traduce in una condizione di stabilità (semplice per il caso quasiperiodico, asintotica per il caso armonico e subarmonico) (²).

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.) e con fondi M.P.I. — Ricevuto il 21-XII-1984.

(¹) Cfr. [**3**], [**8**].

(²) Cfr. [**2**], [**4**], [**9**], [**10**], [**11**].

La dissipatività e la stabilità implicano la ricerca di funzioni del tipo di Liapunov, ricerca che nel caso $n > 2$ risulta assai laboriosa ([3]).

In questo lavoro viene dedotta da un'analisi precedente [**6**] una condizione caratteristica di *quasiperiodicità* (in particolare di armonicità e subarmonicità) che, appoggiandosi all'ipotesi di J. Massera, vuole prescindere da ipotesi di unicità e stabilità delle soluzioni di (1).

Si sottolinea poi che tutte le condizioni sopracitate implicano la *ricorrenza* delle oscillazioni, risultando la traiettoria di ogni soluzione approssimata, a meno di un arbitrario $\varepsilon > 0$, da un suo arco di lunghezza temporale finita dipendente da ε.

1 – Supposta in (1) la data funzione vettoriale $f(t, x)$ atta a garantire, per assegnate condizioni iniziali (t_0, x_0), l'unicità della soluzione $x(t; t_0, x_0)$ V. A. Pliss in [**8**] definisce (1) *sistema differenziale dissipativo* (brev. *D-sistema*) quando esiste una costante positiva μ tale che sia

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \|x(t; t_0, x_0)\| < \mu \qquad \forall (t_0, x_0) , \tag{2}$$

indicando $\|\cdot\|$ la norma, ad es., euclidea.

Si osserva che la condizione (2) implica che *tutte* le soluzioni di (1) siano definite in futuro e ivi limitate.

Per il D-sistema (1) si considera nell'iperpiano $t = 0$ la trasformazione T che associa al punto x_0 il punto $x(\tau; 0, x_0)$ della soluzione $x(t; 0, x_0)$, al punto trasformato $Tx_0 \equiv x(\tau; 0, x_0)$ il punto $x(\tau; 0, Tx_0)$ della soluzione $x(t; 0, Tx_0)$, e così via. Questa trasformazione T gode della proprietà ([4])

« esiste una sfera $\mathscr{H}$: $\|x\| < h$, tale che ad ogni sfera $\mathscr{A}$: $\|x\| < a$, corrisponde un numero naturale $k(a)$ in modo che $T^k\mathscr{A} \subset \mathscr{H}$, $k \geqslant k(a)$ ». Se ora si prende $\mathscr{A} \equiv \mathscr{H}$, risulta, indicando $\overline{\mathscr{H}}$ la chiusura della sfera $\mathscr{H}$, $T^{k(h)}\overline{\mathscr{H}} \in \overline{\mathscr{H}}$.

Allora, in virtù del teorema di Brower, nella sfera $\mathscr{H}$ esiste almeno un punto x_0^* tale che

$$T^k x_0^* = x_0^* \qquad k = k(h) \in N^+ . \tag{3}$$

Ne segue che la soluzione $x^*(t) = x(t; 0, x_0^*)$ è una subarmonica di (1) con periodo $k\tau$, e in particolare un'armonica se $k = 1$. Invero, la funzione $x^*(t + k\tau)$

([3]) Cfr. ad es. [**8**], pp. 53-65, dove viene conclusa la dissipatività di un particolare sistema (1) di rango tre, mediante la costruzione di una conveniente forma quadratica definita positiva e decrescente lungo le soluzioni del sistema differenziale. Per la stabilità cfr. [**2**], [**4**], [**11**].

([4]) Cfr. [**8**], pp. 19-21,

è soluzione di (1) in virtù della periodicità di (1); ma $x^*(t+k\tau) \equiv x^*(t+k\tau; 0, x_0^*) = x^*(t; 0, T^k x_0^*)$, onde, per (3), $x^*(t+k\tau) = x^*(t)$ $\forall t \geq 0$, cioè $x^*(t)$ è una subarmonica di periodo $k\tau$.

Inoltre, per ogni $m \in N^+$, le traslate $x(t) \equiv x^*(t+m\tau)$ sono soluzioni di (1) tutte armoniche o subarmoniche di periodo $k\tau$ se tale è $x^*(t)$.

