Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 443-448

ALDO ASCARI (*)

Una proprietà di speciali superfici d'onda in elasticità lineare anisotropa (**)

A LUIGI CAPRIOLI per il suo 70° compleanno

1 – La propagazione di onde elastiche in solidi anisotropi è stata oggetto di analisi teorica già nel secolo scorso; i contributi più importanti possono essere ritenuti quelli di Christoffel e Kelvin. L'unico campo di applicazione è rimasto, per lungo tempo, la cristallografia, alla quale però mancava la disponibilità di una strumentazione adeguata ai fenomeni che la teoria avrebbe permesso di studiare. Ciò ha prodotto un certo ristagno dell'approfondimento teorico fino a quando, a partire dalla metà di questo secolo, lo sviluppo della sismologia, e più ancora delle tecniche piezoelettriche ed ultraacustiche, ne ha sollecitato una vigorosa ripresa. Un ruolo di spicco in questa ripresa è stato sostenuto da M. J. P. Musgrave, cui si deve anche un ottimo, e finora unico, testo di riferimento [**2**]. Un ulteriore, recente terreno di applicazione è lo studio delle proprietà dei materiali polimerici (compositi) ad anisotropia artificiale.

Lo strumento fondamentale per l'analisi della propagazione ondosa (lineare) in un mezzo anisotropo è la superficie d'onda, o fronte d'onda, relativa al mezzo; ne rammentiamo brevemente la definizione. Se un punto di un mezzo infinito è origine di una emissione isotropa di onde armoniche piane, la superficie d'onda è l'inviluppo di tali onde, ad un istante assegnato (comunemente assunto come unitario). Analiticamente, si può partire dall'equazione delle onde per il vettore spostamento $u_j(x_k, t)$ (tutti gli indici assumono i valori 1, 2, 3, e vale la convenzione della somma per gli indici ripetuti)

$$\varrho \ddot{u}_j = c_{jklm} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \, \partial x_m}, \tag{1}$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 19-IX-1984.

dove ϱ è la densità (costante), e c_{jklm} è il tensore elastico, o di rigidità (cfr. p. es. [**1**]). Un'onda armonica piana

$$u_j = u_{0j} \exp [i(n_k x_k - vt)] \tag{2}$$

emessa dall'origine, con velocità v, nella direzione di coseni n_k, è una soluzione della (1) solo se ϱv^2 è un autovalore della matrice (« di Christoffel »)

$$\Gamma_{jk} = c_{jklm} n_l n_m \tag{3}$$

(come si può constatare mediante effettiva sostituzione).

Si può mostrare che, sotto condizioni generalmente verificate per il tensore elastico, la (3) ha tre autovalori reali e positivi (eventualmente non tutti distinti soltanto lungo speciali direzioni); si hanno quindi tre valori della velocità, funzioni della direzione. Nei mezzi isotropi un autovalore è sempre doppio; quindi i valori della velocità sono solo due, ovviamente indipendenti dalla direzione.

Nei cristalli, e in altri materiali anisotropi, sono spesso presenti simmetrie che riducono notevolmente il numero di componenti distinte e non nulle del tensore elastico (rispetto al massimo teorico, che è 21). La presenza di tali simmetrie influenza ovviamente la scelta del riferimento; in generale, è opportuno adottare un sistema di coordinate sferiche r, θ, φ, con l'intesa che se, ad es., il mezzo è dotato di tre piani di simmetria mutualmente ortogonali (mezzo « ortotropo », o cristallo del sistema ortorombico; tensore elastico con 9 componenti distinte) i tre piani coincidono con i piani coordinati di un riferimento cartesiano x, y, z legato a quello sferico nel solito modo. Se il mezzo è a simmetria assiale (cristallo esagonale, 5 componenti) l'asse di simmetria è l'asse z; e così via. In tal modo, ai coseni di direzione n_k spettano le note espressioni

$$n_1 \equiv n_x = \sin\theta \cos\varphi\,, \qquad n_2 \equiv n_y = \sin\theta \sin\varphi\,, \qquad n_3 \equiv n_z = \cos\theta\,,$$

e pertanto i tre autovalori della matrice Γ_{jk} (3) forniscono le equazioni in coordinate sferiche, diciamo

$$r = v(\theta, \varphi)\,, \tag{4}$$

delle tre « falde » (sheets) di una superficie V, detta superficie di velocità, che funge da indicatrice del valore della velocità di propagazione in ogni direzione (θ, φ).

