Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 319-329

MARIA LUISA VERONESI (*)

Sui semigruppi quasi fortemente regolari (**)

1 – I semigruppi *quasi completamente regolari* (noti anche come *semigruppi quasi periodici* o come *groupbound semigroups*) recentemente sono stati oggetto di studio da parte di alcuni autori (cfr. ad es. [**7**], [**9**]$_{1,3}$, [**4**]$_{1,2}$, [**6**]). In questa nota, che fa seguito ai lavori [**4**]$_{1,2}$, si prosegue lo studio dei *semigruppi quasi fortemente regolari*, cioè di una particolare classe di semigruppi quasi completamente regolari. L'introduzione di una relazione di equivalenza, che per i semigruppi regolari si riduce alla ben nota relazione $\mathcal{J}$ di Green, permette di estendere ai semigruppi quasi fortemente regolari alcune proprietà dei semigruppi completamente regolari e dei semigruppi inversi unione di gruppi.

Def. 1.1. Un semigruppo S si dice *quasi* (*completamente*) *regolare* se una potenza di ogni elemento di S è (completamente) regolare.

Def. 2.1. Un semigruppo S quasi regolare è *quasi fortemente regolare* se ogni elemento regolare di S è completamente regolare [1].

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Politecnico, P.za Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) e con i fondi di ricerca M. P. I.. — Ricevuto: 9-V-1983.

(1) Consideriamo ad es. i due semigruppi

	0	e	f	a	b
0	0	0	0	0	0
e	0	e	0	a	0
f	0	0	f	0	b
a	0	0	a	0	e
b	0	b	0	f	0

	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	0	0	0
b	0	b	a	e

Il primo è quasi completamente regolare ma non quasi fortemente regolare; il secondo è quasi fortemente regolare.

Def. 3.1. Un semigruppo S si dice *t-semigruppo* se S è un semigruppo t-archimedeo e contiene un idempotente (2).

Def. 4.1. Un semigruppo S si dice *completamente archimedeo* se S è archimedeo e contiene lo zero o un idempotente primitivo (3).

Sia S un semigruppo quasi regolare e consideriamo in S le relazioni di equivalenza $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{J}^*, \mathcal{H}^*$ definite nel modo seguente

$$a\mathcal{L}^*b \Leftrightarrow Sa^p = Sb^q\,, \qquad a\mathcal{R}^*b \Leftrightarrow a^pS = b^qS\,,$$

$$a\mathcal{J}^*b \Leftrightarrow Sa^pS = Sb^qS\,, \qquad \mathcal{H}^* = \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*\,,$$

ove $a, b \in S$ e p, q sono i minimi interi positivi per cui a^p e b^q sono regolari (4). Si ha $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{J}^*$ e quindi ogni $\mathcal{J}^*$-classe è unione (disgiunta) di $\mathcal{H}^*$-classi; ricordiamo inoltre che ogni *$\mathcal{H}^*$-classe contiene al più un idempotente* (cfr. [**4**]$_2$, Prop. (b) di **1**).

Nel seguito la $\mathcal{J}^*$-classe ($\mathcal{H}^*$-classe) individuata da un elemento a di S sarà indicata con J_a^* (H_a^*). Come di consueto E rappresenterà l'insieme degli idempotenti di S, G_e ($e \in E$) il sottogruppo massimale di S avente come identità e.

Se $a \in S$ ed n è il minimo intero positivo per cui a^n è regolare si ha $a^n \in H_a^*$, $a^n \in J_a^*$.

Ricordiamo infine che si ha il seguente

Lemma di Munn (cfr. [**7**], Lemma 1). *Siano S un semigruppo ed x un*

---

(2) Avvertiamo che tutte le definizioni non riportate in questo lavoro si possono trovare in [**3**] oppure in [**8**]. Per quanto riguarda la definizione di semigruppo t-archimedeo si veda [**9**]$_2$, pag. 233.

Si noti che un nilsemigruppo è un t-semigruppo. Ricordiamo inoltre che sussiste la seguente proposizione (cfr. [**1**], Teor. 1, e [**2**], Prop. 2.2).

Per un semigruppo S le seguenti condizioni sono equivalenti: (i) *S è un t-semigruppo*; (ii) *S è estensione ideale di un gruppo mediante un nilsemigruppo*; (iii) *S è quasi regolare e contiene un solo idempotente.*

(3) Ricordiamo che *un semigruppo è completamente archimedeo se e solo se è estensione ideale di un semigruppo completamente semplice mediante un nilsemigruppo* (cfr. [**2**], Cor. 3.3).