Si è pertanto concluso che la «dissipatività» implica l'esistenza di vibrazioni armoniche e subarmoniche per il sistema differenziale (1).

La caratterizzazione dei D-sistemi si ottiene introducendo una funzione scalare $v(t; x)$, che può considerarsi una funzione del tipo delle funzioni di Liapounov; l'esistenza di $v(t; x)$ comporta naturalmente condizioni restrittive sulla scelta della funzione $f(t; x)$ a secondo membro di (1) (5).

Oss. 1.1. Le armoniche e le subarmoniche in generale non esauriscono l'insieme delle soluzioni periodiche di (1); ciò avviene certamente quando (1) è della forma particolare

$$(1)' \qquad \dot{x} = f(x) + \varphi(t)\,, \qquad \varphi(t+\tau) = \varphi(t) \qquad \forall t \in R^+\,.$$

Oss. 1.2. Per i sistemi differenziali periodici (1) possono esistere soluzioni quasiperiodiche e non periodiche. Si consideri, ad esempio, il sistema periodico, di periodo 2π,

$$\dot{x}_1 = \alpha(1-r^2)x_1x_2 + \beta x_2\,, \quad \dot{x}_2 = \alpha(1-r^2)x_2x_3 - \beta x_1\,, \quad \dot{x}_3 = \alpha(1-r^2)x_3x_1 + \cos t$$

con α, β costanti, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

La terna di funzioni $x_1 = \operatorname{sen}\beta t$, $x_2 = \cos\beta t$, $x_3 = \operatorname{sen} t$, rappresenta una soluzione quasiperiodica, e non periodica, del sistema considerato, quando β è irrazionale.

Oss. 1.3. La dissipatività è una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di armoniche e subarmoniche. In [**8**] è provato infatti che, sotto convenienti ipotesi sulla data funzione $f(t; x)$, un sistema differenziale (1) non dissipativo ha una soluzione armonica.

2 – Dalle precedenti osservazioni sorge spontanea la domanda: quando per i sistemi periodici (1) con $n > 2$, l'esistenza di una soluzione limitata in R^+ (ipotesi di J. Massera) implica l'esistenza di un'oscillazione quasiperiodica?

---

(5) Cfr. [**8**] e M. Pivetta, *Oscillazioni periodiche in sistemi dinamici dissipativi*, Tesi di laurea, anno accademico 1982-83.

Questo quesito mi ha indotto a ricercare una condizione caratteristica di *quasiperiodicità*, nella quale rientra come caso particolare una condizione caratteristica di armonicità e subarmonicità. Il criterio ottenuto si appoggia sull'ipotesi di J. Massera senza presupporre però l'unicità delle soluzioni di (1).

Osservo che se $x(t)$ è una soluzione limitata in R^+, essa è uniformemente continua in R^+, avendo ivi, in virtù di (1), derivata limitata. Pertanto la successione di traslate $\{x(t+\nu\tau)\}$ $\nu = 1, 2, \ldots$ è formata da soluzioni (v. [**6**]$_2$) equilimitate ed equicontinue; ne segue che da ogni successione divergente di interi positivi $\{\nu_{k'}\}$, con $\nu_{k'} < \nu_{k'+1}$, si può estrarre una sottosuccessione $\{\nu_k\} \in \{\nu_{k'}\}$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} x(t+\nu_k\tau) \qquad \text{esiste uniforme per } 0 \leqslant t < \tau . \tag{4}$$

Ciò premesso, andiamo a provare l'affermazione

Se, e solo se, la soluzione $x(t)$ limitata in R^+ (supposta esistente) è tale che

$$\lim_{k\to+\infty} x(t+(\nu_k+m)\tau)_{0\leqslant t<\tau} \qquad \textit{esiste uniforme per } m = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

il sistema differenziale (1) *ha soluzioni quasiperiodiche, in generale in numero infinito.*

Dim. Poichè $x(t)$ è per ipotesi limitata in R^+, vale (4); d'altra parte ad ogni istante $t \geqslant \tau$ corrisponde un $m \in N^+$ tale che sia $t = t' + m\tau$ con $0 \leqslant t' < \tau$. Pertanto dall'ipotesi (5) segue necessariamente che

$$\lim_{k\to+\infty} x(t+\nu_k\tau) \qquad \text{esiste uniforme per } t \geqslant 0 . \tag{6}$$

