Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10 (1984), 337-350

AIMÉ HUAUX (*)

Sur un système autonome du deuxième ordre (**)

A LUIGI CAPRIOLI per il suo 70° compleanno

1 - Introduction

La méthode directe de Liapunoff [15] permet, dans un certain nombre de cas, de former des conditions suffisantes de stabilité ou d'instabilité de la solution banale ou des solutions constantes d'une équation différentielle ou d'un système différentiel dont la solution générale est inconnue. Dans ce but, il faut former certaines fonctions appelées *fonctions de Liapounoff*; un procédé simple permettant de construire des fonctions de Liapounoff figure dans des travaux antérieurs (Haux $[\mathbf{10}]_{6,7,8,11}$).

Toutefois il y a lieu de rappeler un résultat oublié dû à E. Vessiot [20]: *Étant donnée l'équation différentielle*

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2p(t)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + q(t)x = 0\,, \tag{1.1}$$

on peut calculer sa solution générale par quadratures si, entre $p(t)$ *et* $q(t)$, *existe la condition nécessaire et suffisante suivante*

$$q(t) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + p^2(t) - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} - R^2(t)\,; \tag{1.2}$$

(*) Indirizzo: Institut Supérieur Industriel de Bruxelles, 22 Kasteellaan, B-1641 Alsemberg, Belgique.
(**) Ricevuto: 2-X-1983.

un système fondamental de solutions de (1.1) *est*

$$x_1(t) = \exp - \int (p - R)\, \mathrm{d}t,\ \ x_2(t) = x_1 \int \exp - 2 \int R \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Le résultat de Vessiot rend compte de la nécessité des méthodes numériques ou des procédés indirects pour étudier les équations différentielles rhéolinéaires et, a fortiori, les équations différentielles non linéaires.

2 - Sur l'équation autonome de Liénard

Soit l'équation autonome de Liénard

$$\ddot{x} + a(x)\dot{x} + \varphi(x) = 0\,. \tag{2.1}$$

Dans un intervalle (α_1, α_2), $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$, on suppose que: (a) des conditions suffisantes garantissent l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux conditions initiales de la solution générale de (2.1); (b) $a(x)$ et $\varphi(x) \in C$; (c) $\varphi(0) = 0$.

On remplace (2.1) par le système équivalent suivant de deux équations différentielles du premier ordre

$$\dot{x} = y - A(x)\,, \qquad \dot{y} = -\varphi(x)\,, \tag{2.2}$$

$$A(x) = \int_0^x a(s)\, \mathrm{d}s \qquad (\alpha_1 < s < \alpha_2)\,. \tag{2.3}$$

On travaille dans le plan de Liénard des variables (x, y). On pose aussi

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(s)\, \mathrm{d}s \qquad (\alpha_1 < s < \alpha_2)\,. \tag{2.4}$$

Premier cas: *$a(x)$ a un signe constant ou est nul.*

Soit la fonction

$$v = \frac{1}{2}(y - A(x))^2 + \frac{y^2}{2} + 2\Phi(x); \qquad \text{on calcule} \tag{2.5}$$

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{2.6}$$

à l'aide des équations différentielles (2.2); on trouve

$$\dot{v} = -a(x)(y - A(x))^2 - A(x)\varphi(x) . \tag{2.7}$$

Moyennant les hypothèses

$$a(x) > 0 , \quad x\varphi(x) > 0 \quad (x \neq 0) , \quad x \in (\beta_1, \beta_2) , \quad \alpha_1 \leqslant \beta_1 < 0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2 , \tag{2.8}$$

v est définie positive et $\dot{v}$ est définie négative; d'après un théorème de Liapounoff ([**15**], p. 261) la solution banale de (2.1) est asymptotiquement stable.

Moyennant les hypothèses

$$a(x) < 0 , \quad x\varphi(x) > 0 \quad (x \neq 0) , \quad x \in (\beta_1, \beta_2) , \quad \alpha_1 \leqslant \beta_1 < 0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2 , \tag{2.9}$$

v et $\dot{v}$ sont définies positives; d'après un théorème de Liapounoff ([**15**], p. 262), la solution banale de (2.1) est instable.