Osserviamo che un t-semigruppo è un semigruppo completamente archimedeo. Ricordiamo inoltre che *un semigruppo completamente archimedeo è quasi fortemente regolare* (cfr. [**4**]$_1$, Teor. 1.5 e [**4**]$_2$, Lemma 1.2).

(4) Cfr. [**4**]$_2$. Se S è regolare le relazioni $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{J}^*, \mathcal{H}^*$, coincidono con le relazioni $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$, di Green.

elemento di S tale che x^n appartenga ad un sottogruppo G di S per qualche intero positivo n. Allora, se e è l'identità di G, si ha

(a) $ex = xe \in G_e$, (b) $x^m \in G_e$ *per ogni intero* $m > n$.

Sussiste, come si verifica facilmente, il

Lemma 5.1. *Se S è un semigruppo quasi regolare si hanno le seguenti proposizioni*

(i) *Ogni $\mathscr{J}^*$-classe di S contiene almeno un idempotente.*

(ii) $G_e \subseteq H_e^* \subseteq J_e^*$ *per ogni* $e \in E$.

Dimostriamo ora il

Lemma 6.1. *In un semigruppo quasi fortemente regolare S le relazioni $e, f \in E$, $J_e^* = J_f^*$, $ef = fe = f$ implicano $e = f$.*

Infatti da $SeS = SfS$ segue $e = xfy$ $(x, y \in S)$ e, posto $a = exe$, si ha $a(fy)a = exefyexe = exfyexe = exe = a$.

Pertanto a è regolare ed essendo S quasi fortemente regolare esiste $a' \in S$ tale che $a = aa'a$, $a'a = aa'$.

Inoltre, posto $b = eye$, si ha $afb = exefeye = exfye = e$ e quindi si ottiene $e = afb = aa'afb = aa'e = a'ae = a'a$. Pertanto $e = a'a = a'ea = a'afba = efba = fba$ da cui segue $e = fe$, cioè $e = f$.

Lemma 7.1. *In un semigruppo quasi fortemente regolare l'uguaglianza $J_e^* = J_{exe}^*$ $(x \in S, e \in E)$ implica $exe \in G_e$.*

Sia n il minimo intero positivo per cui $(exe)^n$ è regolare (e quindi completamente regolare). Si ha $(exe)^n \in G_f \subseteq J_f^* (f \in E)$, $(exe)^n \in J_{exe}^* = J_e^*$ e quindi si hanno le relazioni $J_e^* = J_f^*$, $ef = fe = f$ da cui segue $e = f$ (Lemma 6.1). Pertanto $(exe)^n \in G_e$ e perciò $exe \in G_e$ (Lemma di Munn, prop. (a)).

Lemma 8.1. *In un semigruppo S quasi fortemente regolare si ha $J_{ab}^* = J_{ba}^*$ per ogni $a, b \in S$.*

Se n_1 ed n_2 sono i minimi interi positivi per cui $(ab)^{n_1}$ e $(ba)^{n_2}$ sono regolari (e quindi completamente regolari) si ha $(ab)^{n_1} \in G_e \subseteq J_e^*$, $(ba)^{n_2} \in G_f \subseteq J_f^* (e, f \in E)$ [5] e (per il Lemma di Munn) si ha anche $(ab)^{n_1+p} \in G_e \subseteq J_e^*$, $(ba)^{n_2+q} \in G_f \subseteq J_f^*$ $(\forall p, q \geqslant 0)$. Pertanto $(a\,b)^{n_1} \mathscr{J}^* (ab)^{n_2+p}$, $(ba)^{n_2} \mathscr{J}^* (ba)^{n_2+q}$ $(\forall p, q \geqslant 0)$ e quindi, po-

[5] Ricordiamo che, se x è un elemento completamente regolare di un semigruppo S, x è contenuto in un sottogruppo di S.

sto $n = \max(n_1, n_2)$, si ha

$$S(ab)^{n_1}S = S(ab)^{n+1}S = Sa(ba)^n bS \subseteq S(ba)^n S = S(ba)^{n_2}S\,.$$

In modo analogo si trova $S(ba)^{n_2}S \subseteq S(ab)^{n_1}S$ per cui $S(ab)^{n_1}S = S(ba)^{n_2}S$, cioè $J^*_{ab} = J^*_{ba}$.

