Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 275-281

MARINA CORVAJA (*)

Analisi delle equazioni costitutive di materiali elettromagnetici con memoria (**)

1 - Introduzione

La teoria termodinamica di materiali con memoria è stata esaurientemente trattata da molti autori, tra i quali Gurtin e Pipkin [**4**], Coleman e Dill $[\mathbf{2}]_{1,2}$, e McCarthy $[\mathbf{5}]_{1,2}$. In particolare Gurtin e Pipkin considerano funzionali dipendenti dalle storie « sommate » della temperatura, ottenendo velocità di propagazione finita per l'onda termica. I lavori di Coleman e Dill forniscono invece un'interpretazione della II legge della termodinamica nel caso di campi elettromagnetici in materiali con memoria. L'analisi di McCarthy concerne poi materiali rigidi con conduzione termica ed elettrica: le equazioni costitutive sono espresse da funzionali delle storie del campo elettrico, del campo di induzione magnetica, della temperatura e funzioni del valore attuale del gradiente di temperatura. L'autore determina quindi le restrizioni poste dalla II legge della termodinamica su tali equazioni.

In analogia con l'analisi di McCarthy, si vogliono esaminare le conseguenze della disuguaglianza di Clausius-Duhem su equazioni costitutive di materiali rigidi con memoria, in presenza di un campo elettromagnetico, nel caso in cui tali equazioni dipendano non solo dalle storie, ma anche dal valore attuale delle variabili indipendenti. Si trovano delle restrizioni sui funzionali costitutivi analoghe a quelle trovate da McCarthy, seguendo un procedimento più semplice, in quanto evita di introdurre il concetto di storia-differenza delle variabili indipendenti. La convenienza di tale metodo risulta giustificata anche

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 3-III-1983.

in base a considerazioni fisiche: infatti adottando una dipendenza analoga, A. Morro [**6**] ha derivato velocità finita di propagazione della temperatura in materiali rigidi.

2 - Funzionali costitutivi

Un processo termodinamico in un corpo rigido, in quiete, che occupa una regione $\mathscr{R}$ dello spazio euclideo, è descritto da 12 funzioni del punto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$ e del tempo t: il campo elettrico $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$, lo spostamento elettrico $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t)$, il campo magnetico $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)$, il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$, la densità di corrente elettrica $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$, la densità di carica elettrica $Q=Q(\boldsymbol{x}, t)$, l'energia specifica interna $\mathscr{E}=\mathscr{E}(\boldsymbol{x}, t)$ per unità di volume, l'entropia specifica $\eta = \eta(\boldsymbol{x}, t)$ per unità di volume, la temperatura $\theta = \theta(\boldsymbol{x}, t) > 0$, il flusso di calore $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$, il flusso di entropia $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, t)$, il calore $r = r(\boldsymbol{x}, t)$, assorbito dall'esterno, per unità di volume.

Queste 12 funzioni costituiscono un processo termodinamico se e solo se sono compatibili con le equazioni di Maxwell e con la legge di bilancio dell'energia.

Se si indica con $\boldsymbol{\Phi}$ e r/θ rispettivamente il flusso e la produzione di entropia, la disuguaglianza di Clausius-Duhem afferma che in ogni processo ammissibile su $\mathscr{R}$

$$\gamma(\boldsymbol{x}, t) = \dot{\eta} - \frac{r}{\theta} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} \geqslant 0 \,, \tag{2.1}$$

ossia la produzione di entropia γ deve essere non negativa $\forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{R}$. Utilizzando la legge di bilancio dell'energia, introducendo una nuova energia specifica interna $\overline{\mathscr{E}} = \mathscr{E} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$, dopo aver definito l'energia specifica libera $\psi = \overline{\mathscr{E}} - \theta\eta$ e un vettore $\boldsymbol{k}$ che generalizza il flusso di entropia $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{q}/\theta + \boldsymbol{k}$ (1), la disuguaglianza (2.1) assume la forma seguente

$$\theta\gamma = -\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} - \boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}} + \theta \operatorname{div} \boldsymbol{k} + \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} - \frac{1}{\theta}\, \boldsymbol{q}\cdot\theta_{,i} \geqslant 0 \,. \tag{2.2}$$