Moyennant les hypothèses

$$a(x) = 0 , \quad x\varphi(x) > 0 \quad (x \neq 0) , \quad x \in (\beta_1, \beta_2) , \quad \alpha_1 \leqslant \beta_1 < 0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2 , \tag{2.10}$$

v est définie positive et $\dot{v}$ est identiquement nulle. D'après un théorème de Liapounoff ([**15**], p. 259), la solution banale de (2.1) est faiblement stable.

Avec l'hypothèse

$$x\varphi(x) < 0 \quad (x \neq 0) , \quad x \in (\beta_1, \beta_2) , \quad \alpha_1 \leqslant \beta_1 < 0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2 , \tag{2.11}$$

soit la fonction

$$v = xy - \int_0^x A(s)\,\mathrm{d}s . \tag{2.12}$$

Compte tenu de (2.2) on trouve

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (y - A(x))^2 - x\varphi(x) . \tag{2.13}$$

Par suite de (2.11), $\dot{v}$ est définie positive tandis que v est indéfinie; d'après un théorème de Četaev [**3**], la solution banale de (2.1) est instable; remarquons que le signe de $a(x)$ est arbitraire.

Moyennant l'hypothèse

$$\varphi(x) > 0 \quad (x \neq 0) , \quad x \in (\beta_1, \beta_2) , \quad \alpha_1 \leqslant \beta_1 < 0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2 , \tag{2.14}$$

soit la fonction

$$v = xy - \int_0^x A(s)\,\mathrm{d}s - \lambda y\,, \tag{2.15}$$

où λ est une constante réelle non nulle à fixer.

On trouve, compte tenu de (2.2),

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (y - A(x))^2 + (\lambda - x)\varphi(x)\,; \tag{2.16}$$

en prenant λ suffisamment grand, c'est-à-dire λ tel que $\lambda > \mathrm{Max}\,\{|\beta_1|, \beta_2\}$, $\dot{v}$ est définie positive tandis que v est indéfinie, $x \in (\beta_1, \beta_2)$; alors, la solution banale de (2.1) est instable.

Enfin, avec l'hypothèse

$$\varphi(x) < 0 \quad (x \neq 0)\,, \quad x \in (\beta_1, \beta_2)\,, \quad \alpha_1 \leqslant \beta_1 < 0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2\,, \tag{2.17}$$

on reprend $v_{(2.15)}$ et $\dot{v}_{(2.16)}$; on choisit λ tel que

$$\lambda < \min\,\{\beta_1, -\beta_2\}\,; \tag{2.18}$$

$\dot{v}$ est de nouveau définie positive tandis que v est indéfinie. A nouveau, la solution banale de (2.1) est instable. Finalement on a le résultat suivant.

Théorème 2.1. *La solution banale de l'équation différentielle* (2.1) *est:*

(a) *asymptotiquement stable si la condition suffisante* (2.8) *est remplie;*

(b) *faiblement stable si la condition suffisante* (2.10) *est remplie;*

(c) *instable si l'une des conditions suffisantes* (2.9), (2.11) *ou* (2.14) *est remplie.*

Remarque 2.1. Avec les hypothèses (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11), la racine de l'équation $\varphi(x) = 0$ peut être multiple d'ordre impair. Avec les hypothèses (2.14) et (2.17), la racine $x = 0$ de l'équation $\varphi(x) = 0$ peut être multiple d'ordre pair.

Remarque 2.2. On peut aussi établir le Théorème (2.1) en travaillant dans le plan des phases (cf. par exemple Huaux **[10]**).

Deuxième cas: *$a(x)$ change de signe en $x = 0$.*

Le cas où $a(x)$ change de signe en $x = 0$ a été envisagé par Miss McHarg [**16**], qui a obtenu le résultat suivant par une méthode indépendante de la méthode directe de Liapounoff: *soient $a(x)$ et $\varphi(x)$ des fonctions impaires telles que $a(x) > 0$ et $\varphi(x) > 0$ pour $x > 0$. Soient k et x' des constantes positives telles que $a(x) < k\varphi(x)$ pour $0 < x < x'$. Alors l'équation différentielle* (2.1) *admet une solution périodique vérifiant les conditions initiales $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ pour toute valeur positive de v_0 inférieure au minimum des deux quantités $1/k$, $[2\int_0^x \varphi(s)\,ds]$.*

McLachlan ([**17**]$_1$, p. 251; [**17**]$_2$) a donné une application de cette proposition dans le cas particulier

$$\ddot{x} + 2\gamma x\dot{x} + ax = 0\,, \tag{2.19}$$

où γ et a sont des constantes réelles positives. On vérifie aisément que (2.19) admet une intégrale première.