Lemma 9.1. *Sia S un semigruppo quasi fortemente regolare e siano e, f due idempotenti di S tali che $J^*_e = J^*_f$. Risulta allora $J^*_{ef} = J^*_e$.*

Da $SeS = SfS$ segue $e = xfy = xfye$ $(x, y \in S)$; per il Lemma 8.1 si ha $J^*_f = J^*_e = J^*_{xfye} = J^*_{(xf)(fye)} = J^*_{fyexf}$ e, poichè $fyexf \in E$, risulta $f = fyexf$ (Lemma 6.1). Da quest'ultima uguaglianza si deduce immediatamente che $fyf \in G_f$ (Lemma 7.1). In modo analogo si verifica che $fxf \in G_f$ e quindi, per ogni intero positivo p, si ha $(fef)^p = (fxffyf)^p \in G_f \subseteq J^*_f$. Pertanto $SfS = S(fef)^p S = Sf(ef)^p S \subseteq S(ef)^p S$; d'altronde $S(ef)^p S \subseteq SfS$ e quindi $SfS = S(ef)^p S$ (per ogni intero positivo p), da cui segue $J^*_{ef} = J^*_f = J^*_e$.

Lemma 10.1. *In un semigruppo quasi fortemente regolare S le relazioni $a^m \in G_e$, $b^n \in G_f$ $(a, b \in S;\ e, f \in E;\ m, n$ interi positivi) implicano $J^*_{ab} = J^*_{ef}$.*

Sia m_1 il minimo intero positivo per cui $(ab)^{m_1}$ è regolare. Si ha

$$(1) \qquad (ab)^{m_1} \in J^*_{ab}\,, \quad (ab)^{m_1} \in G_h \subseteq J^*_h \quad (h \in E)\,, \quad hab = abh \in G_h\,.$$

Ciò posto verifichiamo che risulta

$$(2) \qquad ha^p h \in G_h\,, \quad hb^p h \in G_h \quad \text{per ogni intero } p \geqslant 0\ (^6)\,.$$

Dimostriamo per induzione la prima delle (2). Supponiamo $ha^p h \in G_h$ $(p \geqslant 0)$ e verifichiamo che anche $ha^{p+1}h \in G_h$. Si ha $(ha^p h)(hab) = ha^{p+1}bh \in G_h$ e, se x è l'inverso di $ha^{p+1}bh$ in G_h, si ha $h = ha^{p+1}bxh$ da cui segue che ha^{p+1} è regolare. Pertanto $J^*_h = J^*_{ha^{p+1}} = J^*_{ha^{p+1}h}$ (Lemma 8.1), dunque $ha^{p+1}h \in G_h$ (Lemma 7.1) e, poichè $ha^0h = h \in G_h$, la prima delle (2) è dimostrata; in modo analogo si procede per la seconda.

Verifichiamo ora che si ha

$$(3) \qquad heh \in G_h\,, \quad hfh \in G_h\,.$$

---

(6) Qui e nel seguito porremo $xy^0 = y^0x = x$ per ogni $x, y \in S$.

Poichè $a^m \in G_e$, dalla prima delle (2) si deduce $hea^m h \in G_h$ e, se x è l'inverso di $hea^m h$ in G_h, si ha $h = hea^m xh$ da cui segue che he è regolare. Pertanto $J^*_h = J^*_{he} = J^*_{heh}$ e quindi $heh \in G_h$. Analogamente si verifica che $hfh \in G_h$.

Dimostriamo che risulta

$$h(ef)^p h \in G_h \quad \text{per ogni intero } p \geqslant 0 \,. \tag{4}$$

La (4) è ovvia per $p = 0$; dimostriamola per $p = 1$. Dalle (3) segue $h = hexfh$ $(x \in G_h)$ e quindi fhe è regolare; dalle (3) segue anche $h = hfhey$ $(y \in G_h)$ e perciò $J^*_h = J^*_{fhe} = J^*_{efh} = J^*_{hefh}$. Pertanto $hefh \in G_h$. Supponiamo ora $h(ef)^p h \in G_h$ $(p \geqslant 1)$ e verifichiamo che anche $h(ef)^{p+1}h \in G_h$. Da $h(ef)^p h \in G_h$ segue $h = h(ef)^p z(ef)^p h$ $(z \in G_h)$ e quindi si ha $(ef)^p hef = (ef)^p hef[(ef)^{p-1}z](ef)^p hef$. Pertanto $(ef)^p hef$ è regolare. Si ha poi $h = [h(ef)^p h]^2 w$ $(w \in G_h)$ e perciò

$$ShS = S[h(ef)^p h]^2 wS \subseteq Sh(ef)^p h(ef)^p hS \subseteq S(ef)^p hefS \,.$$