Quando si procede come in [**6**]$_3$ (pp. 297-298) la relazione (6) implica che la soluzione $x(t)$, sia asintoticamente quasiperiodica; quindi per essa vale la decomposizione [6]

$$x(t) = p(t) + q(t) \quad t \geqslant 0 , \qquad \lim_{t\to+\infty} q(t) = 0 , \tag{7}$$

con $p(t)$ funzione continua quasiperiodica. Se in (7) si cambia t in $t+\nu_k\tau$ (essendo $\{\nu_k\tau\}$ la successione figurante in (6)) e si passa al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$\lim_{k\to+\infty} x(t+\nu_k\tau) = \lim_{k\to+\infty} p(t+\nu_k\tau) \qquad t \geqslant 0 , \tag{8}$$

(6) Cfr. [**11**], pp. 20-21.

essendo $\lim_{t\to+\infty} q(t) \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} q(t+\nu_k\tau)$. Ma, in virtù di (6), esiste in R^+ il limite a primo membro di (8); inoltre, in virtù del Teorema 2.2 di [**11**] esiste il limite del secondo membro di (8) e questo limite — che indicheremo con $\lambda(t)_{t\geqslant 0}$ — è una funzione continua quasiperiodica. Pertanto la (6) si precisa nella relazione

$$\lim_{k\to+\infty} x(t+\nu_k\tau) = \lambda(t) \quad t\geqslant 0\,, \qquad \lambda(t) \text{ funzione continua quasiperiodica.} \tag{9}$$

Provo ora che la funzione $\lambda(t)$ è derivabile in R^+ e che ivi è soluzione del sistema differenziale (1). Osservo a tal fine che $\{\dot{x}(t+\nu_k\tau)\}$, ove $\{\nu_k\}$ è la successione numerica figurante in (9), è una successione di funzioni equilimitate ed equicontinue in R^+ in quanto, essendo $x(t+\nu_k\tau)$ soluzioni di (1), la funzione $f(t;\, x(t+\nu_k\tau))$, a secondo membro di (1), risulta limitata e uniformemente continua per $t\geqslant 0$ e $k=1, 2, \ldots$ (7). Ne segue che da $\{\dot{x}(t+\nu_k\tau)\}$ si può estrarre una successione $\{\dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau)\}$ tale che esista $\lim_{l\to+\infty}\dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau)$ uniforme per $0\leqslant t<\tau$; ma, valendo (6) ed essendo la funzione $f(t, x)$ uniformemente continua in R^+, dalla relazione

$$\dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau) = f(t;\, x(t+\nu_{k_l}\tau)) \tag{10}$$

segue che esiste uniforme in R^+ $\lim_{l\to+\infty}\dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau)$. Si può porre così

$$\lim_{l\to+\infty}\dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau) = \mu(t) \quad t\geqslant 0\,, \qquad \mu(t) \text{ continua in } R^+\,. \tag{11}$$

D'altra parte si ha, per ogni h non nullo,

$$\frac{x(t+\nu_{k_l}\tau+h) - x(t+\nu_{k_l}\tau)}{h} = \dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau+\theta_{k_l}h) \qquad h\neq 0, \quad 0<\theta_{k_l}<1, \tag{12}$$

ed anche, essendo $\dot{x}(t)$ uniformemente continua in R^+,

$$\dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau)-\varepsilon < \frac{x(t+\nu_{k_l}\tau+h)-x(t+\nu_{k_l}\tau)}{h} < \dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau)+\varepsilon\,, \qquad |h|<\delta_\varepsilon\,. \tag{12'}$$

Ne segue per $k\to\infty$, tenendo presente (9), (11),

$$\mu(t)-\varepsilon < \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h} < \mu(t)+\varepsilon\,,$$

vale a dire la funzione continua quasiperiodica $\lambda(t)$ è derivabile ed ha per derivata la funzione continua $\mu(t)$.

(7) Cfr. A. Dall'Aglio Angelotti, *Un criterio di periodicità per le soluzioni di sistemi periodici*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 347-358.

