Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 285-292

RENATO MAGGIONI (*)

Il teorema di Chevalley per schemi formali e schemi henseliani (**)

Introduzione

In questo lavoro estendiamo il teorema di Chevalley sui morfismi finiti (cfr. [**2**]$_2$ n. 6.7.1) al caso degli schemi formali e degli schemi henseliani. In entrambi i casi la prova segue dalla seguente proprietà:

(*) Sia X uno schema formale (risp. uno schema henseliano) ed I un suo ideale di definizione. Se X/I è uno schema affine, allora X è affine.

Osserviamo che la proprietà (*) è di facile dimostrazione per gli schemi formali localmente noetheriani mentre nel caso di schemi henseliani essa è stata posta come congettura in [**3**].

Noi proveremo in **1** la proprietà (*) nel caso di uno schema henseliano X localmente noetheriano e localmente di tipo finito su uno schema henseliano affine base, usando un risultato provato in [**6**].

In **2** estendiamo agli schemi henseliani alcuni risultati standard sui morfismi finiti, mentre in **3** deduciamo il teorema di Chevalley per schemi formali e schemi henseliani assieme ad alcuni corollari. Per le nozioni di cui faremo uso senza esplicito riferimento rimandiamo a [**2**]$_{1,2}$, [**3**], [**5**].

L'autore desidera ringraziare il Prof. R. Strano per gli utili suggerimenti forniti durante la preparazione del presente lavoro.

1 – In [**3**] S. Greco e R. Strano hanno posto le seguenti congetture:

(1) Se X è uno schema henseliano ed I è un suo ideale di definizione, allora se X/I è uno schema affine anche X è uno schema henseliano affine.

(*) Indirizzo: Seminario Matematico, V.le A. Doria 6, 95125 Catania, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del CNR. — Ricevuto: 6-IV-1983.

(2) Se $\varphi: X \to Y$ è un morfismo affine di schemi henseliani ed Y è affine, allora X è affine.

(3) (Criterio di Serre). Se X è uno schema henseliano separato e quasi compatto oppure uno schema henseliano con spazio soggiacente noetheriano, allora se $H^1(X, F) = 0$ per ogni ideale quasi coerente F di O_X, X è affine.

In [**6**] Strano ha provato che (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) e che (2) e (3) valgono nel caso di schemi henseliani che siano localmente noetheriani e localmente di tipo finito sopra uno schema henseliano affine ([**6**] def. 2.3). Faremo vedere che in queste ipotesi possiamo dedurre la congettura (1) dalla congettura (2); quindi nell'ipotesi di schemi henseliani localmente noetheriani e localmente di tipo finito sopra uno schema henseliano affine le tre congetture sono tutte vere. Notiamo che tali ipotesi sono verificate nel caso di schemi henseliani di tipo finito sopra un campo base e in particolare per gli schemi henseliani che sono l'henselizzazione di una varietà algebrica lungo una sottovarietà chiusa.

Osserviamo che una proprietà analoga alla congettura (1) è vera per gli schemi formali ([**3**] Remarks 1.23).

Proposizione 1.1. *Sia X uno schema formale localmente noetheriano ed I un suo ideale di definizione. Se X/I è uno schema affine, allora X è uno schema formale affine.*

Dim. Segue subito da [**2**]$_1$ (prop. 10.6.3, prop. 2.3.5).

Teorema 1.2. *Sia X uno schema henseliano localmente noetheriano e localmente di tipo finito sopra uno schema henseliano affine Y; I un suo ideale di definizione. Se X/I è uno schema affine, allora X è uno schema henseliano affine.*

Dim. Poniamo $X/I = \operatorname{Spec}(B)$ e, per ogni $f \in B$, $D(f) = \operatorname{Spec}(B_f)$. Definiamo l'insieme $I = \{f \in B\colon X_f = (D(f), O_{X|D(f)})$ è un aperto affine$\}$.