D'altronde $S(ef)^p hefS \subseteq ShS$ e quindi $ShS = S(ef)^p hefS$. Pertanto $J^*_h = J^*_{(ef)^p hef} = J^*_{(ef)^{p+1}h} = J^*_{h(ef)^{p+1}h}$ da cui segue $h(ef)^{p+1}h \in G_h$, e la (4) è dimostrata.

Sia infine q il minimo intero positivo per cui $(ef)^q$ è regolare. Si ha

$$(ef)^q = J^*_{ef} \,, \qquad (ef)^q \in G_k = J^*_k \qquad (k \in E) \,. \tag{5}$$

Vogliamo verificare che risulta

$$k(ba)^p k \in G_k \quad \text{per ogni intero } p \geqslant 0 \,. \tag{6}$$

La (4) è ovvia per $p = 0$; dimostriamola per $p = 1$. Per il Lemma di Munn si ha $(ef)^{2q} \in G_k \subseteq J^*_k$. Si può pertanto scrivere $(ef)^{2q} = (ef)^{2q} x (ef)^{2q}$ $(x \in G_k)$. Da $a^m \in G_e$, $b^n \in G_f$ segue $ea \in G_e$, $bf \in G_f$ e quindi esistono $a' \in G_e$, $b' \in G_f$ tali che $e = a'ea = a'a$, $f = bfb' = bb'$.

Possiamo dunque scrivere

$$a(ef)^{2q} b = a(ef)^{2q} x(ef)^{2q} b = a(ef)^{2q} b(b'xa')a(ef)^{2q} b$$

$$S(ef)^q S = S(ef)^{2q} S = Sa'a(ef)^{2q} bb'S \subseteq Sa(ef)^{2q} bS$$

$$Sa(ef)^{2q} bS \subseteq S(ef)^q S \,,$$

e pertanto si ha

$$J^*_k = J^*_{ef} = J^*_{a(ef)^{2q}b} = J^*_{ba(ef)^{2q}} = J^*_{(ef)^q ba(ef)^q} = J^*_{k(ef)^q ba(ef)^q k}\,,$$

da cui segue $(ef)^q ba(ef)^q = k(ef)^q ba(ef)^q k \in G_k$; da questa, se y indica l'inverso di $(ef)^q$ in G_k, si ottiene $kbak = y(ef)^q ba(ef)^q y \in G_k$. Dopo di ciò con lo stesso procedimento usato per la dimostrazione della (4) si verifica che $k(ba)^p k \in G_k$ $(p \geqslant 1)$ implica $k(ba)^{p+1}k \in G_k$.

Siamo ora in grado di dimostrare il Lemma 10.1. Se m_2 è il minimo intero positivo per cui $(ba)^{m_2}$ è regolare si ha (per le (1), (4), (5) e (6))

$$\begin{aligned} S(ab)^{m_1}S &= ShS = Sh(ef)^q hS \subseteq S(ef)^q S\,, \\ S(ef)^q S &= SkS = Sk(ba)^{m_2}kS \subseteq S(ba)^{m_2}S\,, \end{aligned}$$

e, da queste, ricordando che $J^*_{ab} = J^*_{ba}$, si ottiene $S(ab)^{m_1}S = S(ef)^q S$, cioè $J^*_{ab} = J^*_{ef}$.

