Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 359-372

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Influenza dell' effetto Levi-Civita sulla velocità residua: generalizzazioni e confronti (**)

A LUIGI CAPRIOLI per il suo 70° compleanno

1 - Premessa

In alcune recenti Note, $[\mathbf{15}]_{2,3,4}$, ho avuto occasione di riprendere un classico contributo alla balistica terminale dato nel 1906 dal Levi-Civita $[\mathbf{7}]_1$, relativo allo studio della penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi. In $[\mathbf{7}]_1$ veniva chiarito un apparente paradosso (*paradosso di Levi-Civita*), cui dava luogo ad alte velocità (1) di impatto l'uso di una formula di Poncelet, considerando il proiettile come un solido elastico e tenendo conto della *deformazione impulsiva* da esso subita nell'impatto col mezzo (*effetto Levi-Civita*) (2). In quei lavori mi ero prevalentemente occupato, nei primi due di alcune generalizzazioni delle formule di Poncelet–Levi-Civita per la *penetrazione totale* e dello studio dell'influenza dell'effetto Levi-Civita sulle formule dei *tempi di penetrazione*, e, nel terzo, di una formula di penetrazione di Resal, proponendone alcune varianti (formule di Resal-modificate, atte ad evitare un certo «paradosso del tempo infinito», provocato dalla legge di resistenza proposta da Resal), e di successive generalizzazioni di tali formule.

Nella presente Nota mi occupo, invece, dell'influenza dell'effetto Levi-Civita sulle formule della *velocità residua*, ossia della velocità v del proiettile nel mezzo, espressa in funzione della *penetrazione* x (oltre che, ovviamente, della

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 21-XI-1983.
(1) Diremo, qui e nel seguito, *velocità* anziché *modulo della velocità*.
(2) Cfr. $[\mathbf{7}]_1$, pp. 1149-1150; $[\mathbf{15}]_2$, pp. 459-462.

velocità di impatto e di alcuni coefficienti numerici dipendenti dal sistema proiettile-mezzo). Estendo quindi a tali formule le generalizzazioni analoghe a quelle sopra accennate, con particolare riferimento alle generalizzazioni delle formule di Poncelet–Levi-Civita, e stabilisco alcuni semplici confronti fra le formule trovate e le formule classiche; accenno inoltre alle formule che legano la velocità residua v, anziché alla penetrazione x, al tempo di penetrazione t; concludo con un esempio.

2 - Le formule della velocità residua nel caso delle leggi di resistenza di Poncelet e di Resal-modificate

La classica formula di balistica terminale di Poncelet per la *penetrazione totale* X di un proiettile in un mezzo solido, ossia la formula ([3])

$$X = h \log (1 + \beta v_0^2) \tag{2.1}$$

(dove v_0 è la velocità di impatto e h e β sono due costanti positive dipendenti dal proiettile e dal mezzo), si ottiene assumendo per la resistenza w alla penetrazione del proiettile nel mezzo la legge quadratica

$$w = \alpha S(1 + \beta v^2) \text{ (}^4\text{)} \qquad \text{(Poncelet, 1839)} \tag{2.2}$$

(dove α è una costante positiva e S è l'area della massima sezione trasversale (*sezione maestra*) del proiettile, supposto indeformabile) e risolvendo l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dv} = -\frac{v}{w}, \tag{2.3}$$

con la condizione iniziale $x(0) = X$ (e ponendo $h = 1/(2\alpha\beta S)$). Semplici calcoli danno per la penetrazione x l'espressione

$$x = h \log \frac{1 + \beta v_0^2}{1 + \beta v^2}. \tag{2.4}$$

([3]) Cfr. **[10]**; [7]$_2$, p. 505; **[14]**, p. 16; **[15]**$_2$, p. 461. La (2.1) è pure riportata in tutti i trattati e le monografie di Balistica esterna elencati nella bibliografia.

([4]) Cfr. loc. cit. in ([3]).

Dalla (2.4) si ottiene, risolvendo rispetto a v,

$$v = [(\frac{1}{\beta} + v_0^2) \exp(-\frac{x}{h}) - \frac{1}{\beta}]^{1/2} \tag{2.5}$$

(*formula della velocità residua di Poncelet*).

