Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10 (1984), 311-318

MARIA ANTONIETTA BARATTA (*)

Sulla conservazione degli E_4 parabolici in una trasformazione puntuale fra piani (**)

1 - Introduzione

Sia T una trasformazione puntuale fra due piani affini S_2, $\bar{S}_2$ e $(O, \bar{O})$ una coppia regolare di punti corrispondenti. È noto che si dicono *caratteristici* gli E_1 di centro O tali che agli E_2 di flesso che li contengono corrispondono in T E_2 di flesso di centro $\bar{O}$.

Premesso che per ogni E_3 assegnato esiste una (sola) parabola che lo contiene e che viene detto *parabolico* l'E_4 ad essa relativo, è naturale ricercare se esistono E_3 di centro O tali che gli E_4 *parabolici* che li contengono vengono mutati da T in E_4 *parabolici* di centro $\bar{O}$.

Il problema si presenta come una naturale generalizzazione di quello relativo agli E_1 *caratteristici*.

In questa nota si prova che per una coppia regolare di punti corrispondenti $(O, \bar{O})$ esistono in generale *due* E_3 che soddisfano al problema posto e che vengono detti E_3 *bi-caratteristici*.

Si dimostra poi che se l'E_1 contenuto nell'E_3 è caratteristico, esiste allora *un solo* E_3 *bi-caratteristico*. Si individuano quindi le condizioni e le equazioni di trasformazioni puntuali in cui *ogni* E_3 *è bi-caratteristico*.

2 - Premesse

Assegnata una trasformazione puntuale T tra due piani affini S_2, $\bar{S}_2$ sia $(O, \bar{O})$ una coppia regolare di punti corrispondenti.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del progetto «Geometria delle varietà differenziabili» finanziato da M.P.I. — Ricevuto: 5-V-1983.

Usufruendo dell'arbitrarietà della scelta dei riferimenti sui due piani, le equazioni della T assumono la forma (1)

$$(1)\qquad y_s = ax_s + f_{2,s}(x_1, x_2) + f_{3,s}(x_1, x_2) + f_{4,s}(x_1, x_2) + [5]$$

$$\left(a \in \mathbf{R} - \{0\},\ s = 1, 2\right),$$

dove (x_1, x_2), (y_1, y_2) sono rispettivamente le coordinate affini non omogenee di punti di S_2, $\bar{S}_2$ corrispondenti in T (2),

$$(2)\qquad \begin{aligned} f_{2,1}(x_1, x_2) &= \sum_{h,k} a_{hk} x_h x_k\,, & f_{2,2}(x_1, x_2) &= \sum_{h,k} b_{hk} x_h x_k\,,\\ f_{3,1}(x_1, x_2) &= \sum_{h,k,r} a_{hkr} x_h x_k x_r\,, & f_{3,2}(x_1, x_2) &= \sum_{h,k,r} b_{hkr} x_h x_k x_r\,,\\ f_{4,1}(x_1, x_2) &= \sum_{h,k,r,s} a_{hkrs} x_h x_k x_r x_s\,, & f_{4,2}(x_1, x_2) &= \sum_{h,k,r,s} b_{hkrs} x_h x_k x_r x_s\,,\end{aligned}$$

e con [5] si sono indicati i termini di grado > 4.

È ben noto che, relativamente ad una coppia $(O, \bar{O})$ di punti corrispondenti esistono tre E_1 caratteristici la cui equazione è data da (3)

$$(3)\qquad x_2 f_{2,1}(x_1, x_2) = x_1 f_{2,2}(x_1, x_2)\,.$$

Si dirà che una trasformazione puntuale T è di I, II, III, IV tipo a seconda che gli E_1 caratteristici siano rispettivamente tre distinti, due coincidenti, tre coincidenti oppure indeterminati.

Si può osservare che in una coppia regolare $(O, \bar{O})$ di IV tipo la T è approssimata da una omografia detta *omografia osculatrice* (4).

3 - Gli E_3 bi-caratteristici

È noto che un E_3 *non inflessionale* individua una sola parabola che lo contiene, mentre un generico E_4 *non appartiene* ad alcuna parabola.

---

(1) Cfr. M. Villa **[1]**$_1$, p. 55.

(2) I coefficienti che figurano nei polinomi delle (2) sono delle costanti che soddisfano alle condizioni $a_{hk} = a_{kh}$, $b_{hk} = b_{kh}$, $a_{hkr} = a_{hrk}$, $b_{hkr} = b_{hrk}$, $a_{hkrs} = a_{hksr}$, $b_{hkrs} = b_{hksr}$ dove hrk, $hksr$ è una qualsiasi permutazione su hkr ed $hkrs$ $(h, k, r, s = 1, 2)$.