Proposizione 11.1. *In un semigruppo S quasi fortemente regolare ogni $\mathscr{J}^*$-classe è un sottosemigruppo di S completamente archimedeo.*

Siano S un semigruppo quasi fortemente regolare, J^* una $\mathscr{J}^*$-classe di S, a, b due elementi di J^*, m, n i minimi interi positivi per cui a^m e b^n sono regolari. Si ha $a^m \in G_e \subseteq J^*_e = J^*$, $b^n \in G_f \subseteq J^*_f = J^*$ $(e, f \in E)$, $J^*_{ab} = J^*_{ef}$ (Lemma 10.1), $J^*_{ef} = J^*_e$ (Lemma 9.1) da cui segue $J^*_{ab} = J^*$. Pertanto J^* è un sottosemigruppo di S ed è evidente che tale sottosemigruppo è quasi regolare. Osserviamo ora che J^* contiene almeno un idempotente (Lemma 5.1). Se J^* contiene lo zero, allora J^* è un nilsemigruppo (cioè un semigruppo completamente archimedeo). Infatti, se f è lo zero di J^*, si ha $J^* \cap E = f$ (Lemma 6.1) e quindi per ogni $x \in J^*$ risulta $x^n \in G_f = f$ per qualche intero positivo n. Se J^* è senza zero gli idempotenti di J^* sono tutti primitivi (Lemma 6.1) e J^*, essendo quasi regolare, è un semigruppo completamente archimedeo (cfr. [**4**]$_2$, Teor. 5.2).

Lemma 12.1. *In un semigruppo S quasi fortemente regolare le relazioni $J^*_e = J^*_{e'}$, $J^*_f = J^*_{f'}$ $(e, e', f, f' \in E)$ implicano $J^*_{ef} = J^*_{e'f'}$.*

Da $J^*_e = J^*_{e'}$, segue $J^*_e = J^*_{ee'} = J^*_{ee'e}$ (Lemmi 9.1 e 8.1) e quindi $ee'e \in G_e$ (Lemma 7.1). In modo analogo si verifica che $ff'f \in G_f$. Si può allora scrivere $e = xe'e$, $f = ff'y$ $(x \in G_e,\ y \in G_f)$ e, se n è il minimo intero positivo per cui $(ef)^n$ è regolare, si ha $(ef)^n = (ef)^n z(ef)^n$ $(z \in S)$.

Vogliamo verificare che

$$(5) \qquad J^*_{ef} = J^*_{(ef)^{np}(f'e')^p} \quad \text{per ogni intero } p \geqslant 1\,.$$

Si ha $e'(ef)^n f' = e'(ef)^n f'(yzx)e'(ef)^n f'$, $(ef)^n = xe'(ef)^n f'y$. Pertanto

$$J^*_{ef} = J^*_{e'(ef)^n f'} = J^*_{f'e'(ef)^n} = J^*_{(ef)^n f'e'} \tag{6}$$

e perciò la (5) sussiste per $p = 1$. Supponiamo ora che sia $J^*_{ef} = J^*_{(ef)^{np}(f'e')^p}$ $(p \geqslant 1)$. Si ha $(ef)^{np}(f'e')^p \in J^*_{ef}$; dalla (6) segue $f'e'(ef)^n \in J^*_{ef}$ e, poichè J^*_{ef} è un sottosemigruppo di S (Prop. 11.1), si ha anche $(ef)^{np}(f'e')^{p+1}(ef)^n \in J^*_{ef}$; pertanto $J^*_{ef} = J^*_{(ef)^{np}(f'e')^{p+1}(ef)^n} = J^*_{(ef)^{n(p+1)}(f'e')^{p+1}}$, e la (5) è dimostrata. Siano r ed s i minimi interi positivi per cui $(f'e')^r$ e $[(ef)^{nr}(f'e')^r]^s$ sono regolari; dalla (5) si deduce $S(ef)^n S = S[(ef)^{nr}(f'e')^r]^s S \subseteq S(f'e')^r S$. Allo stesso modo si verifica che $S(f'e')^r S \subseteq S(ef)^n S$ e pertanto $J^*_{ef} = J^*_{f'e'} = J^*_{e'f'}$.

Consideriamo ora un semigruppo S *quasi completamente regolare* e sia $\mathscr{T}$ la relazione di equivalenza in S che ammette come $\mathscr{T}$-classi gli insiemi $T_e = \{x \in S\colon x^n \in G_e$ per qualche intero positivo $n,\ e \in E\}$.

Sussiste il seguente teorema che estende ai semigruppi quasi fortemente regolari ben note proprietà dei semigruppi completamente regolari.