Essendo Q ed r determinate rispettivamente dall'equazione di Maxwell $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = Q$ e dalla legge di bilancio dell'energia, si suppone che il materiale sia tale che in ogni punto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$ ed in ogni istante t, l'energia specifica

(1) Si vuole infatti supporre una più generale equazione costitutiva per il flusso di entropia, in conformità con il metodo di I. Müller [**7**].

libera per unità di volume $\psi(\boldsymbol{x}, t)$, l'entropia specifica per unità di volume $\eta(\boldsymbol{x}, t)$, lo spostamento elettrico $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t)$, il campo magnetico $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)$, la densità di corrente elettrica $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$, il flusso di calore $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$ ed il vettore $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}, t)$ siano funzionali della storia $\boldsymbol{E}^t(\boldsymbol{x}, \cdot)$ del campo elettrico, della storia $\boldsymbol{B}^t(\boldsymbol{x}, \cdot)$ del campo di induzione magnetica, della storia $\theta^t(\boldsymbol{x}, \cdot)$ della temperatura e funzioni del valore attuale delle stesse variabili, oltre a quello del gradiente di temperatura $\partial\theta(\boldsymbol{x}, t)/\partial\boldsymbol{x}$ (²). E pertanto siano funzionali del tipo

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}\{E^t_l(\boldsymbol{x}, \cdot), B^t_m(\boldsymbol{x}, \cdot), \theta^t(\boldsymbol{x}, \cdot);\ E_n(\boldsymbol{x}, t), B_p(\boldsymbol{x}, t), \theta(\boldsymbol{x}, t), \theta_{,i}(\boldsymbol{x}, t)\}\,,$$

dove $\mathscr{G}$ rappresenta i funzionali di energia libera $\mathscr{F}$, di entropia specifica $\mathscr{S}$, di spostamento elettrico $\mathscr{D}_i$, di campo magnetico $\mathscr{H}_i$, di densità di corrente elettrica $\mathscr{J}_i$, di flusso di calore $\mathscr{Q}_i$ e del vettore $\boldsymbol{k}$: $\mathscr{K}_i$.

È conveniente adottare la notazione più compatta usata da McCarthy, ponendo

$$\{\Lambda_\alpha\} = (E_i, B_j, \theta)\,, \qquad \{\Sigma_\alpha\} = (-D_i, H_j, -\eta)\,,$$

dove Δ_μ, $\mu = 1, \ldots, 7$, indica la terna ordinata (S_i, T_j, λ) e dove S_i appartiene allo spazio tridimensionale dei vettori polari $\mathscr{V}_{(p)}$, T_j allo spazio tridimensionale dei vettori assiali $\mathscr{V}_{(a)}$ e λ è uno scalare. Le equazioni costitutive si possono pertanto scrivere così

$$(2.3)_1 \qquad \psi(\boldsymbol{x}, t) = \mathscr{F}\{\Lambda^t_\alpha(\boldsymbol{x}, \cdot); \Lambda_\beta(\boldsymbol{x}, t), \Lambda_{\gamma,i}(\boldsymbol{x}, t)I_\gamma\}\,,$$

$$(2.3)_2 \qquad \Sigma_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \mathscr{C}_\alpha\{\Lambda^t_\beta(\boldsymbol{x}, \cdot); \Lambda_\gamma(\boldsymbol{x}, t), \Lambda_{\delta,k}(\boldsymbol{x}, t)I_\delta\}\,,$$

$$(2.3)_3 \qquad J_i(\boldsymbol{x}, t) = \mathscr{J}_i\{\Lambda^t_\alpha(\boldsymbol{x}, \cdot); \Lambda_\beta(\boldsymbol{x}, t), \Lambda_{\gamma,i}(\boldsymbol{x}, t)I_\gamma\}\,,$$