Vogliamo verificare che I è un ideale e che $I = B$. Da ciò seguirà, essendo $1 \in I$, che X è affine.

Sia $i: X/I \hookrightarrow X$ l'inclusione canonica. Per ogni $x \in X$ sia $U \subseteq X$ un aperto affine tale che $x \in U$; $i^{-1}(U)$ è un aperto di Spec (B) e sia $D(f)$, $f \in B$, un aperto basico tale che $x \in D(f) \subseteq i^{-1}(U)$. Se è $U = \operatorname{Sph}(A, a)$ dove $A = \Gamma(U, O_X)$, $a = \Gamma(U, I)$, risulta $i^{-1}(U) = \operatorname{Spec}(A/a)$, e poichè $\operatorname{Spec}(A/a) \subseteq \operatorname{Spec}(B)$ abbiamo un omomorfismo $\varphi: B \to A/a$; se ${}^a\varphi$ è l'inclusione associata a φ abbiamo la relazione ${}^a\varphi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ ([**2**]$_1$, prop. 1.2.2.2), cioè $\operatorname{Spec}(B_f) \cap \operatorname{Spec}(A/a) = \operatorname{Spec}(A/a)_{\varphi(f)}$ ed essendo $D(f) = \operatorname{Spec}(B_f) \subseteq \operatorname{Spec}(A/a)$ risulta $B_f \simeq (A/a)_{\varphi(f)}$. Abbiamo allora $X_f = \operatorname{Sph}({}^hA_g, a\,{}^hA_g)$ dove con g indichiamo un rilevamento ad A di $\varphi(f)$ e quindi risulta $f \in I$. In definitiva per ogni $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec}(B)$ esiste

$f \notin \boldsymbol{p}$ ed $f \in I$; se quindi I è un ideale sarà $I = B$. Verifichiamo che se $f \in I$ e $g \in B$ allora $fg \in I$. Posto $X_f = \mathrm{Sph}\,(A, a)$ abbiamo un isomorfismo $\varphi\colon B_f \simeq A/a$; preso $\varphi(g/1) \in A/a$ se g' è un suo rilevamento in A risulta $X_{fg} = \mathrm{Sph}\,({}^hA_{g'}, a\,{}^hA_{g'})$. Infatti ${}^hA_{g'}/a\,{}^hA_{g'} \simeq A_{g'}/aA_{g'} \simeq (A/a)_{\varphi(g/1)} \simeq B_{fg}$.

Infine, presi $f, g \in I$, si ha: $X_{f+g} = (X_f \cup X_g) \cap X_{f+g} = X_{f(f+g)} \cup X_{g(f+g)}$. Si vede facilmente che tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte da X_{f+g} e quindi possiamo supporre che sia $X = X_f \cup X_g$, $f, g \in I$.

Poniamo $\Gamma(X, O_X) = A$, $\Gamma(X, I) = a$, $X_f = \mathrm{Sph}\,(A_1, a_1)$, $X_g = \mathrm{Sph}\,(A_2, a_2)$ e quindi $B_f \simeq A_1/a_1$, $B_g \simeq A_2/a_2$. Risulta, come sopra,

$$X_{fg} = \mathrm{Sph}\,({}^hA_{1g'}, a_1{}^hA_{1g'}) = \mathrm{Sph}\,({}^hA_{2f'}, a_2{}^hA_{2f'})\ ;$$

poniamo $A_{12} = {}^hA_{1g'} \simeq {}^hA_{2f'}$, $a_{12} = \Gamma(X_{fg}, I)$ e quindi $B_{fg} \simeq A_{12}/a_{12}$.

Consideriamo il diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d, hook] & a_1 \times a_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & a_{12} \arrow[d, hook] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A_1 \times A_2 \arrow[r] & A_{12}\,.
\end{tikzcd}$$

Se dimostriamo che l'omomorfismo $a_1 \times a_2 \to a_{12}$ è suriettivo avremo, per il lemma del serpente, la successione esatta

$$0 \to A/a \to A_1/a_1 \times A_2/a_2 \to A_{12}/a_{12}\ ,$$

che, confrontata con la successione esatta

$$0 \to B \to B_f \times B_g \to B_{fg} \to 0\ ,$$

fornirà un isomorfismo $A/a \simeq B$.