Teorema 13.1. *Per un semigruppo S le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *S è quasi fortemente regolare.*

(ii) *S è quasi regolare e ogni $\mathscr{H}^*$-classe contiene un idempotente.*

(iii) *S è quasi regolare e ogni $\mathscr{H}^*$-classe è un t-semigruppo.*

(iv) *S è quasi completamente regolare e $\mathscr{T} = \mathscr{H}^*$.*

(v) *S è un semireticolo di semigruppi completamente archimedei.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Cfr. [4]$_2$, Prop. 7.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Siano: S un semigruppo quasi regolare in cui ogni $\mathscr{H}^*$-classe contiene un idempotente; H^* una $\mathscr{H}^*$-classe di S e l'idempotente di H^*; a, b due elementi di H^*; f l'idempotente di H^*_{ab}. Per la Prop. 7.1 di [4]$_2$, S è quasi fortemente regolare e quindi — poichè si ha $H^* = H^*_e \subseteq J^*_e$, $H^*_{ab} = H^*_f \subseteq J^*_f$, $ab \in J^*_e$ (Prop. 11.1) — risulta $J^*_e = J^*_f$. Si ha allora

$$ae = ea \in G_e\,, \quad eb = be \in G_e\,, \quad (ab)^m e = e(ab)^m \in G_e\,, \quad (ab)^m \in G_f\,,$$

ove m è il minimo intero positivo per cui $(ab)^m$ è regolare. Pertanto, se x è l'inverso di $e(ab)^m$ in G_e, si ha $e = ex(ab)^m f = f(ab)^m xe$, da cui segue $e = ef = fe$, e, poichè $J^*_e = J^*_f$, risulta $e = f$ (Lemma 6.1). Dunque H^* è un sottosemigruppo di S, cioè un t-semigruppo (cfr. [4]$_2$, Prop. 5.1).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sia S un semigruppo quasi regolare in cui ogni $\mathscr{H}^*$-classe è un t-semigruppo. Il semigruppo S, essendo unione di t-semigruppi, è quasi completamente regolare [7] ed è evidente che ogni $\mathscr{H}^*$-classe contiene un idempotente. Pertanto, se $(a, b) \in \mathscr{H}^*$ esiste $e \in E$ per cui $a, b \in H_e$ e, poichè H_e è un t-semigruppo esistono gli interi positivi m ed n tali che $a^m, b^n \in G_e$ [8]. Dunque $(a, b) \in \mathscr{T}$. Viceversa, se $(a, b) \in \mathscr{T}$, si ha $a^m, b^n \in G_e \subseteq H_e^*$ (m, n interi positivi, $e \in E$), $a \in H_f^*$, $b \in H_g^*$ $(f, g \in E)$; pertanto, poichè H_f^* ed H_g^* sono sottosemigruppi di S, si ha anche $a^m \in H_f^*$, $b^n \in H_g^*$ e quindi $e = f = g$, cioè $(a, b) \in \mathscr{H}^*$. Possiamo dunque concludere che $\mathscr{T} = \mathscr{H}^*$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Sia S un semigruppo quasi completamente regolare in cui $\mathscr{T} = \mathscr{H}^*$. Osserviamo in primo luogo che, poichè ogni $\mathscr{H}^*$-classe contiene un idempotente, S è quasi fortemente regolare (cfr. [4]$_2$, Prop. 7.1) e quindi ogni $\mathscr{J}^*$-classe è un semigruppo completamente archimedeo (Prop. 11.1). Siano ora $c \in S$ e $J_a^* = J_b^*$ $(a, b \in S)$; poichè S è quasi fortemente regolare, esistono gli interi positivi m, n, p tali che

$$(7) \qquad a^m \in G_e \subseteq J_e^* = J_a^*; \quad b^n \in G_{e'} \subseteq J_{e'}^* = J_b^*, \quad c^p \in G_f \quad (e, e', f \in E).$$

Dalla (7) segue $J_{ac}^* = J_{ef}^*$, $J_{bc}^* = J_{e'f}^*$ (Lemma 10.1), $J_{ef}^* = J_{e'f}^*$ (Lemma 12.1) e quindi $J_{ac}^* = J_{bc}^*$. Similmente $J_{ca}^* = J_{cb}^*$. Pertanto la $\mathscr{J}^*$ è una congruenza e da ciò segue immediatamente che S è un semireticolo di semigruppi completamente archimedei (Prop. 11.1).