(3) Cfr. M. Villa **[1]**$_1$, p. 58.

(4) Cfr. M. Villa **[1]**$_2$, p. 313.

Un E_4 si dirà *parabolico* quando esiste una parabola che lo contiene.

Assegnato l'E_3 di centro O

$$x_2 = mx_1 + px_1^2 + qx_1^3\,, \tag{4}$$

la parabola ad esso relativa ha equazione

$$x_2 = mx_1 + h(x_2 - kx_1)^2\,, \tag{5}$$

con $h = q^2(4p)^{-1}$, $k = (mq - 2p)q^{-1}$.

Se si impone all'E_4

$$x_2 = mx_1 + px_1^2 + qx_1^3 + rx_1^4 \tag{6}$$

contenente l'E_3 assegnato di appartenere alla parabola (5) si perviene alla relazione

$$4pr = 5q^2 \tag{7}$$

esprimente la condizione affinchè un E_4 contenente un dato E_3 sia *parabolico.*

Si pone ora la seguente definizione:

Un E_3 contenente un E_2 assegnato si dirà *bi-caratteristico*, se l'E_4 parabolico che lo contiene viene trasformato da T in un E_4 parabolico.

Applicando la (1) ad un E_4 parabolico di centro $\overline{O}$

$$y_2 = \overline{m}y_1 + \overline{p}y_1^2 + \overline{q}y_1^3 + \overline{r}y_1^4 \qquad (4\overline{p}\overline{r} = 5\overline{q}^2)\,, \tag{8}$$

si ottiene l'E_4

$$x_2 = mx_1 + px_1^2 + qx_1^3 + rx_1^4 \qquad \text{con} \tag{9}$$

$(9)_1$ $\quad m = \overline{m}\,,$

$(9)_2$ $\quad p = a\overline{p} + (m\varphi_2 - \psi_2)a^{-1}\,,$

$(9)_3$ $\quad q = a^2\overline{q} + 2\overline{p}\varphi_2 + [p(m\varphi_2' - \psi_2') + m\varphi_3 - \psi_3]a^{-1}\,,$

$(9)_4$ $\quad r = a^3\overline{r} + 3a\overline{q}\varphi_2 + 2p\overline{p}\varphi_2' + [2\overline{p}(\varphi_2^2 + 2a\varphi_3)$
$$+ 2q(m\varphi_2' - \psi_2') + 2p(m\varphi_3' - \psi_3') - p^2\psi_2'' + 2(m\varphi_4 - \psi_4)](2a)^{-1},$$

e dove si è posto

$$(10)_1 \qquad \varphi_h = f_{h,1}(1, m), \qquad \psi_h = f_{h,2}(1, m),$$

$$(10)_2 \qquad \varphi'_h = \frac{d\varphi_h}{dm}, \qquad \psi'_h = \frac{d\psi_h}{dm}, \qquad \psi''_h = \frac{d^2\psi_h}{dm^2} \quad (h = 2, 3, 4),$$

essendo $f_{h,1}(1, m)$, $f_{h,2}(1, m)$ date dalle (2) calcolate per $x_1 = 1$, $x_2 = m$.

L'E_4 dato dalla (9) risulta *parabolico* se e solo se i suoi coefficienti $(9)_1$, $(9)_2$, $(9)_3$, $(9)_4$ soddisfano alla (7) che diviene

$$(11) \qquad 5a^2(m\varphi_2 - \psi_2)\bar{q}^2 + A\bar{q} + B = 0,$$

con A e B funzioni note di $\bar{p}$, $\bar{m}$ che non interessano per il seguito.

Per ogni E_2 fissato di centro $O(\bar{O})$ esistono quindi in generale *due* E_3 *bi-caratteristici se e solo se l'*E_1 *in essi contenuto non è caratteristico.* Infatti la condizione affinchè un E_1 sia caratteristico si può scrivere, tenuto conto della (3) e delle $(10)_1$, $m\varphi_2 - \psi_2 = 0$. Quindi se l'E_1 è caratteristico la (11) diviene in generale un'equazione di primo grado in $\bar{q}$ e si ha un solo E_3 *bi-caratteristico.*

4 - E_3 bi-caratteristici con E_1 caratteristici

Sia T una trasformazione puntuale avente in $\bar{O}(O)$ come retta caratteristica $y_2 = 0$ $(x_2 = 0)$ il che implica, tenuto conto delle (2), (3).