Pertanto la (11) diventa

$$(11)' \qquad \lim_{l\to+\infty} \dot{x}(t+\nu_{k_l}\tau) = \dot{\lambda}(t) \qquad t \geqslant 0 ,$$

e con un passaggio al limite in ambo i membri di (10) si ottiene, in virtù di (9), (11)$'$ e dell'uniforme continuità di $f(t, x)$ in R^+,

$$(11)'' \qquad \dot{\lambda}(t) = f(t;\, \lambda(t)) \qquad t \geqslant 0 .$$

Questa relazione (11)$''$ afferma così che la funzione continua quasiperiodica $\lambda(t)$ è soluzione del sistema differenziale (1). Ancora, poichè da ogni sottosuccessione di $\{x(t+\nu\tau)\}$ si può estrarre una successione convergente in R^+ ad una soluzione $\lambda(t)$ quasiperiodica, si conclude che il sistema differenziale (1) ha in generale infinite soluzioni quasiperiodiche: queste soluzioni non sono necessariamente tutte distinte e in particolare possono risultare delle armoniche e delle subarmoniche.

Rimane da provare che vale anche il viceversa: se il sistema differenziale (1) ha soluzioni quasiperiodiche, necessariamente vale la relazione (5). Infatti, indicando $\lambda(t)$ una delle soluzioni quasiperiodiche di (1), esistenti per ipotesi, la soluzione $\lambda(t)$ è certamente limitata in R^+; osservando poi che le traslate $\lambda(t+\nu\tau)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sono ancora soluzioni di (1), per il teorema di Bochner sulle funzioni quasiperiodiche [8] segue che da ogni successione $\{\lambda(t+\nu_{k'}\tau)\}$, con $\{\nu_{k'}\}$ successione divergente di interi positivi, si può estrarre una sottosuccessione $\{\lambda(t+\nu_k\tau)\}$, con $\{\nu_k\} \in \{\nu_{k'}\}$, tale che

$$(13) \qquad \lim_{k\to+\infty} \lambda(t+\nu_k\tau) \qquad \text{esiste uniforme per } t \geqslant 0 .$$

Ma ad ogni $t \in R^+$ corrisponde un istante t' e un intero positivo m' tale che $t = t' + m'\tau$ con $0 \leqslant t' < \tau$. Allora da (13) segue

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda(t' + (\nu_k + m)\tau) \qquad \text{esiste uniforme per } m' = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant t' < \tau ,$$

e questa relazione è la (5) quando si vuole leggere λ, t', m' al posto di x, t, m rispettivamente.

Oss. 2.1. Dalla (11) segue che la funzione $\dot{x}(t)$ è asintoticamente quasiperiodica e che la funzione $\mu(t)$, è quasiperiodica.

---

(8) Cfr. ad es. [2], [7].

Nel seguito chiamiamo J l'insieme, non vuoto, delle soluzioni quasiperiodiche, $\lambda(t)$, precedentemente ottenute come accumulazioni della successione $\{x(t+\nu\tau)\}$, essendo $x(t)$, per ipotesi, la soluzione limitata in R^+ del sistema differenziale (1).

Oss. 2.2. Se gli elementi distinti di J sono in numero infinito, allora l'insieme J è *equiquasiperiodico*, nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $L = L(\varepsilon)$ (dipendente da $x(t)$) tale che ogni intervallo temporale di grandezza L contiene almeno un $\tau' = \tau'(\varepsilon)$, in modo che $\forall \lambda(t) \in J$, $\forall t \in R^+$ si abbia $\|\lambda(t+\tau') - \lambda(t)\| < \varepsilon$.

Oss. 2.3. Se gli elementi distinti di J sono in numero finito $K \geqslant 1$, allora l'insieme J è formato da una armonica per $K = 1$, da K subarmoniche distinte per $K > 1$, tutte di periodi $K\tau$ e non di periodi $\tau, 2\tau, \ldots, (K-1)\tau$.

Precisamente si può provare l'affermazione (caso armonico)

Se, e solo se, la soluzione $x(t)$ limitata in R^+ (supposta esistente) è tale che sia

$$\lim_{k\to+\infty}\left(x(t+(\nu_k+m)\tau) - x(t+\nu_k\tau)\right) = 0 \tag{14}$$

uniformemente per $m = 1, 2, \ldots$,

il sistema differenziale (1) *ha almeno una soluzione armonica, che rappresenta l'unico elemento dell'insieme J.*

Dim. Poichè valgono (4) e (14), vale pure (5) e quindi (9). Se poi in (9) si legge $t + \tau$ al posto di t si ottiene

$$\lim_{k\to+\infty} x(t+(\nu_k+1)\tau) = \lambda(t+\tau) \qquad t \geqslant 0\,,$$

onde, per (14), si ha $\lambda(t+\tau) = \lambda(t)$ $t \geqslant 0$, cioè esiste un'armonica per il sistema differenziale (1) (9). D'altra parte, l'armonicità di $\lambda(t)$ assicura che la successione $\{x(t+\nu\tau)\}$ ha una sola accumulazione (v. [**6**]$_1$), onde l'insieme J contiene un solo elemento.