(v) $\Rightarrow$ (i). Sia S un semireticolo Y di semigruppi completamente archimedei S_α $(\alpha \in Y)$. Osserviamo in primo luogo che S, essendo unione di semigruppi completamente archimedei, è quasi regolare (cfr. [4]$_1$, Teor. 1.5). Ciò posto sia a un elemento regolare di S. Come è noto esiste $x \in S$ tale che $a = axa$, $x = xax$. Se $a \in S_\alpha$ e $x \in S_\beta$, si ha $a = axa \in S_{\alpha\beta\alpha} = S_{\alpha\beta}$, $x = xax = S_{\beta\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$; dunque $\alpha = \alpha\beta = \beta$. Pertanto a è regolare in S_α e quindi a è completamente regolare (cfr. [4]$_2$, Lemma 1.2) [9].

Osservazione 14.1. Sia S un semigruppo completamente regolare. Dal Teor. 13.1 e dalla sua dimostrazione segue che S è un semireticolo di semigruppi regolari completamente archimedei e quindi completamente semplici (cfr. [4]$_1$, Teor. 1.7). Si ritrova così il seguente ben noto teorema di Clifford:

Se un semigruppo S è unione di gruppi, allora esso è un semireticolo di semigruppi completamente semplici.

---

[7] Ricordiamo che un t-semigruppo è quasi fortemente regolare.

[8] Ricordiamo che un t-semigruppo è estensione ideale di un gruppo mediante un nilsemigruppo.

[9] Più precisamente, se S_α contiene lo zero, S_α è un nilsemigruppo ed a coincide con lo zero di S_α. Se S_α è privo di zero si applica il Teor. 1.5 di [4]$_1$ e il Lemma 1.2 di [4]$_2$.

Osserviamo inoltre che *un semigruppo S quasi completamente regolare e separativo* ([10]) *è completamente regolare.* Infatti, sia a un elemento di S e supponiamo che il minimo intero n per cui a^n è completamente regolare sia maggiore di 1. Si ha $a^n \in G_e$ $(e \in E)$ e quindi anche a^{2n-2}, $ea^{n-1} = a^{n-1}e$ appartengono a G_e. Pertanto $(a^{n-1})^2 = a^{n-1}(ea^{n-1}) = (ea^{n-1})^2$ da cui segue $a^{n-1} = ea^{n-1} \in G_e$ contro l'ipotesi che n sia il minimo intero positivo per cui a^n è completamente regolare.

2 – Def. 1.2. Diremo che un semigruppo S è *quasi (fortemente) inverso* se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

(i) S è quasi (fortemente) regolare,

(ii) ogni elemento regolare di S ammette un unico inverso.

Teorema 2.2. *Per un semigruppo S le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *S è quasi fortemente inverso.*

(ii) *S è quasi regolare ed $\mathcal{H}^* = \mathcal{J}^*$.*

(iii) *S è quasi regolare e debolmente commutativo.*

(iv) *S è un semireticolo di t-semigruppi.*

(v) *S è unione disgiunta di t-semigruppi e per ogni $e, f \in E$ esiste un intero positivo n tale che $(ef)^n = (fe)^n$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Siano: S un semigruppo quasi fortemente inverso, a e b due elementi di S tali che $(a, b) \in \mathcal{J}^*$. Il semigruppo S è quasi fortemente regolare e quindi si ha $a \in H^*_e \subseteq J^*_e$, $b \in H^*_f \subseteq J^*_f$ e $f \in E$ (Teor. 13.1). Pertanto $J^*_e = J^*_f$. Inoltre, poichè S è quasi inverso, esiste un intero positivo n tale che $(ef)^n = (fe)^n \in E$ (cfr. [4]$_1$, Teor. 4.6 e Oss. 4.7) e si ha $e(ef)^n = (ef)^n f(ef)^n = (ef)^n f = (ef)^n$. Da queste relazioni, osservando che $J^*_e = J^*_{(ef)^n} = J^*_f$ (Prop. 11.1), si deduce $e = (ef)^n = f$ (Lemma 6.1) e perciò $(a, b) \in \mathcal{H}^*$. Pertanto $\mathcal{J}^* \subseteq \mathcal{H}^*$ da cui segue immediatamente $\mathcal{H}^* = \mathcal{J}^*$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia S un semigruppo quasi regolare in cui $\mathcal{H}^* = \mathcal{J}^*$. Poichè ogni $\mathcal{J}^*$-classe contiene almeno un idempotente (Lemma 5.1), anche ogni $\mathcal{H}^*$-classe contiene un idempotente ed S è quasi fortemente regolare (Teor. 13.1).