Analogamente si può procedere con l'assumere per la resistenza w le espressioni di Resal-modificate [circa l'aggiunta del vocabolo « modificate » si veda la Nota [**15**]$_4$, dove erano state proposte, in sostituzione della legge di resistenza di Resal (5)

$$w = S(c_1 v + c_2 v^2) \qquad \text{(Resal, 1895)}\,, \tag{2.6}$$

le seguenti varianti, atte ad evitare, come si è già accennato, il « paradosso del tempo infinito » al quale tale legge dava luogo (6)]

$$w = S(c_1 v^\alpha + c_2 v^2)\,, \qquad w = Sv^\alpha(c_1 + c_2 v) \qquad (0 < \alpha < 1)\,. \tag{2.7}$$

Di queste ci limiteremo a considerare, per semplicità (e per dare qui un breve cenno), la prima nel caso particolare $\alpha = \frac{1}{2}$, ossia nella forma w_1 seguente

$$w_1 = S(c_1\sqrt{v} + c_2 v^2)\,. \tag{2.8}$$

Risolvendo la (2.3), con w_1 al posto di w, si ottiene dapprima per la penetrazione x l'espressione

$$x = \frac{2}{3}\, m \log\frac{1 + n v_0^{3/2}}{1 + n v^{3/2}} \qquad (m = 1/(2S),\, n = c_2/c_1)\,, \tag{2.9}$$

da cui risulta

$$v = [(\frac{1}{n} + v_0^{3/2}) \exp(-\frac{3x}{2m}) - \frac{1}{n}]^{2/3} \tag{2.10}$$

(*formula della velocità residua di Resal-modificata*, analoga, dal punto di vista qualitativo, alla (2.5) di Poncelet).

---

(5) Cfr. [**11**].

(6) Cfr. [**15**]$_4$. Osserviamo che nelle (2.7), ovviamente, l'esponente α non ha lo stesso significato che aveva nella (2.2).

3 - Le formule della velocità residua nel caso dell'effetto Levi-Civita di deformazione impulsiva

Quando si tenga conto dell'effetto Levi-Civita di deformazione impulsiva (ossia quando il proiettile non venga più supposto indeformabile), l'espressione di w che generalizza quella di Poncelet è la seguente (7)

$$w = \alpha S(1 + kv_0)(1 + \beta v^2) \qquad \text{(Levi-Civita, 1906)}\,, \tag{3.1}$$

dove $k > 0$ è il *coefficiente di deformazione impulsiva* subita dal proiettile nell'impatto col mezzo [introdotto dal Levi-Civita per dare spiegazione, mediante la teoria dell'Elasticità, di un apparente paradosso secondo il quale all'aumentare della velocità di impatto v_0 oltre un certo limite (*velocità critica di impatto*, dipendente dal sistema proiettile-mezzo) la penetrazione totale X, anziché continuare ad aumentare, come risulterebbe dalla (2.1) di Poncelet (dove X è crescente al crescere di v_0), iniziava a diminuire].

L'equazione differenziale (2.3), integrata stavolta fra cv_0 e v (anziché fra v_0 e v, ossia con la condizione iniziale $v(0) = cv_0$, in sostituzione della $v(0) = v_0$), dove c è il *coefficiente di restituzione*, che dipende dalla natura dei due corpi che si urtano (ma non da v_0) (8), fornisce per la penetrazione x l'espressione

$$x = \frac{h}{1 + kv_0} \log \frac{1 + \beta c^2 v_0^2}{1 + \beta v^2} \tag{3.2}$$

(che, per $v = 0$, dà la *penetrazione totale di Poncelet–Levi-Civita*, ottenuta sostituendo nella (2.1) v_0 con cv_0 e dividendone il secondo membro per $1 + kv_0$: questo divisore fa sí che tale penetrazione totale ammetta un massimo, in corrispondenza ad una certa velocità critica v_0^* di impatto, oltre la quale diminuisce (9)). Risolvendo la (3.2) rispetto a v, si ottiene

$$v = [(\frac{1}{\beta} + c^2 v_0^2) \exp\,(-\frac{(1 + kv_0)x}{h}) - \frac{1}{\beta}]^{1/2} \tag{3.3}$$

---

(7) Cfr. [**7**]$_{1,2}$; [**8**], p. 54; [**15**]$_{2,3}$. In tempi recenti questo contributo del Levi-Civita, che si trovava raramente citato (cfr. [**2**], p. 332; [**3**]$_2$, p. 458), è stato ricordato da E. Volterra [**16**], quale soluzione di un elegante problema tecnico, e da G. Fichera [**5**], quale contributo del Levi-Civita alla teoria matematica dell'Elasticità.

(8) Cfr. [**7**]$_2$, p. 506; [**8**], p. 53.

(9) Cfr. [**7**]$_2$, p. 508; [**8**], p. 56; [**15**]$_2$, p. 461; [**15**]$_3$, p. 856.