On généralise immédiatement (2.19) avec l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\gamma\varphi(x)b(\dot{x}) + k^2\varphi(x) = 0\,, \tag{2.20}$$

où γ et k sont des constantes réelles non nulles. Si l'on pose

$$\dot{x} = y\,, \tag{2.21}$$

l'on forme immédiatement pour (2.20) l'intégrale première

$$\int_{v_0}^{y} \frac{r\,dr}{2b(r) + k^2} + \int_{x_0}^{x} \varphi(s)\,ds = \text{constante}; \tag{2.22}$$

dès lors, une discussion qualitative complète de la solution générale de (2.20) est possible pour toute particularisation des fonctions $\varphi(x)$ et $b(\dot{x})$. Toutefois, dans cette note, nous n'admettons pas qu'il existe une relation entre $a(x)$ et $\varphi(x)$; pratiquement l'on ne peut pas construire une intégrale première pour (2.1), ce qui exige le recours à l'une des méthodes de la Mécanique non linéaire (cf. par ex. Forbat et Sansone et Conti [**19**]). Nous allons aborder les deux éventualités suivantes, qui ne figurent pas au Théorème 2.1,

$$\varphi(0) = 0\,,\quad \varphi(x) > 0\,,\qquad x \in (\beta_1, \beta_2)\,,\quad \alpha_1 \leqslant \beta_1 < 0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2\,, \tag{2.23}$$

$$\varphi(0) = 0\,,\quad x\varphi(x) > 0\,,\qquad a(0) = 0\,,\quad x\cdot a(x) > 0 \;\text{ ou }\; x\cdot a(x) < 0 \qquad x \in (\beta_1, \beta_2)\,, \tag{2.24}$$

toujours par la méthode directe de Liapounoff.

On travaille dans le plan des phases et l'on remplace (2.1) par le système équivalent suivant de deux équations différentielles du premier ordre

$$\dot{x} = y\,, \qquad \dot{y} = -\,\varphi(x) - a(x)y\,. \tag{2.25}$$

Première éventualité: (2.23).

Soit la fonction indéfinie

$$v = \lambda y + \mu x y\,, \tag{2.26}$$

où λ et μ sont deux paramètres que l'on déterminera plus loin. Compte tenu de (2.25), (2.26) donne

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\,(\lambda + \mu x)\varphi(x) + y^2\,. \tag{2.27}$$

On peut disposer des paramètres λ et μ pour rendre $\dot{v}$ définie positive; on prend $\mu > 0$, $\lambda > 0$ et si β désigne le plus grand des deux nombres $|\beta_1|$ et β_2, on prend λ tel que

$$-\,\lambda > \mu\beta\,. \tag{2.28}$$

En vertu d'un théorème de Četaev [**3**], la solution banale de (2.1) est instable et cela quel que soit le comportement de signe de $a(x)$.

Avec l'hypothèse $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) < 0$, $x \in (\beta_2, \beta_2)$, on prend $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et $\lambda > \mu\beta$; $\dot{v}$ est à nouveau définie positive et de nouveau, en vertu du théorème de Četaev [**3**], la solution banale de (2.1) est instable.

Deuxième éventualité: (2.24).

Par généralisation de (2.22), on prend pour (2.1) ou (2.25) la fonction suivante

$$v = \int_0^x \varphi(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^v \frac{\varphi(s)\,r\,\mathrm{d}r}{a(s)r + \varphi(s)}\,. \tag{2.29}$$

Compte tenu de (2.25) il vient

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \int_0^v \frac{(\mathrm{d}/\mathrm{d}s)[\varphi(s)/a(s)]}{[r + \varphi(s)/a(s)]^2}\,r^2\,\mathrm{d}r; \tag{2.30}$$

$\dot{v}$ est semi-définie négative si la fonction $\varphi(x)/a(x)$ est non-croissante; si $\varphi(x)$ est proportionnelle à $a(x)$, $\dot{v}$ est identiquement nulle et l'on retrouve le cas traité par McLachlan rappelé à l'équation (2.19).