Sia $\hat{A}_{12}$ il completamento di A_{12} rispetto alla topologia a_{12}-adica, $\hat{a}_{12}$ il completamento di a_{12}; consideriamo le immagini in $\hat{A}_{12}$, mediante gli omomorfismi canonici, degli anelli A_1, A_2, A_{12} e degli ideali a_1, a_2, a_{12}; per semplicità continueremo ad indicare con le stesse lettere tali immagini. Consideriamo il sistema filtrante di sottogruppi di A_{12}: $b_n = (a_1 + a_2) \cap a_{12}^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, e indichiamo con $\sim$ il completamento rispetto a tale topologia.

Dalla successione esatta di sistemi inversi

$$0 \to (a_1 + a_2)/b_n \to a_{12}/b_n \to a_{12}/(a_1 + a_2) \to 0\ ,$$

poichè $\{(a_1 + a_2)/b_n\}$ è un sistema suriettivo, si ottiene la successione esatta

([1], prop. 10.2)

$$0 \to \widetilde{a_1 + a_2} \to \tilde{a}_{12} \to a_{12}/(a_1 + a_2) \to 0 . \tag{1}$$

Dalla successione esatta $0 \to a \to a_1 \times a_2 \to a_1 + a_2 \to 0$, completando rispetto alla topologia indotta da $\{b_n\}$, si trova

$$0 \to \tilde{a} \to \tilde{a}_1 \times \tilde{a}_2 \to \widetilde{a_1 + a_2} \to 0 , \quad \text{e quindi} \quad \widetilde{a_1 + a_2} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \quad \text{in } \hat{A}_{12} .$$

D'altra parte osserviamo che il completamento di X lungo I è uno schema formale localmente noetheriano ([2]$_1$, 10.6.4) ed $\hat{I}$ è un suo ideale di definizione ([2]$_1$, 10.8.3); essendo $\hat{X}/\hat{I} = X/I = \operatorname{Spec}(B)$ sono soddisfatte le ipotesi della prop. 1.1 e quindi $\hat{X}$ è uno schema formale affine. Se poniamo $\hat{X} = \operatorname{Spf}(C, c)$, con $C = \Gamma(\hat{X}, O_{\hat{X}})$, $c = \Gamma(\hat{X}, \hat{I})$ otteniamo la successione esatta $0 \to c \to \hat{a}_1 \times \hat{a}_2 \to \hat{a}_{12} \to 0$, dove $\hat{a}_i = \varprojlim a_i/a_i^n$, $i = 1, 2$; segue che $\hat{a}_{12}$ è la somma delle immagini di $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$ in $\hat{a}_{12}$.

Dal triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} a_i/a_i^n & \to & a_i/a_{12}^n \cap a_i \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & a_{12}/a_{12}^n & \end{array} \qquad i = 1, 2 ,$$

passando al limite inverso, si ottiene il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} \hat{a}_i & \to & \tilde{a}_i \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \hat{a}_{12} & \end{array}$$

da cui segue che $\hat{a}_{12} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = \widetilde{a_1 + a_2}$.

Per la (1) abbiamo così un'inclusione $0 \to \hat{a}_{12} \to \tilde{a}_{12}$.

Osserviamo che risulta $\tilde{b}_1 = \varprojlim \{(a_1 + a_2) \cap a_{12}\}/b_n = \hat{b}_1$ perchè su b_1 le topologie indotte da $\{a_{12}^n\}$, $\{b_n\}$ coincidono.