(*formula della velocità residua di Poncelet–Levi-Civita*, la quale per $k=0$, $c=1$ ([10]) si riduce alla (2.5) di Poncelet). Osserviamo subito che il confronto fra le velocità residue (3.3) e (2.5) mostra evidentemente che, *a parità di penetrazione* x (e, ovviamente, a parità del sistema proiettile-mezzo e della velocità di impatto v_0), la prima dà un valore minore della seconda [il che è anche intuitivo quando si tenga conto che una deformazione impulsiva (ossia un aumento della sezione maestra S) provoca, a parità di penetrazione, (un maggiore «rallentamento», ossia) una minore velocità residua].

Accenniamo ora, analogamente, al caso dell'applicazione dell'effetto Levi-Civita alle formule di Resal-modificate, limitandoci a considerare la generalizzazione della sola (2.8), ossia la seguente forma w_2 per la resistenza

$$w_2 = S(1 + kv_0)(c_1\sqrt{x} + c_2x^2)\,. \tag{3.4}$$

La (2.3), anche qui integrata fra cv_0 e v, fornisce per x l'espressione

$$x = \frac{2m}{3(1 + kv_0)} \log \frac{1 + n(cv_0)^{3/2}}{1 + nv^{3/2}}\,, \tag{3.5}$$

da cui si ottiene

$$v = \Big[\Big(\frac{1}{n} + (cv_0)^{3/2}\Big) \exp \Big(-\frac{3(1 + kv_0)\,x}{2m}\Big) - \frac{1}{n}\Big]^{2/3} \tag{3.6}$$

(*formula della velocità residua di Resal - modificata — Levi-Civita*, che per $k=0$, $c=1$ si riduce alla (2.10)). Vale anche qui, ovviamente, circa il confronto fra la (3.6) e la (2.10) la stessa conclusione ottenuta dal confronto fra la (3.3) e la (2.5).

4 - Una prima generalizzazione: il caso lineare per la funzione di deformazione progressiva

In **[15]**$_2$ abbiamo preso in considerazione per la resistenza w una forma del tipo

$$w = \alpha S(1 + kv_0)(1 + \beta v^2)\sigma(x, \lambda)\,, \tag{4.1}$$

([10]) Circa l'assumere, *formalmente*, il valore $c = 1$, si veda quanto è detto in **[15]**$_4$, p. 484; si veda anche la successiva annotazione ([18]).

con $\sigma(x, \lambda) \geqq 1$ funzione continua e crescente della x, dove $\lambda > 0$ è il *coefficiente di deformazione progressiva* del proiettile nel mezzo (e che dipende, come k, dal sistema proiettile-mezzo); tale funzione è stata chiamata *funzione di deformazione progressiva*. Assumendo $\sigma(x, 0) \equiv 1$ (ossia nel caso in cui si abbia unicamente effetto Levi-Civita di deformazione impulsiva, messa in risalto dal coefficiente $k > 0$) la (4.1) si riduce alla (3.1) di Levi-Civita [la quale poi, per $k = 0$ si riduce alla (2.2) di Poncelet, che, a sua volta, per $\beta = 0$, si riduce alla classica forma $w = \alpha S (= \text{costante})$, considerata da Eulero (1753) e valida entro limiti assai modesti di velocità di impatto (11)].

Per $\sigma(x, \lambda)$ abbiamo considerato, in [**15**]$_2$, svariati casi; ci limiteremo a riprendere qui i seguenti quattro casi (12), che sono particolarmente espressivi:

$$\sigma_1(x, \lambda) = 1 + \lambda x \qquad \text{(caso lineare)}\,, \tag{4.2}$$

$$\sigma_2(x, \lambda) = \exp \lambda x \qquad \text{(caso esponenziale)}\,, \tag{4.3}$$

$$\sigma_3(x, \lambda) = 1 + \lambda x^2 \qquad \text{(caso quadratico, a derivata iniziale nulla)}\,, \tag{4.4}$$

$$\sigma_4(x, \lambda) = \cosh\left(\sqrt{2\lambda}x\right) \qquad \text{(caso del coseno iperbolico)}\,. \tag{4.5}$$

Nel caso lineare, l'integrazione della (2.3) fornisce

$$x + \frac{\lambda}{2} x^2 = \frac{h}{1 + kv_0} \log \frac{1 + \beta c^2 v_0^2}{1 + \beta v^2}\,, \tag{4.6}$$

da cui, indicando con x_1 l'unica radice positiva dell'equazione (4.6), risulta

$$x_1 = \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2h\lambda}{1 + kv_0} \log \frac{1 + \beta c^2 v_0^2}{1 + \beta v^2}} - 1 \right\}\,; \tag{4.7}$$

osserviamo che, esprimendo x_1 in funzione della x data dalla (3.2), si ottiene dalla (4.7) la seguente formula

$$x_1 = \frac{1}{\lambda} \{\sqrt{1 + 2\lambda x} - 1\}\,, \tag{4.8}$$

che esprime il legame fra la penetrazione x di Poncelet–Levi-Civita e la pene-

---

(11) Sulla legge di resistenza di Eulero, e sull'espressione della penetrazione totale cui dà luogo, cfr. [**15**]$_2$, pp. 459-460, [**15**]$_6$, pp. 619-620.