Quant à v elle est définie positive si, l'hypothèse (2.24) étant remplie, les conditions initiales vérifient l'inégalité

$$\varphi(x)\big(a(x)y + \varphi(x)\big) > 0 \quad \text{ou} \quad y + \frac{\varphi(x)}{a(x)} > 0 \,. \tag{2.31}$$

La continuité de toutes les fonctions envisagées et de leurs combinaisons intervenant en (2.30) et (2.31) exige que $x = 0$ soit un zéro de même ordre de multiplicité pour $a(x)$ et $\varphi(x)$; en vertu des hypothèses (2.24), cet ordre de multiplicité est évidemment impair. Dès lors, suite à un théorème de Liapounoff ([**15**], p. 259), la solution banale de (2.1) a la stabilité faible locale.

On peut conclure le deuxième cas comme suit.

Théorème 2.2. *La solution banale de l'équation différentielle* (2.1) *a la stabilité faible locale si les conditions suffisantes suivantes sont remplies* $\forall t \geqslant t_0 > 0$:

(a) *l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux conditions initiales de la solution générale de* (2.1) *sont garanties* $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$;

(b) $\varphi(0) = 0$ *et* $x\varphi(x) > 0$, $x \in (\beta_1, \beta_2)$, $\alpha_1 \leqslant \beta_1 < 0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2$;

(c) $a(0) = 0$ *et* $xa(x) > 0$, $x \in (\beta_1, \beta_2)$;

(d) $x = 0$ *est un zéro d'ordre impair et de même multiplicité pour* $a(x)$ *et* $\varphi(x)$;

(e) *la fonction* $y = \varphi(x)/a(x)$ *est non croissante,* $x \in (\beta_1, \beta_2)$;

(f) *les conditions initiales* x_0 *et* $\dot{x}_0 = v_0$ *appartiennent à la région positive du plan des phases par rapport à la courbe d'équation*

$$y + \frac{\varphi(x)}{a(x)} = 0 \,, \tag{2.32}$$

c'est-à-dire à la région contenant l'origine.

Remarque 2.3. Dans le Théorème 2.2 on peut remplacer les hypothèses (c) et (f), *simultanément*, par les suivantes:

(c bis) $a(0) = 0$, $xa(x) < 0$, $x \in (\beta_1, \beta_2)$;

(f bis) *les conditions initiales doivent appartenir à la région négative du plan des phases par rapport à la courbe*

$$y + \frac{\varphi(x)}{a(x)} = 0 , \tag{2.33}$$

c'est-à-dire à la région du plan des phases contenant l'origine.

Remarque 2.4. On tire immédiatement des équations (2.25)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi(x) - a(x)y}{y} . \tag{2.34}$$

Par conséquent, si $\varphi(x)$ et $a(x)$ sont impaires, on déduit de (2.34) que les trajectoires relatives à (2.25), donc à (2.1), admettent $0y$ comme axe de symétrie, d'où la solution banale de (2.25) ou de (2.1) n'a jamais la stabilité asymptotique et n'a que la stabilité faible si $a(x)$ et $\varphi(x)$ sont simultanément impaires, les autres conditions du Théorème 2.2 étant satisfaites.

3 - Sur un système autonome à deux degrés de liberté

Colombo [**4**]$_{1,2}$ et Banfi [**1**] ont étudié des systèmes de van der Pol généralisés; ils ont notamment étudié les vibrations du système différentiel suivant

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + a_1(x_1)\dot{x}_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 0 , \\ &\ddot{x}_2 + a_2(x_2)\dot{x}_2 + c_{12}x_1 + c_{22}x_2 = 0 . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dans la présente note, on suppose que:

(i) des conditions suffisantes garantissent l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux conditions initiales de la solution générale de (3.1) $\forall (x_1, x_2)$, $x_1 \in (\alpha_{11}, \alpha_{12})$, $x_2 \in (\alpha_{21}, \alpha_{22})$, $\alpha_{11} < 0$, $\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} < 0$, $\alpha_{22} > 0$;

(ii) c_{11}, c_{12}, c_{21} et c_{22} sont des constantes positives; on suppose que

$$c_{12} \neq c_{21} \tag{3.2}$$

pour obtenir un résultat plus général.