La superficie d'onda W, che si vuole in ultima analisi costruire (dato il suo significato rammentato all'inizio), è l'inviluppo dei piani normali ai raggi vettori di V, nei punti di V. Applicando questa definizione si ottiene per il punto generico (X, Y, Z) di W la rappresentazione parametrica

$$X = \sin\theta \cos\varphi\, v(\theta, \varphi) + \cos\theta \cos\varphi \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \tag{5$_1$}$$

$$Y = \sin\theta \sin\varphi\, v(\theta, \varphi) + \cos\theta \sin\varphi \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \tag{5$_2$}$$

$$Z = \cos\theta\, v(\theta, \varphi) - \sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}, \tag{5$_3$}$$

dove v e le sue derivate si ottengono dalla (4). La singolarità per $\sin\theta = 0$ è di solito irrilevante, perchè ivi è $\partial v/\partial\varphi = 0$. È opportuno tenere presente che nelle (5) le variabili θ, φ sono semplici parametri e *non* sono, nel riferimento adottato, coordinate sferiche del punto (X, Y, Z): queste (diciamo R, Θ, Φ) si otterranno dalle (5) mediante le note relazioni

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos\Theta = Z/R, \quad \tan\Phi = Y/X. \tag{6}$$

Nel caso a simmetria assiale, o esagonale, si ha $\partial v/\partial\varphi \equiv 0$ o dalle prime due (5) segue senz'altro $Y/X = \tan\varphi$, cioè, come è intuitivo, $\Phi = \varphi$ (eventualmente $\Phi = \varphi \pm \pi$); ossia in tal caso ad ogni sezione meridiana della superficie (di rotazione) V corrisponde la medesima sezione meridiana della superficie W. Per altri sistemi di anisotropia ciò non è più vero in generale (può esserlo per sezioni particolari; lo è ad esempio per i piani di simmetria del sistema ortotropo); esaminiamo più da vicino questo aspetto della trattazione.

2 – Nel caso generale, come si è appena detto, ad un punto $P(\theta, \varphi) \in V$ corrisponde un punto $Q(\theta, \varphi) \in W$ la cui longitudine Φ (ricavabile mediante le prime due (5) e l'ultima (6)), è in generale diversa dalla longitudine φ di P; quindi ogni sezione meridiana di V si muta in una linea di W a longitudine variabile. Poichè generalmente lo stesso accade per i paralleli di V, ne consegue che, ad esempio, da un reticolo regolare di punti di V può ottenersi, mediante le (5), un reticolo molto irregolare su W, con addensamenti e rarefazioni dei nodi.

Una possibile situazione intermedia fra il caso generale e quello della simmetria assiale si ha quando ai punti $\varphi =$ costante di V corrispondono punti di W per i quali $\Phi =$ costante $\neq \varphi$, cioè una sezione meridiana di V riesce «ruotata» nel passaggio a W. È interessante stabilire le condizioni sotto le quali questa situazione si verifica, perchè ad esse corrisponderanno materiali con speciali proprietà di anisotropia (p. es. riguardo alla trasmissione di energia); e per i materiali artificiali sarà spesso possibile, con opportune ricette di composizione, soddisfare a tali condizioni, almeno approssimativamente o su dominii parziali. Una valutazione dello scostamento (locale o globale) di una V assegnata dalle condizioni suddette è inoltre utile nel predisporre le tecniche numeriche e grafiche di costruzione di W (che debbono, in generale, affidarsi a delicati e laboriosi procedimenti di approssimazione bidimensionale).

Riguardo alla funzione $v(\theta, \varphi)$ (cfr. la (4)) la condizione da rendere esplicita è $\partial\Phi/\partial\theta = 0$, cioè, per l'ultima (6),

$$X \frac{\partial Y}{\partial \theta} - Y \frac{\partial X}{\partial \theta} = 0 \, . \tag{7}$$

Posto

$$A(\theta, \varphi) = v \sin\theta + \cos\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\, , \qquad B(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi}\, , \tag{8}$$

mediante le due prime due (5) la (7) si muta in

$$A \frac{\partial B}{\partial \theta} - B \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0 \, , \tag{9}$$

od anche

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{A}{B} = 0 \, .$$

Mediante le (8) la (9) assume la forma esplicita

$$\cot\theta \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \left(v + \cot\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \, \partial \varphi} + \cot\theta \left(2v + \cot\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \, . \tag{10}$$