(12) Per casi più generali, cfr. [**15**]$_2$, pp. 465-466 e pp. 471-472.

trazione x_1 proveniente dalla (4.1) nel caso lineare per $\sigma(x, \lambda)$; osserviamo anche che la (4.8) per $x = 0$ dà, ovviamente, $x_1 = 0$ e che la (4.6) per $\lambda = 0$ dà pure, ovviamente, la (3.2) (ciò è, d'altra parte, confermato dalla (4.8), nella nella quale passando al limite per $\lambda \to 0$ si trova $x_1 = x$).

La (4.6) fornisce per la velocità residua, che in questo caso indicheremo con v_1 anziché con v,

$$v_1 = [(\frac{1}{\beta} + c^2 v_0^2) \exp (-\frac{(1 + kv_0)(2x + \lambda x^2)}{2h}) - \frac{1}{\beta}]^{1/2} \tag{4.9}$$

(*formula della velocità residua nel caso lineare per la funzione di deformazione progressiva*).

Il facile confronto della (4.9) con la (3.3) di Poncelet–Levi-Civita conduce al risultato (per $\lambda > 0$ e a parità di valori di $x > 0$) $v_1 < v$ (come era ovvio aspettarsi, tenuto conto che l'effetto di deformazione progressiva, *a parità di penetrazione* x, «fa da freno» alla velocità residua, che risulta minore di quella relativa al solo effetto Levi-Civita di deformazione impulsiva).

Risulterebbe a questo punto facile considerare, nel caso lineare (4.2) per $\sigma(x, \lambda)$, anziché la forma (4.1) per w, la forma analoga ottenuta sostituendo il termine (2.2) di Poncelet col termine (2.8) di Resal-modificato: l'espressione che ne risulterebbe costituirebbe, ovviamente, una generalizzazione della (2.10) e, a parità di x, darebbe pure valori minori. Ci asteniamo dal riportare qui i relativi, facili, calcoli.

5 - Generalizzazioni ad altri casi per la funzione di deformazione progressiva. Osservazioni. Confronti

Nel «caso esponenziale» (4.3) per la funzione $\sigma(x, \lambda)$, la considerazione della relativa espressione per w, ottenuta dalla (4.1), conduce, coi soliti procedimenti di calcolo, alla seguente formula della velocità residua, che indicheremo con v_2,

$$v_2 = [(\frac{1}{\beta} + c^2 v_0^2) \exp (-\frac{(1 + kv_0)(\exp \lambda x - 1)}{h\lambda}) - \frac{1}{\beta}]^{1/2}. \tag{5.1}$$

Osserviamo che il confronto della (5.1) con la (4.9) e con la (3.3), quando si tenga conto che

$$(\exp \lambda x - 1)/\lambda = x + \lambda x^2/2 + \lambda^2 x^3/3! + \ldots > x + \lambda x^2/2 > x\,,$$

conduce al risultato $v_2 < v_1 < v$.

Nel « caso quadratico » (4.4) si trova, indicando con v_3 la relativa relocità residua,

$$v_3 = [(\frac{1}{\beta} + c^2 v_0^2) \exp(-\frac{(1 + kv_0)(x + \lambda x^3/3)}{h}) - \frac{1}{\beta}]^{1/2}. \tag{5.2}$$

Il confronto della (5.2) con la (3.3) mostra che risulta, ovviamente, $v_3 < v$. Non presenta invece interesse il confronto della (5.2) (caso a derivata iniziale nulla per $\sigma(x, \lambda)$) con le (4.9) e (5.1) (casi a derivata iniziale positiva) ([13]).

Nel « caso del coseno iperbolico » (4.5) si trova infine, indicando con v_4 la relativa velocità residua

$$v_4 = [(\frac{1}{\beta} + c^2 v_0^2) \exp(-\frac{(1 + kv_0)\,\mathrm{senh}(\sqrt{2\lambda}\, x)}{h\sqrt{2\lambda}}) - \frac{1}{\beta}]^{1/2}. \tag{5.3}$$

Avendosi, nel caso (4.5) (che è pure un caso a derivata iniziale nulla),

$$\sigma_4(x, \lambda) = 1 + \lambda x^2 + \frac{(2\lambda)^2}{4!} x^4 + \ldots = \sigma_3(x, \lambda) + o(\lambda^2) \qquad (\text{per } \lambda \to 0)\,, \tag{5.4}$$

è facile constatare (ciò è reso, ad esempio, subito « visivo » da una integrazione per serie della (5.4) e dal confronto con la (5.2)) che risulta $v_4 < v_3$.