On utilise la méthode directe de Liapounoff pour trouver un critère de stabilité ou d'instabilité de la solution banale de (3.1).

On pose

$$(3.3)\qquad A_1(x_1)=\int_0^{x_1}a_1(s)\,\mathrm{d}s\,,\qquad\qquad (3.4)\qquad A_2(x_2)=\int_0^{x_2}a_2(s)\,\mathrm{d}s\,;$$

on remplace (3.1) par le système équivalent suivant de 4 équations différentielles du 1-er ordre

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1-A_1(x_1)\,, & \dot{y}_1 &= -c_{11}x_1-c_{12}x_2\,,\\ \dot{x}_2 &= y_2-A_2(x_2)\,, & \dot{y}_2 &= -c_{21}x_1-c_{22}x_2\,. \end{aligned}$$

Soit la fonction

$$(3.6)\qquad 2v=\lambda[c_{21}(y_1-A_1(x_1))^2+c_{12}(y_2-A_2(x_2))^2+c_{21}c_{11}x_1^2+c_{12}c_{22}x_2^2$$
$$+2c_{12}c_{21}x_1x_2]+\mu[c_{21}x_1y_1+c_{12}x_2y_2+c_{21}\int_0^{x_1}A_1(s)\,ds+c_{12}\int_0^{x_2}A_2(s)\,ds],$$

où λ et μ sont des paramètres à déterminer plus loin.

A l'aide des équations différentielles (3.5) on trouve

$$(3.7)\qquad \dot{v}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\lambda[c_{21}a_1(x_1)(y_1-A_1(x_1))^2+c_{12}a_2(x_2))y_2-A_2(x_2))^2]$$
$$+\tfrac{1}{2}\mu[c_{21}y_1^2+c_{12}y_2^2-(c_{21}c_{11}x_1^2+c_{12}c_{22}x_2^2+2c_{12}c_{21}x_1x_2)-(c_{21}A_1^2(x_1)+c_{12}A_2^2(x_2))]\,.$$

On vérifie que v est définie positive et que $\dot{v}$ est définie négative si

$$(3.8)\qquad a_1(x_1)>0\,,\quad x_1\in(\beta_{11},\beta_{12})\,,\quad \alpha_{11}\leqslant\beta_{11}<0<\beta_{12}\leqslant\alpha_{12}\,,$$

$$(3.9)\qquad a_2(x_2)>0\,,\quad x_2\in(\beta_{21},\beta_{22})\,,\quad \alpha_{21}\leqslant\beta_{21}<0<\beta_{22}\leqslant\alpha_{22}\,,$$

$$(3.10)\qquad c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}>0\,,$$

λ et μ sont positifs; λ est suffisamment grand pour que v soit définie positive et que les inégalités suivantes soient satisfaites

$$(3.11)\qquad \lambda a_1(x_1)(y_1-A_1(x_1))^2-\tfrac{1}{2}\mu y_1^2>0\,,$$

$$(3.12)\qquad \lambda a_2(x_2)(y_3-A_2(x_2))^2-\tfrac{1}{2}\mu y_2^2>0;$$

en prenant λ suffisamment grand, les conditions (3.11) et (3.12) sont remplies. Dès lors, en vertu d'un théorème de Liapounoff ([**15**], p. 261 Rem. II) la solution banale du système différentiel (3.1) est asymptotiquement stable. Finalement, on a le théorème suivant.