Risulta allora, dall'isomorfismo canonico $\tilde{a}_{12}/\tilde{b}_1 \simeq a_{12}/b_1$: $\tilde{a}_{12} = a_{12} + \tilde{b}_1 = a_{12} + \hat{b}_1 \subseteq \hat{a}_{12}$ e quindi possiamo concludere che è $\hat{a}_{12} = \tilde{a}_{12}$ e dalla (1) segue $a_{12} = a_1 + a_2$ cioè l'omomorfismo $a_1 \times a_2 \to a_{12}$ è suriettivo.

Acquisito l'isomorfismo $A/a \simeq B$, gli elementi $f, g \in B$ si possono rilevare ad A; siano $f_1, g_1 \in A$ due tali elementi. Consideriamo il morfismo canonico $\psi: X \to \operatorname{Sph}(A, a)$; f_1 e g_1 danno luogo a due aperti affini di $\operatorname{Sph}(A, a)$, precisamente $U = \operatorname{Sph}({}^hA_{f_1}, a\,{}^hA_{f_1})$, $V = \operatorname{Sph}({}^hA_{g_1}, a\,{}^hA_{g_1})$ e risulta $\operatorname{Sph}(A, a) = U \cup V$ perchè gli spazi soggiacenti ad U, V, $\operatorname{Sph}(A, a)$ sono rispettivamente

Spec (B_f), Spec (B_g) e Spec (B). Poichè risulta evidentemente $\psi^{-1}(U) = X_f$, $\psi^{-1}(V) = X_g$, il morfismo ψ è affine. Inoltre, per ipotesi, abbiamo un morfismo $X \to Y$ che è localmente di tipo finito sullo schema henseliano affine Y; tale morfismo si fattorizza $X \to \mathrm{Sph}\,(A, a) \to Y$ e quindi $X \to \mathrm{Sph}\,(A, a)$ è localmente di tipo finito ([**6**], teor. 2.4). Concludendo, il teor. 3.3 di [**6**], di cui sono soddisfatte le ipotesi, assicura che X è uno schema henseliano affine.

Corollario 1.3. *Sia X uno schema henseliano localmente noetheriano; $f: X \to Y$ un morfismo adico e localmente di tipo finito di schemi henseliani, J un ideale di definizione per Y, $I = f^*(J)O_X$, $\bar{f}: X/I \to Y/J$ il morfismo indotto. Il morfismo f è affine se e solo se $\bar{f}$ è affine.*

Dim. Se f è affine si tratta di una facile verifica. Viceversa sia $\bar{f}$ affine, $i: X/I \hookrightarrow X$ e $j: Y/J \hookrightarrow Y$ le immersioni canoniche; preso un ricoprimento affine $\{V_i\}$ di Y, $\{j^{-1}(V_i)\}$ è un ricoprimento affine di Y/J e quindi per ipotesi $\bar{f}^{-1}(j^{-1}(V_i))$ è affine. $(f^{-1}(V_i), O_{X|f^{-1}(V_i)})$ è uno schema henseliano localmente noetheriano, inoltre è localmente di tipo finito sullo schema affine V_i per [**6**], teor. 2.4 5). Per il teor. 1.2 segue che $f^{-1}(V_i)$ è affine.

2 – Dimostriamo ora alcune proprietà standard dei morfismi finiti di schemi henseliani (per la def. vedere [**3**], 1.21, 1.22). Per la definizione e le proprietà dei morfismi finiti di schemi formali rimandiamo a $[\mathbf{2}]_3$, 4.8. La seguente proposizione è l'analoga, per schemi henseliani, della prop. 4.8.**3** di $[\mathbf{2}]_3$.

Proposizione 2.1. *Valgono le seguenti proprietà per gli schemi henseliani ed i morfismi di schemi henseliani:*

(i) *una immersione chiusa* ([**6**], def. 1.4) *è un morfismo finito;*

(ii) *la composizione di due morfismi finiti è un morfismo finito;*

(iii) *se $f: X \to Y$ è un S-morfismo* ([**5**] def. 4.4) *finito allora $f \times 1_{S'}$: $X \times_S S' \to Y \times_S S'$ è finito per ogni estensione $S' \to S$ dello schema base;*

(iv) *se $f: X \to Y$ e $g: X' \to Y'$ sono due S-morfismi finiti è pure finito il morfismo $f \times_S g: X \times_S X' \to Y \times_S Y'$.*

Dim. (i) Segue subito dalla definizione.