6 - Cenno alla velocità residua come funzione del tempo di penetrazione

Ricordiamo ([14]) che la formula per il *tempo di penetrazione* t si ottiene dall'equazione differenziale

$$\frac{dv}{dt} = -w\,, \tag{6.1}$$

con la condizione iniziale $v(0) = v_0$; risulta, nel caso della legge di resistenza (2.2) di Poncelet,

$$t = 2h\sqrt{\beta}[\mathrm{arctg}(\sqrt{\beta}v_0) - \mathrm{arctg}(\sqrt{\beta}v)]\,, \tag{6.2}$$

([13]) Si veda a questo proposito, anche sul « diverso significato » di λ nei due casi (a derivata iniziale nulla, o positiva), quanto è stato detto in [**15**]$_2$, p. 471, ed il relativo esempio (p. 471, annotazione ([20])).

([14]) Cfr., ad es., [**15**]$_3$, p. 857.

dalla quale per $v = 0$ si ha la formula classica per il *tempo di penetrazione totale* T di Poncelet

$$T = 2h\sqrt{\beta}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}v_0)\,. \tag{6.3}$$

Per la velocità residua v, espressa in funzione del tempo di penetrazione t, si ottiene

$$v = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\,\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}v_0) - \frac{t}{2h\sqrt{\beta}}) \tag{6.4}$$

(*formula della velocità residua, in funzione di t, di Poncelet*).

Qualora volessimo, invece, ricavare il tempo di penetrazione dalla legge di resistenza di Resal-modificata (2.8), si avrebbe una formula assai complicata (dalla presenza di logaritmi e di arcotangenti) (15), che non permetterebbe di dedurre $v = v(t)$. Osserviamo che, nel «caso Resal-modificato», sarebbe assai più semplice, per poter ricavare v in funzione di t, considerare, per $\alpha = \frac{1}{2}$, anziché la prima delle (2.7) la seconda, ossia

$$w = S\sqrt{v}\,(c_1 + c_2 v)\,, \tag{6.5}$$

che, sostituita nella (6.1), fornisce per t l'espressione (16)

$$t = 2m\sqrt{n}\,(\mathrm{arctg}\sqrt{nv_0} - \mathrm{arctg}\sqrt{nv}) \tag{6.6}$$

(che è, invece, dal punto di vista qualitativo, del tipo (6.2) di Poncelet), dalla quale risulta

$$v = [\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\,\sqrt{nv_0} - \frac{t}{2m\sqrt{n}})]^2 \tag{6.7}$$

(*formula della velocità residua, in funzione di t, di Resal-modificata*, proveniente dalla legge di resistenza (6.5) anziché dalla legge (2.8), dalla quale risultava la (2.10) per $v = v(x)$).

Quando si tenga anche conto dell'effetto Levi-Civita, ossia della (3.1), nel secondo membro della (6.2) di Poncelet si deve sostituire v_0 con cv_0 e dividere

---

(15) Cfr. [**15**]$_4$, p. 477, formula $(3.2)_1$.
(16) Cfr. [**15**]$_4$, p. 477, formula $(3.2)_2$.

poi tale secondo membro per $1 + kv_0$, sicché si ottiene

$$(6.8) \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(c\sqrt{\beta}\, v_0) - \frac{(1 + kv_0)t}{2h\sqrt{\beta}}\right)$$

(*formula della velocità residua, in funzione di t, di Poncelet–Levi-Civita*, la quale per $k = 0$, $c = 1$ si riduce alla (6.4) di Poncelet). Anche qui vale la semplice osservazione che il confronto fra le (6.8) e (6.4) mostra che *a parità di tempo di penetrazione t* (e, ovviamente, degli altri parametri che figurano nelle due formule), la prima dà un valore minore della seconda (il che è, d'altronde, ovvio poiché *parità di tempo di penetrazione t* significa anche *parità di penetrazione x*).

Analogamente, nel caso della legge di Resal modificata (6.5), l'effetto Levi-Civita produce sulla (6.6) la divisione del secondo membro per $1 + kv_0$ e la sostituzione di cv_0 a v_0, per cui risulta

$$(6.9) \qquad v = \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{cnv_0} - \frac{(1 + kv_0)t}{2m\sqrt{n}}\right)\right]^2$$

(*formula della velocità residua, in funzione di t, di Resal-modificata–Levi-Civita*, che per $k = 0$, $c = 1$ si riduce alla (6.7) di Resal-modificata). Il confronto (6.9)-(6.7) mostra che, a parità di t, la (6.9) dà un valore minore della (6.7).

