Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 351-357

Silvana Marchi e Corrado Risito (*)

Generalizzazione del teorema di Markov sulla stabilità forte (**)

A Luigi Caprioli per il suo 70° compleanno

1 - Introduzione

Il concetto di stabilità forte è stato definito da Markov nel seguente modo [**6**]: una funzione $x: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ si dice *fortemente stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che

$$(1) \qquad \|x(\alpha) - x(\beta)\| < \delta \Rightarrow \|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon \qquad \forall t \in \boldsymbol{R},$$

dove α e β sono due qualsiasi numeri reali. La sua importanza è dovuta al teorema di Markov [**6**]: *se la funzione* $x: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ *è continua, limitata e fortemente stabile, allora* $x(t)$ *è quasi periodica.*

In un precedente lavoro [**7**], uno degli autori ha definito un tipo di stabilità più debole, nel quale si richiede che la condizione (1) valga *soltanto* per i multipli interi di un numero reale $T \neq 0$ (cioè per $\alpha = nT$, $\beta = mT$, dove $n, m \in \boldsymbol{Z}$, insieme degli interi relativi, e T è indipendente sia da ε sia da n, m): precisamente, si dice che $x: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ è *T-stabile nel passato e nel futuro* (cfr. la Def. 1 di [**7**]) se si ha

$$(2) \qquad \begin{gathered} (\exists T \neq 0)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \big(\forall n, m \in \boldsymbol{Z}: \|x(nT) - x(mT)\| < \delta\big)\ (\forall t \in \boldsymbol{R}) \\ \|x(t+nT) - x(t+mT)\| < \varepsilon , \end{gathered}$$

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 24-X-1983.

ed ha stabilito il seguente teorema (Teor. 1 di [7]): *se la funzione* $x: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ *è uniformemente continua, limitata e* T*-stabile nel passato e nel futuro, allora* $x(t)$ *è quasi periodica.* Questo teorema non generalizza però il teorema di Markov, a causa dell'ipotesi di *uniforme* continuità (utilizzata per dimostrare che $x(t)$ è quasi periodica secondo Bochner).

Il Teorema 1 del presente lavoro generalizza quest'ultimo risultato (e naturalmente anche il teorema di Markov), eliminando l'ipotesi di *uniforme* continuità e sostituendo la condizione (2) con una più debole, la σ-stabilità, così definita: la funzione $x(t)$ si dice *σ-stabile* se esiste una successione $\sigma = \{s_n\}$ di numeri reali, relativamente densa in $\boldsymbol{R}$, tale che si abbia

$$(3)\qquad \begin{gathered}(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall n, m \in \boldsymbol{N}\colon \|x(s_n) - x(s_m)\| < \delta)\ (\forall t \in \boldsymbol{R}) \\ \|x(t + s_n) - x(t + s_m)\| < \varepsilon .\end{gathered}$$

Infatti, per la particolare successione $\sigma = \{mT\}$, con $m \in \boldsymbol{Z}$, la σ-stabilità si riduce alla T-stabilità nel passato e nel futuro. Il Teorema 1 viene dimostrato mediante la costruzione, dovuta ad Amerio [1], di un insieme relativamente denso di ε-quasi periodi (che assicura la quasi periodicità secondo Bohr).

Infine, nell'ultimo paragrafo del presente lavoro, si forniscono delle condizioni sufficienti affinchè una funzione vettoriale, definita e continua in $\boldsymbol{R}^+$, sia *asintoticamente quasi periodica* secondo Fréchet [4], le quali sono basate sulla σ^+-stabilità (che è una generalizzazione della T-stabilità in futuro (cfr. la Def. 2 di [7])) o sulla σ^+-attrattività (che è una generalizzazione del concetto di «asperiodicità nel continuo in $+\infty$» (cfr. la Def. 14 di [5])).

2 - Condizioni sufficienti per la quasi periodicità

Il seguente teorema fornisce delle condizioni sufficienti per la quasi periodicità.