Théorème 3.1. *La solution banale du système différentiel* (3.1) *est asymptotiquement stable si les conditions suffisantes suivantes sont remplies*, $\forall t \geqslant t_0 > 0$:

(1) *des conditions suffisantes garantissent l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux conditions initiales de la solution générale du système différentiel* (3.1);

(2) c_{11}, c_{12}, c_{21} *et* c_{22} *sont des constantes positives, qui vérifient l'inégalité* $c_{11}\ c_{22} - c_{12}\ c_{21} > 0$;

(3) *toutes les inégalités* (3.8), (3.9), (3.10) *sont remplies.*

Si, en particulier,

$$a_1(x_2) = a_2(x_2) = 0\,, \tag{3.13}$$

(3.1) devient

$$\ddot{x}_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 0\,, \quad \ddot{x}_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 = 0\,. \tag{3.14}$$

On remplace (3.14) par

$$\dot{x}_1 = y_1\,, \quad \dot{y}_1 = -c_{11}x_1 - c_{12}x_2\,, \quad \dot{x}_2 = y_2\,, \quad \dot{y}_2 = -c_{21}x_1 - c_{22}x_2\,. \tag{3.15}$$

Dans (3.6) on pose

$$\lambda = 1\,, \quad \mu = 0\,, \tag{3.16}$$

d'où (3.6) devient

$$2v = c_{11}c_{21}x_1^2 + c_{21}y_1^2 + c_{22}c_{12}x_2^2 + c_{12}y_2^2 + 2c_{12}c_{21}x_1x_2\,. \tag{3.17}$$

Compte tenu de (3.15), (3.17) donne

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = 0\,. \tag{3.18}$$

Dans le cas des équations (3.14) ou (3.15), v est une *intégrale première*, d'où les théorèmes 3.2 et 3.3.

Théorème 3.2. *La solution banale du système différentiel* (3.14) *est faiblement stable si les conditions suffisantes suivantes sont remplies* $\forall t \geqslant t_0 > 0$, $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ *sont des constantes vérifiant les* 5 *inégalités*

$$(3.19) \qquad c_{11} > 0\,, \quad c_{12} > 0\,, \quad c_{21} > 0\,, \quad c_{22} > 0\,, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0\,.$$

Théorème 3.3. *La solution banale du système différentiel* (3.14) *est instable si une seule des inégalités* (3.19) *n'est pas satisfaite.*

Si dans (3.1) on a

$$(3.20) \qquad a_1(x_1) < 0\,, \qquad a_2(x_2) < 0\,,$$

la solution banale de (3.1) est instable; la démonstration de cette affirmation est la même que pour le Théorème 3.1; on doit cependant prendre

$$(3.21) \qquad \lambda > 0\,, \qquad \mu < 0$$

et λ suffisamment grand pour que $\dot{v}$ soit maintenant définie positive, donc pour que

$$(3.22) \qquad \lambda a_1(x_1)(y_1 - A_1(x_1))^2 - \tfrac{1}{2}\mu y_1^2 < 0\,,$$

$$(3.23) \qquad \lambda a_2(x_2)(y_2 - A_2(x_2))^2 - \tfrac{1}{2}\mu y_2^2 < 0\,.$$

Alors, v et sa dérivée totale $\dot{v}$ par rapport à t sont toutes deux définies positives; d'après un théorème de Liapounoff ([**15**], p. 262), la solution banale de (3.1) est instable, d'où le Théorème 3.4.

Théorème 3.4. *La solution banale du système différentiel* (3.1) *est instable si les conditions suffisantes suivantes sont rempliesè* $\forall t \geqslant t_0 > 0$: (1) cf. théorème 3.1; (2) cf. théorème 3.1; (3) $a_1(x_1) < 0$, $x_1 \in (\beta_{11}, \beta_{12})$, $\alpha_{11} \leqslant \beta_{11} < 0 < \beta_{12} \leqslant \alpha_{12}$, $a_2(x_2) < 0$, $x_2 \in (\beta_{21}, \beta_{22})$, $\alpha_{21} \leqslant \beta_{21} < 0 < \beta_{22} \leqslant \alpha_{22}$.

4 - Sur le calcul des fonctions de Liapounoff

De nombreux procédés ont été décrits dans le but de calculer des fonctions de Liapounoff; quelques-uns de ces procédés figurent à la bibliographie de cette note.

La méthode suivante est très simple et généralise la recherche des intégrales premières des systèmes différentiels telle qu'elle est exposée dans Goursat [**8**].