Se si volesse, inoltre, tener conto, oltre all'effetto Levi-Civita di deformazione impulsiva, anche dell'*effetto di deformazione progressiva*, converrebbe introdurre, al posto della funzione $\sigma(x, \lambda)$, funzione della *penetrazione x*, una analoga *funzione di deformazione progressiva* $\omega(t, \mu)$, *funzione del tempo di penetrazione t* [$\omega(t, \mu) \geqq 1$, funzione continua e crescente di t; $\mu > 0$, da chiamare ancora *coefficiente di deformazione progressiva* (in questo caso « al procedere del tempo », anziché « al procedere della penetrazione », come era per λ); l'assumere $\omega(t, 0) \equiv 1$ farebbe poi ricadere nel caso Levi-Civita, di pura deformazione impulsiva].

Per la funzione $\omega(t, \mu)$ si potrebbero, come per la $\sigma(x, \lambda)$, considerare varie leggi, ad esempio espressioni del tipo (4.2), ..., (4.5) (o casi più generali trattati in [**15**]$_2$ per $\sigma(x, \lambda)$), e considerare, successivamente, la legge di resistenza, analoga alla (4.1),

$$(6.10) \qquad w = \alpha S(1 + kv_0)(1 + \beta v^2)\omega(t, \mu),$$

che generalizza, come la (4.1), le varie leggi di Eulero (già qui ricordata: $w = \alpha S$), di Poncelet, di Poncelet–Levi-Civita. Anziché la (6.10) si potrebbe considerare l'analoga generalizzazione ottenuta sostituendovi il termine (2.2) di Poncelet con un termine di Resal-modificato (ad esempio col termine (6.5) sopra considerato).

Ci limiteremo qui ad accennare al solo « caso lineare »

$$\omega(t, \mu) = 1 + \mu t . \tag{6.11}$$

Osserviamo che, in modo analogo a quanto è stato fatto in [**15**]$_2$, pp. 466-467, per la trattazione del caso lineare $\sigma_1(x, \lambda) = 1 + \lambda x$, si troverebbe facilmente, nel caso (6.11), per il *tempo di penetrazione totale*, che indicheremo con $T_{k,\mu}$, l'espressione

$$T_{k,\mu} = \frac{1}{\mu} \{\sqrt{1 + 2\mu T_k} - 1\} , \tag{6.12}$$

dove T_k è il tempo di penetrazione totale proveniente dalla (3.1) e la cui espressione è (cfr. [**15**]$_3$, p. 858)

$$T_k = \frac{2h\sqrt{\beta}}{1 + kv_0} \operatorname{arctg}(c\sqrt{\beta}\, v_0) , \tag{6.13}$$

che per $k = 0$, $c = 1$ si riduce alla (6.3) di Poncelet. Osserviamo anche che i due coefficienti λ, μ sono legati dal fatto che alla penetrazione totale $X_{k,\lambda}$, relativa al caso lineare (4.2), corrisponde il tempo di penetrazione totale $T_{k,\mu}$, attraverso la relativa eguaglianza delle corrispondenti sezioni maestre, ossia (con ovvio significato dei simboli) $S_{k,\lambda} = S_{k,\mu}$: ciò conduce al risultato $\mu : \lambda = X_{k,\lambda} : T_{k,\mu}$. Inoltre μ e $T_{k,\mu}$ sono soluzione del sistema

$$T_{k,\mu} + \mu T_{k,\mu}^2/2 = T_k , \qquad S_k(1 + \mu T_{k,\mu}) = S_{k,\lambda} , \tag{6.14}$$

dove $S_k = S(1 + kv_0)$ (17). È interessante osservare, infine, che risulta, indicando con X_k la penetrazione totale ottenuta dalla (3.2) per $v = 0$,

$$X : T = X_k : T_k = X_{k,\lambda} : T_{k,\mu} , \tag{6.15}$$

in cui l'uguaglianza di sinistra è ovvia e quella di destra si prova facilmente tenendo conto che (cfr. [**15**]$_2$, p. 467)

$$X_{k,\lambda} = \frac{1}{\lambda} \{\sqrt{1 + 2\lambda X_k} - 1\} , \tag{6.16}$$

e dividendo membro a membro (6.16) e (6.12).

---

(17) Per la prima equazione del sistema (6.14) si veda l'analogia, sopra citata, con quanto è in [**15**]$_2$, p. 467, formula (2.12)'.

Per ricavare la velocità residua nel caso lineare (6.11), sostituendo nella (6.10), dalla (6.1) si ottiene

$$v = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(c\sqrt{\beta}\, v_0\right) - \frac{(1 + kv_0)(2t + \mu t^2)}{4h\sqrt{\beta}}\right) \tag{6.17}$$

(*formula della velocità residua, in funzione di t, generalizzazione, al caso lineare per* $\omega(t, \mu)$, *della* (6.8) *di Poncelet–Levi-Civita*, rispetto alla quale, a parità di $t > 0$, dà valori maggiori ed alla quale si riduce per $\mu = 0$).