Teorema 1. *Sia* $x\colon \boldsymbol{R} \to X$ *una funzione continua, a valori in uno spazio di Banach* X *con norma* $\|\cdot\|$. *Se esiste una successione* $\sigma = \{s_n\}$ *di numeri reali, relativamente densa in* $\boldsymbol{R}$, *tale che si abbia*

(i) *la successione* $\{x(s_n)\}$ *è relativamente compatta in* X,

(ii) *la funzione* $x(t)$ *è* σ*-stabile, cioè soddisfa alla condizione* (3),

allora $x(t)$ *è quasi periodica.*

Seguendo Amerio ([1] - Oss. III, p. 152), si costruisce, $\forall \varepsilon > 0$, un insieme relativamente denso di ε-quasi periodi. Sia dunque assegnato $\varepsilon > 0$, e sia

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti soddisfatta la (3). Per la condizione (i), esiste un numero finito di punti: $x(s_{1,0}), \ldots, x(s_{\nu,0})$, tali che si abbia

$$x(s_n) \in \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \nu} S\big(x(s_{j,0}), \delta\big) \qquad \forall n \in \boldsymbol{N}, \tag{4}$$

avendo indicato con $S(x, \delta)$ la sfera aperta di centro x e raggio δ. Si può allora dividere $\{x(s_n)\}$ in ν sottosuccessioni $\{x(s_{j,n})\}$, $j = 1, \ldots, \nu$, tali che si abbia

$$\|x(s_{j,n}) - x(s_{j,0})\| < \delta \qquad \forall j = 1, \ldots, \nu, \ \forall n \in \boldsymbol{N}. \tag{5}$$

Dalla (5), tenendo conto della condizione (ii) di σ-stabilità, si ottiene

$$\|x(t + s_{j,n}) - x(t + s_{j,0})\| < \varepsilon \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}, \ \forall j = 1, \ldots, \nu, \ \forall n \in \boldsymbol{N}, \tag{6}$$

da cui si riconosce che ogni $\tau_{j,n} := s_{j,n} - s_{j,0}$ è un ε-quasi periodo. Per la dimostrazione che la successione $\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \{\tau_{j,n}\}$ è relativamente densa, si rimanda al lavoro citato [**1**].

Osservazione 1.

(I) Il Teorema 1 generalizza il criterio X del libro di Amerio-Prouse ([**2**], p. 10), innanzi tutto perchè non si suppone la limitatezza della $x(t)$ (si osservi che neppure la continuità è essenziale ai fini della dimostrazione del Teorema 1), ed inoltre perchè la condizione (2.10) del suddetto criterio X (che sembra sia dovuta a Bochner [**3**]) è più forte della σ-stabilità.

(II) Se X è uno spazio euclideo a dimensione finita ($X = \boldsymbol{R}^n$), allora la condizione (i) diventa: *la successione* $\{x(s_n)\}$ *è limitata*, e in tal caso il Teorema 1 generalizza sia il teorema di Markov sia il Teor. 1 di [**7**], citati nell'introduzione. Si osservi infine che se la funzione $x: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ è continua e *limitata*, allora per la quasi periodicità è sufficiente una condizione ancora più debole della σ-stabilità, cioè la successione relativamente densa $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ può variare con ε (se ci si limita per semplicità alla T-stabilità nel passato e nel futuro, la definizione più generale si ottiene dalla (2) scambiando l'ordine dei primi due quantificatori: $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists T \neq 0) \ldots$, e quindi T dipende da ε).

3 - Condizioni sufficienti per l'asintotica quasi periodicità

Nel presente paragrafo si forniscono delle condizioni sufficienti affinchè una funzione $x: \boldsymbol{R}^+ \to X$, definita e continua in $\boldsymbol{R}^+$ e a valori in uno spazio di Banach X con norma $\|\cdot\|$, sia *asintoticamente quasi periodica* secondo Fréchet [**4**](1), cioè sia la somma di una funzione quasi periodica $p(t)$, definita e continua in $\boldsymbol{R}$, e di una funzione $q(t)$, definita e continua in $\boldsymbol{R}^+$, infinitesima per $t \to \infty$

$$x(t) = p(t) + q(t) \qquad \forall t \geqslant 0 \; . \tag{7}$$

Si ha innanzi tutto il seguente

Teorema 2. *Sia $x\colon \boldsymbol{R}^+ \to X$ una funzione continua, a valori in uno spazio di Banach X con norma $\|\cdot\|$. Se esiste una successione $\sigma^+ = \{s_n\}$ di numeri reali positivi, relativamente densa in $\boldsymbol{R}^+$, tale che si abbia*

(i) *la successione $\{x(s_n)\}$ è relativamente compatta in X,*

(ii) *la funzione $x(t)$ è σ^+-stabile, cioè soddisfa alla seguente condizione*

$$\begin{gathered}(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall n, m \in \boldsymbol{N}\colon \|x(s_n) - x(s_m)\| < \delta)\ (\forall t \geqslant 0) \\ \|x(t + s_n) - x(t + s_m)\| < \varepsilon \; ,\end{gathered} \tag{8}$$

allora $x(t)$ è asintoticamente quasi periodica.