$$(2.3)_4 \qquad q_i(\boldsymbol{x}, t) = \mathscr{Q}_i\{\Lambda^t_\alpha(\boldsymbol{x}, \cdot); \Lambda_\beta(\boldsymbol{x}, t), \Lambda_{\gamma,i}(\boldsymbol{x}, t)I_\gamma\}\,,$$

$$(2.3)_5 \qquad K_i(\boldsymbol{x}, t) = \mathscr{K}_i\{\Lambda^t_\alpha(\boldsymbol{x}, \cdot); \Lambda_\beta(\boldsymbol{x}, t), \Lambda_{\gamma,i}(\boldsymbol{x}, t)I_\gamma\}\,.$$

Sia $h(s)$ una funzione di s positiva, monotona, decrescente, continua definita su $[0, \infty)$ e tale che $\lim\limits_{s\to\infty} s^{1/2+\delta}h(s) = 0$ per qualche $\delta > 0$ piccolo; sia poi $\Gamma_\alpha(s)$, $s \in [0, \infty)$, un vettore di $\mathscr{V}_{(7)}$ tale che la sua h-norma $\|\Gamma_\alpha\|_h = \sqrt{\int_0^\infty \|\Gamma_\alpha(s)\|^2 h^2(s)\, ds}$ esista finita, dove « $\|\ \|$ » è la norma naturale in $\mathscr{V}_{(7)}$.

(²) Tale formulazione dei funzionali costitutivi risulta pienamente in accordo con le relazioni costitutive della teoria elettromagnetica sviluppata da altri autori (cfr. [**2**]₁, [**3**], [**5**], [**8**]).

Si suppone ora che i funzionali costitutivi sopra elencati siano derivabili secondo Fréchet rispetto alle storie Λ^t_α nel senso della $\| \|_h$, ossia

$$\begin{aligned}&\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha + \Pi_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\}\\ &= \mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\} + \delta^*\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma|\Pi_\delta\}\\ &+ \tfrac{1}{2}\delta^{*2}\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma|\Pi_\delta, \Pi_\mu\} + O(\|\Pi_\alpha\|^2_h)\,,\end{aligned}$$

per ogni Λ^t_α, Π_α appartenenti allo spazio di Hilbert S_h, costituito dall'insieme dei Γ_α per cui l'h-norma esista finita.

Si fa poi l'ipotesi ulteriore che il differenziale di Frèchet $\delta^*\mathscr{G}\{\sim\}$ sia una funzione continua dei suoi argomenti e sia lineare in Π_δ.

Inoltre si suppone che $\mathscr{G}$ ammetta derivate parziali, ossia che $\forall \Lambda^t_\alpha \in S_h$ sia continuo e due volte differenziabile in Λ_β e $\Lambda_{\gamma,k}I_\gamma$; quindi per ogni Ω_β e per ogni u_k si abbia

$$\begin{aligned}&\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta + \Omega_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\}\\ &= \mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\} + \partial^*_{\Lambda\delta}\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\}\Omega_\delta\\ &+ \tfrac{1}{2}\partial^*_{\Lambda\mu}\partial^*_{\Lambda\delta}\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\}\Omega_\delta\Omega_\mu + O(\|\Omega_\nu\|)^2)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma + u_k\}\\ &= \mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\} + \partial^*_{\Lambda\delta,iI\delta}\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\}u_i\\ &+ \tfrac{1}{2}\partial^*_{\Lambda\mu,jI\mu}\partial^*_{\Lambda\delta,iI\delta}\mathscr{G}\{\Lambda^t_\alpha; \Lambda_\beta, \Lambda_{\gamma,k}I_\gamma\}u_iu_j + O(|u_k|^2)\,,\end{aligned}$$

in cui le derivate $\partial^*_{\Lambda\delta}$, $\partial^*_{\Lambda\mu}\partial^*_{\Lambda\delta}$, $\partial^*_{\Lambda\delta,iI\delta}$, $\partial^*_{\Lambda\mu,jI\mu}\partial^*_{\Lambda\delta,iI\delta}$ sono continue in tutti i loro argomenti. A questo punto si possono calcolare le derivate dei funzionali di energia libera e di flusso di entropia