È ovvio che, nelle generalizzazioni sopra accennate (sia del caso Poncelet–Levi-Civita, sia dei casi Resal-modificati–Levi-Civita), è possibile solo in particolari casi (ad esempio in quelli espressamente trattati) ricavare *esplicitamente* $v = v(x)$ o $v = v(t)$; in altri casi i valori di v, *implicitamente definiti*, potranno agevolmente essere calcolati coi moderni metodi e mezzi dell'Analisi numerica.

7 - Un esempio

A conclusione di quanto esposto in **4** e **6** sui casi lineari per $\sigma(x, \lambda)$ e per $\omega(t, \mu)$ e per le relative formule delle velocità residue (4.9) e (6.17), e di quanto richiamato per le corrispondenti formule classiche di Poncelet e di Levi-Civita, riprendiamo un esempio (già da noi appena accennato, per altro scopo, in [**15**]$_2$, p. 472) relativo alla penetrazione, in legno di abete, di un proiettile, del calibro originario di 8,2 *mm* e del peso di 12,7 *g*, con velocità di impatto $v_0 = 700\ m/s$.

Nel caso che il proiettile sia, rispettivamente, supposto indeformabile (caso Poncelet), o soggetto al solo effetto Levi-Civita di deformazione impulsiva all'impatto col mezzo (effetto che brevemente chiameremo « effetto k »), o, infine, soggetto al duplice effetto di deformazione impulsiva e progressiva (che brevemente chiameremo « effetto (k, λ) », riferendoci alla penetrazione x, o « effetto (k, μ) », riferendoci al tempo di penetrazione t), si hanno per i tre valori della penetrazione totale X, X_k, $X_{k,\lambda}$ (con $h = 0{,}378$, $\beta = 2 \cdot 10^{-5}$, $c = 1$, $k = 10^{-3}$, $\lambda = 3$ ([18]))

$$X = 0{,}90\ m\,, \qquad X_k = 0{,}53\ m\,, \qquad X_{k,\lambda} = 0{,}35\ m;$$

si hanno inoltre, per le relative velocità residue, i valori, in m/s,

$$\begin{array}{lll} v(0{,}1) = 604\,, & v_k(0{,}1) = 543\,, & v_{k,\lambda}(0{,}1) = 522\,, \\ v(0{,}2) = 518\,, & v_k(0{,}2) = 412\,, & v_{k,\lambda}(0{,}2) = 343\,. \\ v(0{,}4) = 371\,, & v_k(0{,}4) = 199\,, & \\ v(0{,}6) = 246\,, & & \\ v(0{,}8) = 123\,, & & \end{array}$$

([18]) Sul significato ed i valori numerici di h e di β si veda, ad esempio [**3**]$_2$, pp. 458-459; [**6**], vol. I, pp. 353-355. Circa l'assumere $c = 1$, ricordiamo che lo stesso Levi-Civita faceva ciò in [**7**]$_1$, assumendo per la costante β — da lui scritta al posto di βc^2 nella (3.2) (e nell'espressione di X_k, che da essa si ottiene per $v = 0$) — i valori tabulati dal Siacci in [**13**], nella cui valutazione *sperimentale* si teneva anche, automaticamente, conto del coefficiente di restituzione c.

Per i tre tempi di penetrazione totale T, T_k, $T_{k,\lambda}$ si hanno, rispettivamente, i valori (con $\mu = 640{,}24$, calcolato in corrispondenza a $\lambda = 3$, come si è precisato in **6**)

$$T = 4{,}3\cdot 10^{-3} s\,, \qquad T_k = 2{,}5\cdot 10^{-3}\, s\,, \qquad T_{k,\mu} = 1{,}64\cdot 10^{-3}\, s\,,$$

e per le relative velocità residue, in m/s,

$$\begin{array}{lll} v(0{,}5\cdot 10^{-3}) = 455\,, & v_k(0{,}5\cdot 10^{-3}) = 356\,, & v_{k,\mu}(0{,}5\cdot 10^{-3}) = 326\,, \\ v(10^{-3}) = 323\,, & v_k(10^{-3}) = 212\,, & v_{k,\mu}(10^{-3}) = 152\,. \\ v(2\cdot 10^{-3}) = 177\,, & v_k(2\cdot 10^{-3}) = 59\,, & \\ v(3\cdot 10^{-3}) = 88\,, & & \\ v(4\cdot 10^{-3}) = 18\,, & & \end{array}$$

Con questi valori numerici sarebbe facile tracciare i sei diagrammi relativi alle tre velocità residue in funzione di x e alle altre tre in funzione di t: ci asteniamo, per brevità, dal riportare qui tali interessanti ed espressivi diagrammi.