La condizione cercata è dunque espressa da una equazione quasi lineare del secondo ordine per $v(\theta, \varphi)$, di tipo iperbolico, con una delle due famiglie di caratteristiche sempre costituita dai meridiani $\varphi =$ costante; è ovviamente verificata dalle superfici di rotazione $\partial v/\partial \varphi \equiv 0$ relative al caso esagonale. Una famiglia interessante ed abbastanza ampia di soluzioni si ottiene per separazione di variabili: posto

$$v(\theta, \varphi) = T(\theta) F(\varphi) \, , \tag{11}$$

si ottiene per T l'equazione ordinaria

$$T'' \cot\theta - (T + T' \cot\theta) T' + T \cot\theta (2T + T' \cot\theta) = 0 \, , \tag{12}$$

mentre $F(\varphi)$ rimane arbitraria. La (12) si linearizza con la posizione $T = \exp[U]$: se ne ricava, elementarmente, l'integrale generale

$$T = K \cos\theta (\tan\theta)^{\mu},$$

con K, μ costanti arbitrarie. Ricaviamo da questa una particolare soluzione in coordinate cartesiane, assumendo $\mu = M =$ intero, mentre K può essere assorbita nella $F(\varphi)$. Poichè $r = v(\theta, \varphi)$, si può scrivere

$$r(\cos\theta)^{M-1} = (\sin\theta)^M F(\varphi), \tag{13}$$

e prendendo

$$F(\varphi) = \sum_{m=0}^{M} A_m (\cos\varphi)^m (\sin\varphi)^{M-m}, \tag{14}$$

con le A_m costanti arbitrarie, si ottiene

$$r^2 (r\cos\theta)^{M-1} = (r\sin\theta)^M \sum_{m=0}^{M} A_m (\cos\varphi)^m (\sin\varphi)^{M-m},$$

cioè

$$(x^2 + y^2 + z^2) z^{M-1} = \sum_{m=0}^{M} A_m x^m y^{M-m}, \tag{15}$$

famiglia di superfici algebriche di grado $M + 1$, dipendente da altrettanti parametri arbitrari. Poichè (cfr. [2], Ch. 6) la V è una superficie algebrica di grado 12, si potrebbe essere indotti ad assumere $M = 11$. Se d'altra parte consideriamo la superficie S di equazione $r = 1/v(\theta, \varphi)$, inversa della V rispetto alla sfera unitaria (superficie di « lentezza »), dalla (13) con lo stesso procedimento otteniamo ora la superficie di grado M

$$z^{M-1} = \sum_{m=0}^{M} B_m x^m y^{M-m}, \tag{16}$$

e poichè è noto che S è di grado 6, questo sembra ora il valore suggerito per M. In realtà, nulla consente di supporre che (anche per materiali anisotropi artificiali) $v(\theta, \varphi)$ sia in qualche caso esattamente rappresentabile nella forma generica (11) e meno che mai in quella più specifica conseguente alla (14); l'utilità delle (15) e (16) consiste piuttosto nella possibilità di usarle come approssimazioni in dominii parziali, quando $v(\theta, \varphi)$ è ottenuta numericamente come autovalore della matrice di Christoffel.

Concludiamo osservando che, quando è verificata la condizione $\partial\Phi/\partial\theta = 0$, Φ può essere calcolata mediante l'ultima (6) e le prime due (5) per qualsiasi valore di θ, in particolare per $\theta = \pi/2$; si ottiene

$$\tan\Phi = \left(\frac{v\sin\varphi + (\partial v/\partial\varphi)\cos\varphi}{v\cos\varphi - (\partial v/\partial\varphi)\sin\varphi}\right)_{\theta=\pi/2},$$

cioè

$$\Phi = \varphi + \Psi, \qquad \text{dove} \qquad \tan\Psi = \left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)_{\theta=\pi/2};$$

questa derivata logaritmica misura quindi la «rotazione» della sezione meridiana, passando da V a W.

Bibliografia

[1] L. D. Landau e E. M. Lifšits, *Teoria dell'elasticità*, Editori Riuniti, Roma 1979.

[2] M. J. P. Musgrave, *Crystal Acoustics*, Holden-Day, S. Francisco 1970.

Summary

For an anisotropic linear elastic medium, the condition is derived under which a point-to-point correspondence holds between the meridian sections of the velocity and wave surfaces, normally with a longitude shift (null only for axially symmetric media, where the property is trivially true). A fairly general class of surfaces obeying the condition is given, and a short mention is made of possible uses of the result in the study of wave propagation in real media.

* * *