Dunque per ogni $a, b \in S$ si ha $J^*_{ab} = J^*_{ba}$ (Lemma 8.1), da cui segue $H^*_{ab} = H^*_{ba}$ e quindi esiste un intero positivo h tale che $(ab)^h \in bSa$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Cfr. [4]$_1$, Cor. 4.3.

([10]) Un semigruppo S si dice *separativo* se le relazioni $x^2 = xy = y^2$ $(x, y \in S)$ implicano $x = y$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Sia S un semireticolo di t-semigruppi. Ovviamente S è unione disgiunta di t-semigruppi; inoltre — essendo S quasi inverso (cfr. [4]$_1$, Cor. 4.8) — per ogni coppia di idempotenti e, f di S esiste un intero positivo n tale che $(ef)^n = (fe)^n$ (cfr. [4]$_1$, Teor. 4.6).

(v) $\Rightarrow$ (vi). Sia S un semigruppo unione disgiunta dei t-semigruppi S_α $(\alpha \in Y)$ e supponiamo che per ogni $e, f \in E$ si abbia $(ef)^n = (fe)^n$ per qualche intero positivo n. Il semigruppo S è quasi inverso per il Teor. 4.6 di [4]$_1$; per completare la dimostrazione dobbiamo verificare che S è quasi fortemente regolare. Siano a un elemento regolare di S e b il suo inverso. Se $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$, $e = S_\alpha \cap E$, $f = S_\beta \cap E$, esistono gli interi positivi m ed n tali che $a^m \in G_\alpha$, $b^n \in G_\beta$ ove G_α e G_β sono sottogruppi di S aventi per unità rispettivamente e ed f (si ricordi che un t-semigruppo è estensione ideale di un gruppo mediante un nilsemigruppo). Dalle relazioni $ea = ae \in G_e$ (Lemma di Munn), $a = aba$ segue $ea = (ea)b(ea)$; dunque $beab$ è l'inverso di ea e perciò $beab \in G_e$. Pertanto $e = eabeab = eab$, $e = beabea = bea$ e quindi $e = e^n = (eab)^n = (ea)^n b^n = ea^n b^n f$ da cui si deduce $e = ef$. In modo analogo si verifica che $f = ef$ e perciò $e = f$ da cui segue $S_\alpha = S_\beta$.

Dunque a, b, ab, ba appartengono tutti ad S_α e quindi $ab = e = ba$. Pertanto a è completamente regolare.

Bibliografia

[1] A. Cherubini Spoletini e A. Varisco, *Sui semigruppi i cui sottosemigruppi propri sono t-archimedei*, Rend. Ist. Lomb. Cl. Sc. (A) **112** (1978), 91-98.

[2] J. Chrislock, *On medial semigroups*, J. Algebra **12** (1969), 1-9.

[3] A. M. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups* (I), Amer. Math. Soc., Providence 1961.

[4] J. L. Galbiati e M. L. Veronesi: [•]$_1$ *Sui semigruppi che sono un band di t-semigruppi*, Rend. Ist. Lomb. Cl. Sc. (A) **114** (1980); [•]$_2$ *Sui semigruppi quasi regolari*, Rend. Ist. Lomb. Cl. Sc. (A) **116** (1982).

[5] K. S., Harinath, *Some results on k-regular semigroups*, Indian J. Pure App. Math. (11) **10** (1979), 1422-1431.

[6] B. L. Madison, T. K. Mukherjee and M. K. Sen, *Periodic properties of group-bound semigroups*, Semigroup Forum **22** (1981), 225-234.

[7] W. D. Munn, *Pseudoinverses in semigroups*, Proc. Cam. Phil. Soc. **57** (1961), 247-250.

[8] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merril Publ. Comp., Columbus 1973.

[9] M. S. PUTCHA: $[\cdot]_1$ *Semilattice decompositions of semigroups*, Semigroup Forum, **6** (1973), 12-34; $[\cdot]_2$ *Bands of t-archimedean semigroups*, Semigroup Forum **6** (1973), 232-239; $[\cdot]_3$ *Semigroups in which a power of each element lies in a subgroup*, Semigroup Forum **5** (1973), 354-361.

Summary

In this paper we keep on the study of quasi strongly semigroups begun in previous works. Defining the equivalence relation $\mathcal{J}^*$ which, for regular semigroups, becomes the Green's relation $\mathcal{J}$, we extend to quasi strongly regular semigroups some properties of completely regular semigroups of inverse semigroups which are union of groups.

* * *