(ii) Se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ sono morfismi finiti e K è un ideale di definizione per Z allora $g^*(K)O_Y$ è di definizione per Y perchè g è, in particolare, un morfismo adico; poichè anche f è adico risulta $f^*(g^*(K)O_Y)O_X$ di definizione per X. Poichè $f^*(g^*(K)O_Y)O_X = f^*(g^*(K))O_X = (gf)^*(K)O_X$ abbiamo che gf è un morfismo adico. Sia ora $\{V_i\}$ un ricoprimento affine di Z tale che

$g^{-1}(V_i)$ sia affine e $\Gamma(g^{-1}(V_i), O_Y)$ sia finito su $\Gamma(V_i, O_Z)$; per [**3**] prop. 1.22 (ii) $f^{-1}(g^{-1}(V_i))$ è affine e dalla dimostrazione si desume che $\Gamma(f^{-1}(g^{-1}(V_i)), O_X)$ è finito su $\Gamma(g^{-1}(V_i), O_Y)$; si conclude che $\Gamma((gf)^{-1}(V_i), O_X)$ è finito su $\Gamma(V_i, O_Z)$ e quindi gf è un morfismo finito.

(iii) La prova è analoga a quella della prop. 6.1.5 (iii) in [**2**]$_2$ tenuto conto che, se $f: (A, a) \to (B, aB)$ è un morfismo finito di coppie henseliane ed $(A, a) \to (A', c)$ un morfismo di coppie (quindi $aA' \subseteq c$), allora $(A' \otimes_A B, c(A' \otimes_A B))$ è una coppia henseliana perchè $A' \otimes_A B$ è un'estensione finita di A' ed è il prodotto henseliano di A' e B su A ([**5**] n. 4) perchè $c(A' \otimes_A B) + aB(A' \otimes_A B) = c(A' \otimes_A B)$.

(iv) Poichè $f \times_S g$ è il morfismo composto

$$X \times_S X' \xrightarrow{f \times 1_{X'}} Y \times_S X' \xrightarrow{1_Y \times g} Y \times_S Y', \qquad \text{la tesi segue da (ii) e (iii)}.$$

Proposizione 2.2. *Sia X uno schema henseliano localmente noetheriano; $f: X \to Y$ un morfismo adico e localmente di tipo finito di schemi henseliani, J un ideale di definizione per Y, $I = f^*(J)O_X$, $\bar{f}: X/I \to Y/J$ il morfismo indotto. Il morfismo f è finito se e solo se $\bar{f}$ è finito.*

Dim. Se f è finito, osservato che risulta $X/I = X \times_Y Y/J$, la tesi segue dalla Proposizione 2.1 (iii).

Viceversa sia $\bar{f}$ finito, $\{V_i\}$ un ricoprimento affine di Y; per il Cor. 1.3 abbiamo che $f^{-1}(V_i) \to V_i$ è affine; la tesi segue allora da [**4**] (teor. 1.5).

3 – Siamo ora in grado di provare teoremi del tipo di quello di Chevalley ([**2**]$_2$ teor. 6.7.1) per gli schemi formali e per gli schemi henseliani.

Teorema 3.1. *Siano X uno schema formale affine, Y uno schema formale noetheriano, $f: X \to Y$ un morfismo finito suriettivo di schemi formali. Allora Y è uno schema formale affine.*

Dim. Detto J un ideale di definizione per Y, per la prop. 4.8.1 di [**2**]$_3$ l'ideale $I = f^*(J)O_X$ è di definizione per X ed il morfismo $\bar{f}: X/I \to Y/J$ è finito; sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema di Chevalley per gli schemi usuali X/I ed Y/J ed il morfismo $\bar{f}$ e pertanto Y/J è uno schema affine. Il teorema segue applicando la prop. 1.1.