$$\dot{\psi} = \delta^*\mathscr{F}\{\sim|\dot{\Lambda}^t_\alpha\} + \partial^*_{\Lambda\alpha}\mathscr{F}\{\sim\}\dot{\Lambda}_\alpha + \partial^*_{\Lambda\delta,jI\delta}\mathscr{F}\{\sim\}\dot{\Lambda}_{\alpha,j}I_\alpha\,, \tag{2.4}$$

$$K_{i,i} = \delta^*\mathscr{K}_i\{\sim|\Lambda^t_{\alpha,i}\} + \partial^*_{\Lambda\alpha}\mathscr{K}_i\{\sim\}\Lambda_{\alpha,i} + \partial^*_{\Lambda\delta,jI\delta}\mathscr{K}_i\{\sim\}\Lambda_{\alpha,ij}I_\alpha\,. \tag{2.5}$$

3 - Conseguenze della disuguaglianza di Clausius-Duhem

Introdotti i funzionali (2.3) e le espressioni appena trovate (2.4), (2.5), per $\dot\psi$ e $k_{i,i}$ nella disuguaglianza (2.2), essa diviene

$$\theta\gamma = [\mathscr{C}_\alpha\{\sim\} - \partial^*_{A\alpha}\mathscr{F}\{\sim\}]\dot A_\alpha - \delta^*\mathscr{F}\{\sim|\dot A^t_\alpha\}$$

$$+ \theta[\partial^*_{A\alpha}\mathscr{K}_i\{\sim\} - \frac{1}{\theta^2}\mathscr{Q}_i I_\alpha]A_{\alpha,i} + \theta\delta^*\mathscr{K}_i\{\sim|A^t_{\alpha,i}\}$$

$$- \partial^*_{A\delta,j I\delta}\mathscr{F}\{\sim\}\dot A_{\alpha,j}I_\alpha + \theta\partial^*_{A\delta,j I\delta}\mathscr{K}_i\{\sim\}A_{\alpha,ij}I_\alpha + \mathscr{J}_i E_i \geqslant 0\,.$$

Quest'ultima dev'essere verificata da un certo insieme dei funzionali (2.3), tali da soddisfare contemporaneamente le seguenti equazioni di Maxwell

$$\mathscr{E}_{ijk}E_{k,j} = -\dot B_i\,, \qquad B_{i,i} = 0\,, \qquad \mathscr{E}_{ijk}H_{k,j} = \dot D_i + J_i\,. \tag{3.1}$$

Allora

$$\begin{aligned}\theta\gamma = &-\{D_i + \partial^*_{E_i}\mathscr{F}\}\dot E_i + \{H_i - \partial^*_{B_i}\mathscr{F}\}\dot B_i - \{\eta + \partial^*_0\mathscr{F}\}\dot\theta \\ &- \delta^*_{E_i}\mathscr{F}\{\sim|\dot E^t_i\} - \delta^*_{B_i}\mathscr{F}\{\sim|\dot B^t_i\} - \delta^*_0\mathscr{F}\{\sim|\dot\theta^t\} \\ &+ \theta\{\partial^*_{E_j}\mathscr{K}_i E_{j,i} + \partial^*_{B_j}\mathscr{K}_i B_{j,i} + \partial^*_0\mathscr{K}_i\theta_{,i} - \frac{1}{\theta^2}\mathscr{Q}_i\theta_{,i}\} \\ &+ \theta\delta^*_{E_j}\mathscr{K}_i\{\sim|E^t_{j,i}\} + \theta\,\delta^*_{B_j}\mathscr{K}_i\{\sim|B^t_{j,i}\} \\ &+ \theta\delta^*_0\mathscr{K}_i\{\sim|\theta^t_{,i}\} - \partial^*_{\theta,j}\mathscr{F}\dot\theta_{,j} + \theta\partial^*_{\theta,j}\mathscr{K}_i\theta_{,ij} \\ &+ \mathscr{J}_i E_i + l_s(\mathscr{E}_{spq}H_{q,p} - \dot D_s - \mathscr{J}_s) \geqslant 0\,,\end{aligned} \tag{3.2}$$