Soit un système différentiel écrit sous forme normale

$$\dot{x}_i - f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,. \tag{4.1}$$

Soient n fonctions $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$; formons les n^2 expressions

$$A_{ij} = \int_{t_0}^{t} \big(\dot{x}_i - f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\big)\, g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\big)\, \mathrm{d}t\,, \tag{4.2}$$

et soient n^2 constantes a_{ij}; les constantes a_{ij} et les fonctions g_j seront déterminées plus loin. Formons enfin

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int_{t_0}^{t} (\dot{x}_i - f_i) g_j\, \mathrm{d}t\,. \tag{4.3}$$

La relation (4.3) peut d'écrire

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = A_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + A_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \tag{4.4}$$

dans A_1 l'intégration est exprimée sous finie tandis que dans A_2 on peut seulement indiquer l'opération et poser

$$A_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \int_{t_0}^{t} B(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\, dt\,, \tag{4.5}$$

dans laquelle B_2 est une fonction connue et continue de $x_1, x_2, \dots, x_n, t$. On pose enfin

$$v = A_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\,, \tag{4.6}$$

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\,. \tag{4.7}$$

On choisit les n fonctions $g_j[x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ et les n^2 constantes a_{ij} pour que la fonction B soit définie positive, ou définie négative ou identiquement nulle; alors le calcul de $v = A_1$ n'est qu'une conséquence du calcul de $\dot{v} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. Dans le calcul de v on rencontre des constantes d'intégration que l'on égale systématiquement à zéro.

De toutes façons, les calculs sont laborieux dès que $n \geqslant 3$.

Bibliographie

[1] C. Banfi, *Sulle oscillazioni di un sistema non lineare in due gradi di libertà*; Atti Accad. Sci. Torino **98** (1963/64), 19.

[2] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Coll. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag, Berlin 1959, 271.

[3] N. G. Četaev: $[\cdot]_1$ *Un théorème sur l'instabilité*, Doklady Akademy Nauk URSS (1934), I, 529-531; $[\cdot]_2$ *The stability of motion*, Moscou 1955 et Pergamon Press London (1961), 200.

[4] G. Colombo: $[\cdot]_1$ *Sulle oscillazioni non lineari con due gradi di libertà*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **19** (1950), 413-441; $[\cdot]_2$ *Moti di regime di un sistema non lineare autonomo in due gradi di libertà con debole accoppiamento capacitivo*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 400-420.

[5] C. C. Dearman jr et A. R. Le May, *A survey of methods for generating Liapunov functions*, Mathematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik, Hrsg. E. Stiefel, 1964/65 (213-255) Bibliographisches Institut Mannheim.

[6] J. O. C. Ezeilo, *A stability result for the solution of certain third order differential equation*, J. London Math. Soc. **37** (1962), 405-409.

[7] N. H. Forbat, *Analytische Mechanik der Schwingungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1966.

[8] E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, 7e édition revue par J. Favard, Gauthier-Villars, Paris 1949.

[9] W. Hahn: $[\cdot]_1$ *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov*, Coll. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft **22** (1958), Springer-Verlag Berlin; $[\cdot]_2$ *Stability of motion*, trad. A. P. Baartz, Coll. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstel. lungen, Band **13** (1967), Springer-Verlag Berlin.