Viceversa, se l'insieme J è formato da un solo elemento, questo rappresenta un'armonica per il sistema differenziale (1) (10) e si ha, uniformemente in R^+,

$$\lim_{k\to+\infty} x(t+\nu\tau) = \lambda(t) \quad \lambda(t+\tau) = \lambda(t) \qquad t \geqslant 0\,. \tag{15}$$

Ne segue: la validità di (5), quando si osserva che in (5) gli istanti $t + m\tau$ esau-

(9) Già nel caso quasiperiodico (v. (11)″) si è provato che $\lambda(t)$ è soluzione di (1).
(10) Cfr. [**6**]$_1$.

riscono l'intervallo $t \geq 0$, e la validità di (14) quando si tenga presente la periodicità di $\lambda(t)$.

In modo analogo si prova l'affermazione (caso subarmonico)

Se, e solo se, la soluzione $x(t)$ limitata in R^+ (supposta esistente) è tale che sia

$$\lim_{k\to+\infty} [x(t + (\nu_k + m)\tau^* - x(t + \nu_k\tau^*)] = 0 \tag{16}$$

uniformemente per $m = 1, 2, \dots$,

ove $\tau^* = K\tau$ è il minimo multiplo di τ per cui

$$\lim_{\nu\to+\infty} x(t + \nu\tau^*) = \lambda(t) \quad \textit{uniformemente in } R^+, \tag{17}$$

il sistema differenziale (1) *ha K soluzioni subarmoniche distinte $\lambda(t)$, $\lambda(t + \tau)$, ..., $\lambda(t + (K-1)\tau)$, di periodo τ^* e non di periodi $\tau, 2\tau, \dots, (K-1)\tau$; esse rappresentano i soli elementi distinti dell'insieme J.*

Oss. 2.4. Da (14) e (16) segue che $x(t)$ è asintoticamente periodica di asperiodi τ e τ^*, rispettivamente.

Oss. 2.5. Se la soluzione $x(t)$ è tale che esiste $\lim_{t\to+\infty} x(t)$, cioè se $x(t)$ è convergente in $+\infty$, questo limite è certamente finito, essendo per ipotesi $x(t)$ limitata in R^+; esso rappresenta una soluzione periodica costante (o equilibrio) cui tende $x(t)$.

Oss. 2.6. Se come soluzione $x(t)$ limitata in futuro si prende una soluzione periodica di periodo minimo incommensurabile con il periodo τ di (1), l'affermazione di quasiperiodicità porta a concludere che possono coesistere vibrazioni periodiche ed infinite vibrazioni quasiperiodiche tutte tra loro distinte per il sistema periodico (1).

3 – Le affermazioni che figurano in **2** assicurano la *ricorrenza* delle oscillazioni appartenenti all'insieme J.

Sia infatti $\lambda^*(p, t)$ un elemento di J tale che $\lambda^*(p, 0) = p$.

$\lambda^*(p, t)$ è per definizione *ricorrente in* R^+ [11] se, preso comunque un $\varepsilon > 0$, esiste un $T = T(\varepsilon, \lambda^*) > 0$ tale che ogni arco della traiettoria di $\lambda^*(p, t)$ di lunghezza temporale T approssima secondo ε l'intera traiettoria

[11] Cfr. [7], p. 375.