dove l_s è un moltiplicatore di Lagrange incognito (per la determinazione di quest'ultimo si veda [**5**]$_2$). Dalla (3.1) segue poi $E_{p,q} = E_{(p,q)} + \frac{1}{2}\mathscr{E}_{pqr}\dot B_r$ e allora risulta

$$\partial^*_{E_j}\mathscr{K}_i E_{j,i} = \partial^*_{E(i}\mathscr{K}_{j)}E_{(j,i)} + \tfrac{1}{2}\mathscr{E}_{jim}\partial^*_{E[j}\mathscr{K}_{i]}\dot B_m\,, \tag{3.3}$$

)3.4) $$l_s\mathscr{E}_{spq}H_{q,p} = l_m\mathscr{E}_{mpq}\partial^*_{E_i}H_q E_{(i,p)} + l_m\mathscr{E}_{mpq}\partial^*_{E_i}H_q\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_{ipr}\dot B_r\,.$$

Si può utilizzare ora il seguente

Lemma. *Sia $f^t(\cdot)$ una qualunque storia differenziabile tale che $f^t(\cdot)$ ed $\dot f^t(\cdot)$ appartengano ad S_h. Allora, assegnato un qualunque $\varepsilon > 0$, esiste una storia $\hat f^t(\cdot)$ chiusa ad $f^t(\cdot)$, nel senso che $\hat f(t)$, $\hat f^t(\cdot)$ e la sua derivata $\dot{\hat f}{}^t(\cdot)$ abbiano le proprietà $\hat f(t) = f(t)$, $\|\hat f^t(\cdot) - f^t(\cdot)\| < \varepsilon$, $\|\dot{\hat f}{}^t(\cdot) - \dot f^t(\cdot)\| < \varepsilon$, ma per la quale*

$\dot{f}(t)$ *sia arbitraria, cioè* $\dot{f}(t) = u$, *dove* u *è un elemento qualunque appartenente allo spazio reale oppure a quello dei vettori.*

Si omette la dimostrazione, perchè analoga a quella data da Coleman ([**1**], pag. 17).

La (3.2) deve essere pertanto verificata da valori arbitrari di $\dot{E}_i$, $\dot{B}_i$, $\dot{\theta}$, $\dot{\theta}_{,j}$ e quindi si deducono le seguenti relazioni, mediante le (3.3), (3.4):

$$
\begin{aligned}
D_i &= -\partial^*_{E_i}\mathscr{F} - l_s\partial^*_{E_i}D_s\,, \\
H_i &= \partial^*_{B_i}\mathscr{F} + l_s\partial^*_{B_i}D_s + \tfrac{1}{2}\mathscr{E}_{irs}(\theta\partial^*_{E[s}\mathscr{K}_{r]} + l_m\mathscr{E}_{mrq}\partial^*_{E_s}H_q)\,, \\
\eta &= -\partial^*_{\theta}\mathscr{F} - l_s\partial^*_{\theta}D_s\,, \qquad \partial^*_{\theta,j}\mathscr{F} + l_s\partial^*_{\theta,j}D_s = 0\,,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