Si dimostra che la funzione $x(t)$ gode della *proprietà P* (seguendo Yoshizawa [**8**], Def. 3.3, p. 22), mentre nella nota originale [**4**] viene chiamata proprietà P'), cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due numeri $l(\varepsilon) > 0$ e $T(\varepsilon) \geqslant 0$, tali che ogni intervallo di lunghezza $l(\varepsilon)$, contenuto in $\boldsymbol{R}^+$, possegga un τ tale che si abbia

$$\|x(t + \tau) - x(t)\| < \varepsilon \qquad \forall t \geqslant T(\varepsilon) \tag{9}$$

(dove $T(\varepsilon)$ *è indipendente da* τ). Sia dunque assegnato $\varepsilon > 0$, e sia $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti soddisfatta la (8). Seguendo la dimostrazione del precedente Teorema 1, si perviene alla (6), la quale è valida però *soltanto* per $t \geqslant 0$. Posto

$$T(\varepsilon) := \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \{s_{j,0}\} \; , \qquad l(\varepsilon) := d + T(\varepsilon) \; , \tag{10}$$

dove $d > 0$ è la lunghezza di inclusione della successione $\{s_n\}$, sia $[a, a + l(\varepsilon)]$, con $a \geqslant 0$, un qualsiasi intervallo di $\boldsymbol{R}^+$. Si consideri l'intervallo $[a + T(\varepsilon),$

(1) Fréchet ha sviluppato la teoria delle funzioni asintoticamente quasi periodiche per le funzioni a valori in $\boldsymbol{R}^n$. Tuttavia è immediata l'estensione della teoria alle funzioni vettoriali a valori in uno spazio di Banach.

$a + T(\varepsilon) + d]$, e sia $s_{j,n}$ un elemento della successione $\{s_n\}$ appartenente al suddetto intervallo. Ricordando la (5), si ponga $\tau := s_{j,n} - s_{j,0}$. Il numero τ appartiene all'intervallo $[a, a + l(\varepsilon)]$. Rimane da dimostrare che la (9) risulta soddisfatta. Infatti, col cambiamento di variabile: $t \to t' = t + s_{j,0}$, dalla (6) (valida $\forall t \geqslant 0$) si ottiene

$$\|x(t' + \tau) - x(t')\| < \varepsilon \qquad \forall t' \geqslant T(\varepsilon)\,, \tag{11}$$

e quindi la funzione $x(t)$ gode della *proprietà* P, la quale a sua volta assicura che $x(t)$ è asintoticamente quasi periodica (cfr. ad es. [**8**] - Teor. 3.9, p. 27, dove la continuità della funzione gioca un ruolo essenziale).

Per $X = \boldsymbol{R}^n$, il Teorema 2 generalizza il Teor. 2 di [**7**], perchè la T-stabilità in futuro (cfr. la Def. 2 di [**7**]) non è altro che la σ^+-stabilità per la particolare successione $\sigma^+ = \{nT\}$, con $T > 0$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Sussiste inoltre la medesima osservazione fatta per il Teorema 1 (cfr. l'Osservazione 1, ultima parte di (II)).

Un altro criterio per l'asintotica quasi periodicità è basato, invece, su di una proprietà di attrattività della $x(t)$ rispetto ad un sottoinsieme di traslate. Si dice che la funzione $x: \boldsymbol{R}^+ \to X$ è *σ^+-attrattiva* se esiste una successione $\sigma^+ = \{s_n\}$ di numeri reali positivi, relativamente densa in $\boldsymbol{R}^+$, tale che si abbia

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t + s_n) - x(t)\| = 0 \qquad \textit{uniformemente}\ \forall n \in \boldsymbol{N}. \tag{12}$$

La definizione di *σ^+-attrattività* è una generalizzazione del concetto di «asperiodicità nel continuo in $+\infty$, di asperiodo $T > 0$» introdotto da Mambriani-Manfredi ([**5**], Def. 14), al quale si riduce se si prende in considerazione la particolare successione $\sigma^+ = \{nT\}$, con $T > 0$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