[10] A. Huaux: $[\cdot]_1$ *Sur la stabilité des solutions constantes de l'équation autonome de Liénard* $\ddot{x} + a(x)\dot{x} + \varphi(x) = 0$, C.R. Acad. Sc. Paris, séance du 17 février (1964), 2003-2006; $[\cdot]_2$ *Sur la stabilité des solutions constantes de l'équation autonome de Liénard. Exemples et généralisations*. Bull. Inst. Polyt. de Jassy (19) **10** (1964), 171-180; $[\cdot]_3$ *Stabilität der Ruhelage der Differentialgleichung* $\dddot{x} + a\ddot{x} + b(x)\dot{x} + cx = 0$, ZAMM Sonderheft 1965, 117-118; $[\cdot]_4$ *On the construction of Liapunov functions*, IEE Transactions on Automatic Control AC-12 (1967), 465; $[\cdot]_5$ *Sur une équation de la dynamique spatiale*, Mém. Soc. Sci. Phys. Nat. Bourdeaux, vol. spécial congrès AFAS 1967, (1968), 19-22; $[\cdot]_6$ *Sur la construction des fonctions de Liapounoff*, 94e Congrès National des Sociétés savants, **2**, Paris (1970), 9-20; $[\cdot]_7$ *On the construction of Liapunov's functions*, 5e Conférence Internationale sur les Vibrations non linéaires, tome 2, 480-593, Kiev (1970); $[\cdot]_8$ *Instabilität der Ruhelage für ein System mit zwei Freiheitsgraden*, IUTAM Symposium Herrenalb 1969 über Instability of continuous Systems, 399-406, Hersg H. Leipholz, Springer-Verlag, Berlin 1971; $[\cdot]_9$ *Über die Stabilität der Ruhelage für ein System von zwei Differentialgleichungen der 2. Ordnung*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Gewöhnliche Differentialgleichungen mit Anwendungen, 3-9 Mai 1970; $[\cdot]_{10}$ *Sur l'équation autonome de Liénard*, 4p., Congrès annuel de l'AFAS, Brest (juillet 1970);

[•]$_{11}$ *Über die Berechnung der Ljapunovschen Funktionen*, Vortrag des 22.5.1973, Seminar über Fragen der Mechanik-Technische Hochschule — Lehrstuhl und Institut B für Mechanik — München und Botschaft von Belgie Köln.

[11] E. F. INFANTE and L. G. CLARK, *A method for determining of the domain of stability of second-order nonlinear autonomous systems*, J. Appl. Mech., Paper 63-WA-57 (1963), 17-22.

[12] D. R. INGWERSON, *A modified Lyapunov method for nonlinear stability analysis*, IRE Trans Automatic Control AC-6 (1961), 199-210.

[13] Y. H. KU: [•]$_1$ *Formulation of Liapunov functions of nonlinear systems for stability studies*, Proc. First Annual Conference on Circuit and System Theory, Nov. 15, 16 and 17 (1963), 309-313; [•]$_2$ *Lyapunov function of a fourth order system*, IEEE Trans. Automatic Control AC-9 (1963), 276-278; [•]$_3$ (and N. N. PURI) *On Liapunov functions of high order nonlinear systems*, J. Franklin Inst. 276 (1963), 349-364; [•]$_4$ (and R. MEKEL and C. C. SU) *Stability and design of nonlinear control systems via Liapunov's criterion*, IEEE International Convention, New York, N.Y., March 23-26, Paper 212 (1964).

[14] J. LASALLE and S. LEFSCHETZ, *Stability by Liapunov's*, Direct Method, Academic Press, New York 1961.

[15] A. LIAPUNOFF, *Problème général de la stabilité du mouvement*, trad. E. DAVAUX, Ann. Fac. Sci. Toulouse, (2) **9** (1907), 203-474.

[16] Miss E. MCHARG, *A differential equation*, J. of the London Mathematical Society **22** (1947), 83-85.

[17] N. N. MCLACHLAN: [•]$_1$ *Ordinary non-linear differential equations in Engineering and Physica Sciences*, Oxford, at the Clarendon Press; [•]$_2$ *On a nonlinear equation in Hydraulics*, Proc. 5th Symposium Appl. Math. of Amer. Math. Soc. (1954), 49-61.

[18] P. J. PONZO, *On the stability of certain nonlinear differential equations*, IEEE Trans. Automatic Control AC-10 (1965), 470-472.

[19] G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Edizioni Cremonese, Roma 1956 et Pergamon Press London 1964.

[20] E. VESSIOT, *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires*, Thèse de Doctorat soutenue le 13 juin 1892 à la Faculté des Sciences de Paris; Gauthier-Villars, Paris.

[21] J. A. WALKER and L. G. CLARK, *An integral method of Liapunov function generation for nonlinear autonomous systems*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E **32** (1965), 569-575.

Résumé

On établit des conditions suffisantes de stabilité asymptotique, de stabilité faible et d'instabilité de la solution banale de l'équation autonome de Liénard; les résultats obtenus sont étendus à un système de deux équations différentielles autonomes non linéaires du deuxième ordre. On applique la méthode directe de Liapounoff.

* * *