Per quanto riguarda, infine, le relative sezioni maestre S, S_k, $S_{k,\lambda} = S_{k,\mu}$ del proiettile, si hanno i valori, in mm^2,

$$S = \pi\cdot 4{,}1^2 = 52{,}81\,, \quad S_k = 89{,}78 = \pi\cdot 5{,}3^2\,, \quad S_{k,\lambda} = S_k(1 + \lambda X_{k,\lambda}) = 184{,}05 = \pi\cdot 7{,}65^2.$$

Pertanto, nell'esempio considerato, il calibro del proiettile, originariamente di 8,2 mm, per « effetto k » viene portato a 10,6 mm (con un aumento del 29%), mentre per « effetto (k, λ) » [o per « effetto (k, μ) »] viene portato a 15,30 mm (con un aumento dell'87% rispetto al calibro iniziale).

Bibliografia

[1] G. Boffa, *Balistica esterna razionale*, S.M.E., Roma 1967.

[2] G. Bruno, *Balistica esterna*, vol I (*Balistica razionale*), Roggero e Tortia, Torino 1934.

[3] C. Cranz: [•]$_1$ *Ballistik*, Enc. der Math. Wiss., Bd. IV, **3**, Heft 2 (1903), 185-279; [•]$_2$ *Lehrbuch der Ballistik*, Bd. I, Julius Springer, Berlin 1925.

[4] C. Cranz et E. Vallier, *Balistique extérieure*, Enc. des Sc. Math., t. IV, **6**, fasc. 1 (1913), 1-105.

[5] G. Fichera, *Il contributo italiano alla teoria matematica dell'Elasticità*, Rend. Circ. Mat. Palermo **28** (1979), 5-26.

[6] F. Galanzino, *Balistica esterna*, vol. I, II, III, Libr. Stato, Roma 1943-1956.

[7] T. Levi-Civita: [•]$_1$ *Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi*, Ist. Veneto Sci. Lett. Arti Atti Cl. Sci. Mat. Natur. **65**, parte II (1906), 1149-1158; (lo stesso lavoro si trova in [•]$_2$ *Opere matematiche*, vol. II (1901-1907), Zanichelli, Bologna 1956, pp. 505-513).

[8] T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Nozioni di Balistica esterna*, Zanichelli, Bologna 1935.

[9] H. Molitz und R. Strobel, *Äussere Ballistik*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

[10] J. V. Poncelet, *Introduction à la Mécanique industrielle*, Bruxelles 1839.

[11] H. Resal, *Sur la pénétration d'un projectile dans les semi-fluides et les solides*, C. R. Acad. Sci. Paris **120** (1895), 397-401.

[12] K. Sellier, *Schusswaffen und Schusswirkungen*, Bd. I, 2. Aufl. (1982), Bd. II (1977), Schmidt-Römhild, Lübeck.

[13] F. Siacci, *Balistica*, 2ª ediz., Casanova, Torino 1888.

[14] R. Sutterlin, *Les projectiles*, Mémor. Artill. Franç. **41**, 1er fasc. (1967), 13-76.

[15] L. Tanzi Cattabianchi: $[\cdot]_1$ *I contributi di Mauro Picone alla Balistica razionale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 357-389; $[\cdot]_2$ *Su alcune generalizzazioni di una formula di Levi-Civita per deformazioni impulsive*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 459-474; $[\cdot]_3$ *Influenza dell'effetto Levi-Civita sulle formule dei tempi: un teorema di confronto*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 855-860; $[\cdot]_4$ *Su alcune varianti e generalizzazioni di una formula di balistica terminale di Resal*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 469-484; $[\cdot]_5$ *I contributi di Guido Fubini e di Francesco Severi ad alcuni problemi di balistica esterna*, Supplem. vol. **115**, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (1981), 217-233; $[\cdot]_6$ *Generalizzazioni di una formula di Levi-Civita sulla penetrazione dei proiettili deformabili*, Atti Conv. Balistica Forense, Montagnoli Edit., Roma (1982), 619-625.

[16] E. Volterra, *Contributi di Tullio Levi-Civita nel campo dell'Ingegneria*, Atti Conv. Lincei **8** (1975), 197-203.

Summary

We are presenting some generalizations of classical formulae of residual velocity by Poncelet, Resal, Levi-Civita, in terminal ballistics. A «coefficient of progressive deformation» is taken into account, under various stipulations, besides a «coefficient of impulsive deformation» (introduced by Levi-Civita).

* * *