$$(12) \qquad b_{11} = 0.$$

Sia $y_2 = \bar{p}y_1^2$ un E_2 di centro $\bar{O}$ tangente alla retta caratteristica $y_2 = 0$ e $y_2 = \bar{p}y_1^2 + \bar{q}y_1^3$ l'E_3 che lo contiene. L'E_4 *parabolico* ad esso relativo (si ponga in (8) $\bar{m} = 0$) viene trasformato dalla (1) in (9). Tenuto conto delle (2) e delle $(9)_1$, $(9)_2$, $(9)_3$, $(9)_4$ si ha

$$(13) \qquad \begin{aligned} &m = 0, \qquad p = a\bar{p}, \qquad q = [2a\bar{p}(a_{11} - b_{12}) + a^3\bar{q} - b_{111}]a^{-1}, \\ &r = [a^3\bar{p}^2(4a_{12} - b_{22}) + a\bar{p}\big((a_{11} - 2b_{12})^2 + a(2a_{111} - 3b_{112})\big) \\ &\qquad + a^3\bar{q}(3a_{11} - 2b_{12}) + a^5\bar{r} + 2b_{12}b_{111} - ab_{1111}]a^{-2}. \end{aligned}$$

Imponendo all'E_4 la condizione di parabolicità data dalla (7) si perviene all'equazione

$$(14) \qquad \begin{aligned} &a^4\bar{q}[4a\bar{p}(2a_{11} - 3b_{12}) - b_{111}] - 4a^4\bar{p}^3(4a_{12} - b_{22}) - 4a^2\bar{p}^2[a(2a_{111} - 3b_{112}) \\ &- 5(a_{11} - b_{12})^2 + (a_{11} - 2b_{12})^2] - 4a\bar{p}[b_{111}(3b_{12} - 5a_{11}) - ab_{1111}] + 5b_{111}^2 = 0. \end{aligned}$$

che esprime la condizione affinchè, per ogni E_2 fissato, l'E_3 che lo contiene risulti bi-caratteristico. Esso esiste ed è unico per ogni E_2 con $4a\overline{p}(2a_{11}-3b_{12})-b_{111}\neq 0$.

Nel caso in cui si abbia

$$(15)\qquad \begin{aligned} &b_{11}=b_{111}=b_{1111}=0\,, \quad 2a_{11}-3b_{12}=0\,, \quad 4a_{12}-b_{22}=0\,, \\ &a(2a_{111}-3b_{112})+(2b_{12}-a_{11})^2-5(a_{11}-b_{12})^2=0 \end{aligned}$$

la (14) *diviene una identità in $\overline{p}, \overline{q}$* e quindi ogni E_3 di centro $\overline{O}(O)$ contenente un E_1 caratteristico risulta bi-caratteristico. Di conseguenza ad ogni E_4 parabolico che lo contiene corrisponde in T un E_4 parabolico.

L'essere nelle (1) $b_{11}=b_{111}=b_{1111}=0$ permette di asserire che all'E_1 caratteristico corrisponde una curva avente in $\overline{O}(O)$ un flesso di terza specie. Tale E_1 si dirà brevemente di terza specie.

Si può quindi enunciare il seguente teorema.

Condizione necessaria affinchè ogni E_3 di centro $\overline{O}(O)$ sia bi-caratteristico è che E_1 in esso contenuto sia caratteristico e di terza specie.

5 - Equazioni delle trasformazioni puntuali in cui ogni E_3 è bi-caratteristico

Si cercano ora le equazioni delle trasformazioni T in cui ogni E_3 contenente un E_1 caratteristico risulta bi-caratteristico.

Scelto in una T di I tipo $y_1=y_2=0\,(x_1=x_2=0)$ come E_1 caratteristici in $\overline{O}(O)$, in una T di II tipo $y_1=0$ $(x_1=0)$ come E_1 caratteristico semplice, quello doppio essendo $y_2=0$ $(x_2=0)$, ed in una T di III tipo $y_2=0$ $(x_2=0)$ come E_1 caratteristico triplo, tenuto conto della (3), si hanno sugli $a_{h,k}$, $b_{h,k}$ le seguenti condizioni

$$(16)_1\qquad a_{22}=b_{11}=0\,,$$

$$(16)_2\qquad a_{22}=b_{11}=0\,, \quad a_{11}-2b_{12}=0\,,$$

$$(16)_3\qquad b_{11}=a_{11}-2b_{12}=2a_{12}-b_{22}=0\,, \quad a_{22}\neq 0\,.$$

Le corrispondenti trasformazioni, tenuto conto delle (14), (15) sono rappresentate rispettivamente da

$$(17)_1 \qquad \begin{aligned} y_1 &= ax_1 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{111}x_1^3 + \ldots + a_{222}x_2^3 + [4]\,, \\ y_2 &= ax_2 + \tfrac{4}{3}a_{11}x_1x_2 + 4a_{12}x_2^2 + 3b_{112}x_1^2x_2 + 3b_{122}x_1x_2^2 + b_{222}x_2^3 + [4] \end{aligned}$$

con $4a(2a_{111} - 3b_{112}) - b_{12}^2 = 0$, $b_{1111} = 0$, $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$.