Sussiste il seguente

Teorema 3. *Se la funzione $x: \boldsymbol{R}^+ \to X$ è continua e σ^+-attrattiva* (cioè soddisfa alla (12), dove la successione $\sigma^+ = \{s_n\}$ è relativamente densa in $\boldsymbol{R}^+$), *allora $x(t)$ è asintoticamente quasi periodica.*

La dimostrazione è immediata, perchè basta riconoscere che la $x(t)$ gode della proprietà P. Infatti, per la (12) si ha: $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists T(\varepsilon) > 0)$ $(\forall t \geqslant T(\varepsilon))$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$ $\|x(t + s_n) - x(t)\| < \varepsilon$, e quindi, essendo per ipotesi la successione $\{s_n\}$ relativamente densa in $\boldsymbol{R}^+$ con lunghezza di inclusione $d > 0$, ogni intervallo di lunghezza d, contenuto in $\boldsymbol{R}^+$, possiede un elemento s_n della suddetta successione tale che si abbia: $\|x(t + s_n) - x(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \geqslant T(\varepsilon)$. Si osservi che $T(\varepsilon)$

è indipendente da s_n (come si richiede nella definizione della proprietà P), perchè si suppone che il limite (12) sia *uniforme rispetto a* $n \in \boldsymbol{N}$; inoltre, $\forall \varepsilon > 0$, tutti gli elementi della successione σ^+ sono degli ε-quasi periodi asintotici.

Osservazione 2.

(I) Si osservi che nel Teorema 3 non si suppone la limitatezza della funzione $x(t)$ (e neppure che la successione $\{x(s_n)\}$ sia relativamente compatta); la limitatezza della $x(t)$ è invece una conseguenza del Teorema 3, perchè la continuità e l'asintotica quasi periodicità implicano la limitatezza (cfr. ad es. [**8**], Teor. 3.6, p. 24; ma si potrebbe addirittura dimostrare, seguendo [**2**], Prop. IV, p. 5, che l'immagine della $x(t)$ è un insieme relativamente compatto in X). Questa osservazione permette di migliorare l'importante risultato di [**5**], Teor. 4: $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$, dove si suppone la limitatezza della $x(t)$. Dal Teorema 3 e dal risultato citato di [**5**], si ottiene infatti: *se la funzione* $x: \boldsymbol{R}^+ \to X$ *è continua e* σ^+*-attrattiva per la particolare successione* $\{nT\}$, *con* $T > 0$, *allora la sua parte quasi periodica* $p(t)$ *è una funzione periodica di periodo* T.

(II) Un'osservazione analoga a quella dell'ultima parte del punto (II) dell'Oss. 1, ma relativa alla σ^+-attrattività, conduce alla seguente condizione più debole: $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \sigma^+(\varepsilon) = \{s_n\}$ *relativamente densa in* $\boldsymbol{R}^+)$ $(\exists T(\varepsilon) > 0)$ $(\forall t \geqslant T(\varepsilon))$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$ $\|x(t + s_n) - x(t)\| < \varepsilon$, la quale è equivalente alla proprietà P, ed inoltre tutti gli elementi della successione $\sigma^+(\varepsilon)$ sono degli ε-quasi periodi asintotici.

Bibliografia

[1] L. Amerio, *Almost-periodic solutions of the equation of Schrödinger type* (I), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **43** (1967), 147-153.

[2] L. Amerio and G. Prouse, *Almost-periodic functions and functional equations*, Van Nostrand Reinhold Company, New York 1971.

[3] S. Bochner, *Fastperiodische Lösungen der Wellengleichung*, Acta Math. **62** (1934), 227-237.

[4] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques*, Rev. Sci. **79** (1941), 341-354.

[5] A. Mambriani e B. Manfredi, *Su le funzioni asperiodiche in* $+\infty$ (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 281-308.

[6] A. Markov, *Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität*, Math. Z. **36** (1933), 708-738.

[7] C. Risito, *On Markov stability*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 85-88.

[8] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Appl. Math. Sci. **14**, Springer-Verlag, New York 1975.

Abstract

The new concepts of σ-stability, σ^+-stability and σ^+-attractivity for vector-valued functions are introduced, which enable to give sufficient conditions for almost periodicity or asymptotic almost periodicity, generalizing, among others, the well known Markov theorem on strong stability.

* * *