$\lambda^*(p, R^+)$. Ad ogni punto $q \in \lambda^*(p, R^+)$ corrisponde allora un istante $t_0 = t_0(q)$ appartenente all'intervallo temporale $(\alpha, \ldots, \alpha + T)$, con α preso ad arbitrio, in modo che sia

$$\|q - \lambda^*(p, t_0)\| < \varepsilon . \tag{18}$$

Ora, $\lambda^*(p, t)$ quale elemento di J è quasiperiodico e quindi l'insieme $\{\tau_n\}$ dei suoi quasiperiodi è relativamente denso, nel senso che ad un $\varepsilon > 0$ arbitrario corrisponde un $L = L(\varepsilon, \lambda^*)$ tale che nell'intervallo temporale $(\alpha, \ldots, \alpha + L)$ cade almeno un τ_n in modo che si ha

$$\|\lambda^*(p, t) - \lambda^*(p, t + \tau_n)\| < \varepsilon \qquad t \in R^+ . \tag{19}$$

Allora, se chiamiamo q il punto generico, $\lambda^*(p, t)$, della traiettoria e prendiamo per il moto quasiperiodico $\lambda^*(p, t)$, $L(\varepsilon, \lambda^*) = T(\varepsilon, \lambda^*)$, la (19) afferma che al punto q corrisponde l'istante $t_0 = t + \tau_n$ in modo che è $\|q - \lambda^*(p, t_0)\| < \varepsilon$, relazione che coincide con (18).

Si è così concluso: *l'insieme J è formato da moti ricorrenti.*

Oss. 3.1. Se la soluzione quasiperiodica $\lambda^*(p, t)$ si particolarizza in una armonica di periodo τ o in una subarmonica di periodo τ^*, allora gli insiemi dei periodi $\{n\tau\}$ e $\{n\tau^*\}$, $n \in N^+$, sono relativamente densi e (19) diventa

$$\|\lambda^*(p, t) - \lambda^*(p, n\tau)\| = 0 \qquad \text{o} \qquad \|\lambda^*(p, t) - \lambda^*(p, n\tau^*)\| = 0 .$$

Oss. 3.2. Un moto quasiperiodico è ricorrente, ma non viceversa (cfr. l'esempio dato in [7], p. 391). La relazione (6) può interpretarsi come condizione sufficiente per l'esistenza di un moto ricorrente che è quasiperiodico.

Bibliografia

[1] L. G. Deysach and G. R. Sell, *On the existence of almost periodic motions*, Michigan Math. J. **12** (1965), 87-95.

[2] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations*, Springer-Verlag, N. Y. 1974.

[3] J. K. Hale, J. P. Lasalle and M. Slemrod, *Theory of a general class of dissipative processes*, J. Math. Anal. Appl. **39** (1972), 177-191.

[4] A. Halanay, *Differential equations*, Academic Press, N. Y. 1966.

[5] N. Levinson, *Transformation theory of nonlinear differential equations of second order*, Ann. of Math. **45** (1944), 723-737.

[6] B. Manfredi: [•]$_1$ *Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni di accumulazione periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 149-159; [•]$_2$ *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des solutions périodiques de certaines équations différentielles non linéaires d'ordre* $n \geqslant 2$, Colloque de Mons (pp. 56-65) Vander, Louvain 1970; [•]$_3$ *Asperiodicità e asquasi-periodicità*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 395-402.

[7] V. V. Nemytskiy and V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton University Press, 1960.

[8] V. A. Pliss, *Nonlocal problems of the theory of oscillations*, Academic Press, N. Y. 1966 (translation of 1964 Russian ed.).

[9] G. Seifer, *Almost periodic solutions and asymptotic stability*, J. Math. Anal. Appl. **21** (1968), 136-149.

[10] G. R. Sell: [•]$_1$ *Periodic solutions and asymptotic stability*, J. Differential equations **2** (1966), 143-157; [•]$_2$ *Differential equations without uniqueness and classical topological dynamics*, J. Differential equations **14** (1973), 42-56.

[11] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Springer-Verlag, N. Y. 1975.

Summary

Forced oscillations of mechanical systems described by n-dimensional τ*-periodic system* ($n > 2$) *are taken into consideration, at first «dissipation» of system* 1 *implyng the existance of harmonique and subarmonique oscillations is pointed out. Observed that the* τ*-periodic system may have an almost-periodic solution, which is not periodic, a necessary and sufficient condition is proved for the almost-periodic oscillations and for the harmonic and subarmonic oscillations as well. This condition is based on Massera's hypothesis and the hypothesis of unicity and stability are not considered. How the above mentioned oscillations are recurrent is at last emphasized.*

* * *

Finito di stampare il 22 luglio 1985 Tipografia Compositori Bologna