$$(17)_2 \qquad \begin{aligned} y_1 &= ax_1 + 2a_{12}x_1x_2 + [3]\,, \\ y_2 &= ax_2 + 4a_{12}x_2^2 + [3]\,, \end{aligned}$$

con $b_{111} = b_{1111} = 0$, $2a_{111} - 3b_{112} = 0$, $a_{12} \neq 0$.

$$(17)_3 \qquad \begin{aligned} y_1 &= ax_1 + a_{22}x_2^2 + [3]\,, \\ y_2 &= ax_2 + [3]\,, \end{aligned}$$

con $2a_{111} - 3b_{112} = 0$, $b_{111} = b_{1111} = 0$.

Infine se una trasformazione T è di IV tipo in $\bar{O}(O)$ per la (3) si ha

$$(18) \qquad a_{22} = b_{11} = 0\,, \qquad a_{11} - 2b_{12} = b_{22} - 2a_{12} = 0\,,$$

e se ogni E_3 è bi-caratteristico è rappresentata da

$$(19) \qquad \begin{aligned} y_1 &= ax_1 + [3], \\ y_2 &= ax_2 + [3], \end{aligned}$$

con $2a_{111} - 3b_{112} = b_{111} = b_{1111} = 0$.

6 - Osservazioni

A seguito di quanto stabilito in **5**, si possono fare le seguenti osservazioni.

O_1. *Per ogni trasformazione in cui l'E_1 caratteristico è di prima specie o di seconda specie esiste un solo E_3 bi-caratteristico che lo contiene oppure nessun E_3 è bi-caratteristico.*

Infatti l'essere $y_2 = 0$ E_1 caratteristico relativo ad un flesso di prima specie o di seconda specie comporta come condizioni $b_{11}=0$, $b_{11}=b_{111}=0$, $b_{1111}\neq 0$ rispettivamente e quindi le condizioni (15) non sono verificate.

O$_2$. *Data una T di* II *oppure di* III *tipo, condizione necessaria affinchè ogni E_3 contenente l'E_1 caratteristico multiplo sia bi-caratteristico è che la relativa proiettività caratteristica sia una affinità.*

Infatti una T subordina fra gli E_1 caratteristici $y_1=0$ $x_1=0$, $y_2=0$ $x_2=0$ rispettivamente, le proiettività caratteristiche (5)

$$y_2=a^2x_2(-b_{22}x_2+a)^{-1}\,,\qquad y_1=a^2x_1(-a_{11}x+a)^{-1}\,. \tag{20}$$

Le (20) si riducono ad affinità per $b_{22}=a_{11}=0$. Tenuto conto delle $(16)_2$ o $(16)_3$ le equazioni della T assumono la forma $(17)_2$ o $(17)_3$.

O$_3$. *Data una T di IV tipo in $\bar{O}(O)$, condizione necessaria affinchè ogni E_3 sia bi-caratteristico è che l'omografia osculatrice sia l'affinità* (6)

$$y_1=ax_1\,,\qquad y_2=ax_2\,. \tag{21}$$

Infatti le equazioni dell'omografia osculatrice in una coppia di punti corrispondenti $(O,\bar{O})$ in cui ogni E_1 è caratteristico sono (6)

$$y_1=-a^2x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2-a)^{-1}\,,\qquad y_2=-a^2x_2(a_{11}x_1+a_{12}x_2-a)^{-1}\,. \tag{22}$$

Tale omografia risulta una affinità se e solo se $a_{11}=a_{12}=0$ e la T, tenuto conto delle condizioni (18) e (15) ha equazioni

$$y_1=ax_1+[3]\,,\qquad y_2=ax_2+[3] \tag{23}$$

come richiesto dalle (19).

Bibliografia

[1] M. Villa: $[\bullet]_1$ *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari* (I). *Intorno del secondo ordine,* Rend. Acc. Naz. Lincei 4 (1948); $[\bullet]_2$ *Lezioni di Geometria,* Vol. II, Cedam, Padova 1965.

---

(5) Cfr. M. Villa [**1**]$_2$, p. 309.
(6) Cfr. M. Villa [**1**]$_2$, p. 313.

Summary

After introducing the notion of parabolic E_4, *we prove that, given a punctual transformation* T *between two affine planes, for every regular pair* $(O, \bar{O})$ *of related points there are, in general, two* E_3 *centered in* O *and* $\bar{O}$ *respectively, such that each parabolic* E_4 *containing, them, is taken through* T *to an parabolic* E_4. *We call such bi-characteristic* E_3. *Finally we determine necessary conditions for existence of only one or infinitely many bi-characteristic* E_3.

* * *