mentre la disuguaglianza si riduce a

$$
\begin{aligned}
\theta\gamma = &-\delta^*_{E_i}\mathscr{F}\{\sim\dot{E}^t_i\} - \delta^*_{B_j}\mathscr{F}\{\sim|\dot{B}^t_j\} - \delta^*_{\theta}\mathscr{F}\{\sim|\dot{\theta}^t\} \\
&+ \theta\partial^*_{E(s}\mathscr{K}_{j)}E_{(j,s)} + \theta\partial^*_{B_j}\mathscr{K}_iB_{j,i} + \theta\partial^*_{\theta}\mathscr{K}_i\theta_{,i} \\
&- \frac{1}{\theta}\,\mathscr{Q}_i\theta_{,i} + \theta\delta^*_{E_j}\mathscr{K}_i\{\sim|E^t_{j,i}\} + \theta\delta^*_{B_j}\mathscr{K}_i\{\sim|B^t_{j,i}\} \\
&+ \theta\delta^*_{\theta}\mathscr{K}_i\{\sim|\theta^t_{,i}\} + \theta\partial^*_{\theta,j}\mathscr{K}_i\theta_{,ij} + \mathscr{J}_iE_i \\
&+ l_m\mathscr{E}_{mrq}\partial^*_{E_s}H_qE_{(s,r)} - l_s\mathscr{J}_s \geqslant 0\,.
\end{aligned}
$$

Considerando quindi relazioni costitutive rappresentate da funzionali dipendenti anche dal valore attuale delle variabili indipendenti ed imponendo che risulti verificata la disuguaglianza di Clausius-Duhem, si ottengono delle restrizioni su tali funzionali in cui compaiono le derivate rispetto al valore attuale delle variabili indipendenti, ossia ad esempio $\partial^*_{E_i}\mathscr{G}\{E^t_l, B^t_m, \theta^t;\, E_n, B_p, \theta, \theta_{,r}\}$.

Secondo McCarthy, invece, si segue un procedimento in cui i funzionali costitutivi non dipendano dal valore attuale del campo elettrico, del campo di induzione magnetica e della temperatura, ossia che siano della forma

$$
\mathscr{G} = \mathscr{G}\{E^t_i, B^t_j, \theta^t;\, \theta_{,k}\} = \mathscr{G}\{E^t_{id}, B^t_{jd}, \theta^t_d;\, E_m, B_n, \theta, \theta_{,r}\}\,.
$$

In tal modo si ottengono delle relazioni analoghe per lo spostamento elettrico, l'entropia specifica, ed il campo magnetico in cui è presente però $D_{E_i}\mathscr{G} = \partial_{E_i}\mathscr{G} - \nabla_{E_i}\mathscr{G}$.

Ma la definizione della storia-differenza $f^t_d(s)$ e quella del funzionale $\nabla_{E_i}\mathscr{G}$ [**5**]$_1$, portano a concludere che $D_{E_i}\mathscr{G}$ risulta coincidente con la derivata $\partial^*_{E_i}\mathscr{G}$, fatta rispetto al valore attuale della variabile indipendente.

Bibliografia

[1] B. D. Coleman, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal. **17** (1964), 1-46.

[2] B. D. Coleman and E. H. Dill: [•]$_1$ *Thermodynamic restrictions on the constitutive equations of electromagnetic theory*, Z. Angew. Math. Phys. **22** (1971), 691-702; [•]$_2$ *On the thermodynamics of electromagnetic fields in materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal. **41** (1971), 132-162.

[3] D. Graffi, *Sui problemi della ereditarietà lineare*, Nuovo Cimento **5** (1928), 53-71.

[4] M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Arch. Rational Mech. Anal. **31** (1968), 113-126.

[5] M. F. McCarthy: [•]$_1$ *Thermodynamics of electromagnetic materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal. **41** (1971), 333-353; [•]$_2$ *Correction: Thermodynamics of electromagnetic materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 395-397.

[6] A. Morro, *Temperature waves in rigid materials with memory*, Meccanica **12** (1977), 73-77.

[7] I. Muller, *On the entropy inequality*, Arch. Rational Mech. Anal. **26** (1967), 118-141.

[8] R. A. Toupin and R. S. Rivlin, *Linear functional electromagnetic constitutive relations and plane waves in a hemihedral isotropic material*, Arch. Rational Mech. Anal. **6** (1960), 188-197.

Summary

The constitutive equations of electromagnetic material with memory are supposed to be expressed by functionals depending on the histories and on the present value of the indipendent variables. The restrictions which the Clausius-Duhem inequality places on these equations are the same of those deduced by McCarthy using a different approach.

* * *