Teorema 3.2. *Siano X uno schema henseliano affine, Y uno schema henseliano noetheriano di tipo finito sopra uno schema henseliano affine T, $f: X \to Y$*

un morfismo finito suriettivo di schemi henseliani. Allora Y è uno schema henseliano affine.

Dim. Detto J un ideale di definizione per Y, $I = f^*(J)O_X$, il morfismo $\bar{f}: X/I \to Y/J$ è finito per la prop. 2.2. Inoltre X/I è affine ([**3**], prop. 1.22) ed evidentemente Y/J è noetheriano. Applicando il teorema di Chevalley per schemi usuali, di cui sono soddisfatte le ipotesi, si trova che Y/J è affine e quindi anche Y è affine per il teor. 1.2.

Corollario 3.3. *Siano X uno schema henseliano noetheriano di tipo finito sopra uno schema henseliano affine, $\{X_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ un ricoprimento finito di X formato da insiemi chiusi. Perchè X sia affine è necessario e sufficiente che per ogni i esista un sottoschema henseliano chiuso di X che abbia spazio soggiacente X_i e che sia affine.*

Dim. La parte necessaria è ovvia; viceversa sia X' lo schema henseliano $X' = \coprod X_i$; è chiaro che X' è affine e le iniezioni canoniche $X_i \hookrightarrow X$ inducono un morfismo suriettivo $f: X' \to X$; tale morfismo f è finito perchè è adico e per ogni aperto affine $U \subseteq X$, $f^{-1}(U) = \coprod U \cap X_i$ è affine e finito su U. Ne segue che X è affine per il teor. 3.2.

Osserviamo che in uno schema henseliano (X, O_X) ogni sottoinsieme chiuso Z possiede un'unica struttura di schema usuale ridotto; essa è ottenuta da $(Z, O_{X/I|Z})$, dove I è l'ideale canonico di O_X.

Corollario 3.4. *Perchè uno schema henseliano noetheriano X, di tipo finito sopra uno schema henseliano affine, sia affine è necessario e sufficiente che i sottoschemi (usuali) chiusi ridotti aventi spazio soggiacente le componenti irriducibili di X siano affini.*

Osservazione. Usando il teor. 3.1 si possono dimostrare per gli schemi formali corollari analoghi a 3.3. e 3.4.

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass. 1969.

[2] A. Grothendieck et J. Dieudonné: $[\cdot]_1$ *Eléments de Géométrie Algébrique* (I), Springer Verlag, Berlin 1971; $[\cdot]_2$ *Eléments de Géométrie Algébrique* (II), IHES, Publ. Math. **8** (1961); $[\cdot]_3$ *Eléments de Géométrie Algébrique* (III), IHES, Publ. Math. **11** (1961).

[**3**] S. Greco and R. Strano, *Quasi-coherent sheaves over affine Hensel schemes,* Trans. Am. Math. Soc. **268** (1981), 445-465.

[**4**] H. Kurke, G. Pfister, D. Popescu, M. Roczen and T. Mostowski, *Die Approximationseigenschaft localer Ringe,* Lecture Notes in Math. **634**, Springer Verlag, Berlin 1978.

[**5**] F. Mora, *Ideali di definizione e morfismi di schemi henseliani,* Ann. Mat. Pura Appl. **105** (1975), 191-204.

[**6**] R. Strano, *On the affineness of Hensel schemes,* Proc. Trento Conf. Lect. Notes in Pure and Appl. Math., M. Dekker **84** (1983).

Summary

In this paper we prove an extension of the Chevalley theorem on finite morphisms to the case of formal schemes and henselian schemes. In order to do this we prove a conjecture posed in [**3**].

* * *