Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 269-274

MARZIANO DOZIO e MARIO PEDRAZZOLI (*)

Spazi totalmente coerenti di operatori (**)

1 - Definizione di totale coerenza; suo significato nella teoria dei circuiti

Indichiamo con X uno spazio vettoriale e con Ψ un sottospazio di End X.

Def. Si dirà che Ψ *è uno spazio totalmente coerente di operatori di* X se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(A) Esiste un'applicazione surgettiva appartenente a Ψ.

(B) Data comunque una matrice $H \in M((\nu+1)\times\nu; \Psi)$, l'applicazione $l_H: X^\nu \to X^{\nu+1}$; $\boldsymbol{x} \to H\boldsymbol{x}$ non è surgettiva.

Nel seguito del paragrafo esamineremo il significato della nozione di totale coerenza, motivandone l'introduzione per la sua importanza nella teoria dei circuiti.

In un circuito elettrico, la struttura geometrica descritta dal grafo soggiacente ha il ruolo di mantenere in relazione di dipendenza lineare opportuna i valori delle tensioni sui rami e analogamente i valori delle correnti, in modo tale che gli spazi vettoriali delle tensioni e delle correnti verifichino il teorema di Tellegen.

In [4]$_1$ viene descritto un contesto geometrico ed algebrico nel quale tale teorema risulta formalizzabile al livello di generalità richiesto dalla diversità delle situazioni che da esso dipendono. Il procedimento seguito consiste nell'associare a ciascun grafo G, i cui rami $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ sono dotati di un orientamento, lo spazio vettoriale delle applicazioni dell'insieme dei suoi rami orien-

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini», Via Bonanno 25B, 56100 Pisa, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. e del G.N.A.F.A. (C.N.R.). Ricevuto: 2-III-1983.

tati in $\boldsymbol{R}$; nell'individuare in tale spazio, isomorfo ad $\boldsymbol{R}^n$, due sottospazi vettoriali, l'uno V costituito dalle $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$ che, interpretando v_λ come tensione su ϱ_λ, verificano il principio di Kirchhoff relativo alle maglie di G, l'altro I costituito dalle $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$ che, interpretando i_λ come corrente su ϱ_λ, verificano il principio di Kirchhoff relativo ai nodi di G; nel dimostrare infine che V e I risultano l'uno l'ortogonale dell'altro nello spazio Euclideo $\boldsymbol{R}^n$ (teorema di Tellegen).

Tenuto conto di ciò, in $[4]_2$ la nozione di grafo viene generalizzata (per quanto concerne le applicazioni ai circuiti elettrici) con la nozione di grafo algebrico (o metacircuito) come terna $G = (\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}; V, I)$ ove $\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}$ è un insieme finito con n elementi e V, I sono sottospazi, l'uno l'ortogonale dell'altro dello spazio Euclideo $\boldsymbol{R}^n$: $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ vengono detti rami di G, e V, I spazi rispettivamente delle tensioni e delle correnti costanti. Per ciascun grafo algebrico vengono descritte strutture che lo realizzano circuitalmente.

Inoltre in $[4]_2$, per un grafo algebrico $G = (\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}; V, I)$ viene introdotta la nozione di tensioni canoniche $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_n$ e correnti canoniche $\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_n$ come proiezioni su V, I rispettivamente degli elementi della base canonica di $\boldsymbol{R}^n$. Le nozioni di fascio (cut-set), maglia, albero, coalbero vengono quindi caratterizzate in termini di tensioni e correnti canoniche.

Sempre in $[4]_2$ viene introdotta la nozione di grafo algebrico di tipo geometrico: si tratta di grafi algebrici che, per le loro affinità ai grafi, appaiono particolarmente significativi in quanto ogni loro realizzazione canonica utilizza solo trasformatori banali, ossia di coefficienti a valori in $\{-1, 0, 1\}$: in tali grafi algebrici, comunque essi vengano canonicamente realizzati, il ruolo svolto dai trasformatori in ciascuna realizzazione non è mai quello di fornire coefficienti generici nelle relazioni di dipendenza lineare, bensì è solo quello di consentire la realizzazione di fasci e di maglie algebricamente compatibili, ma geometricamente incompatibili.

In [2] vengono fornite due caratterizzazioni dei grafi algebrici di tipo geometrico: una prima caratterizzazione è data in termini di esistenza di opportune tensioni di fascio e correnti di maglia; una seconda caratterizzazione è data in termini della struttura delle ridotte modulo 2 delle tensioni e delle correnti del grafo a valori in $\{-1, 0, 1\}$. L'importanza di tali caratterizzazioni consiste nel ridurre ad un numero finito le verifiche da effettuare per controllare la geometricità di un grafo algebrico.

In [3] viene introdotta la nozione di vincolo lineare in un grafo algebrico $G = (\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}; V, I)$ come coppia $(\boldsymbol{\chi}, g)$ con $\boldsymbol{\chi} \in \boldsymbol{R}^n$, $g \in \boldsymbol{R}$. Viene mostrato come tale nozione consenta di trattare le relazioni lineari tra i valori delle tensioni e delle correnti costanti nei singoli rami di G e come l'uso delle $\boldsymbol{\theta}_\lambda$, $\boldsymbol{\gamma}_\lambda$ consenta di pervenire a loro rappresentazioni canoniche; viene quindi fornita la caratterizzazione delle tensioni e delle correnti canoniche in termini di vincoli lineari.

Se X è uno spazio vettoriale (in particolare uno spazio di funzioni dipendenti dal tempo), in [6] viene introdotto l'insieme V_X (risp.: I_X) delle $(x_1, \ldots, x_n)^T \in X^n$ tali che per ogni $(i_1, \ldots, i_n)^T \in I$ (risp.: $(v_1, \ldots, v_n)^T \in V$) risulta $\sum_1^n{}_\lambda\, i_\lambda x_\lambda = 0$ (risp.: $\sum_1^n{}_\lambda\, v_\lambda x_\lambda = 0$). Ovviamente, qualora X sia uno spazio di funzioni dipendenti dal tempo, V_X è l'insieme delle $(x_1, \ldots, x_n)^T$ tali che, per ogni istante t, $(x_1(t), \ldots, x_n(t))^T \in V$. Analoga interpretazione per I_X.

Inoltre, dato un sottospazio Ψ di $\operatorname{End} X$, viene introdotta la nozione di Ψ-vincolo lineare in G, quale coppia (ψ, y), ove $\psi \in \operatorname{Hom}(V_X \oplus I_X, X)$ è tale che esistono $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \chi_1, \ldots, \chi_n \in \Psi$ tali che $\psi(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\upsilon}) = \sum_1^n{}_\lambda\, \varphi_\lambda(\omega_\lambda) + \sum_1^n{}_\mu\, \chi_\mu(v_\mu)$; una coppia $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\upsilon}) \in V_X \oplus I_X$ verifica (ψ, y) se $\psi(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\upsilon}) = y$.

Sempre in [6], vengono introdotte nozioni di indipendenza per una famiglia di Ψ-vincoli lineari in G, $\{(\psi_1, y_1), \ldots, (\psi_s, y_s)\}$, la più forte delle quali, qui riferita come totale indipendenza, consiste nel considerare $(\psi_1, y_1), \ldots, (\psi_s, y_s)$ indipendenti qualora, per ogni $z_1, \ldots, z_s \in X$, sia risolvibile il sistema

$$\psi_1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\upsilon}) = z_1, \ldots, \psi_s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\upsilon}) = z_s .$$

Qualora i vincoli $(\psi_1, y_1), \ldots, (\psi_s, y_s)$ non siano indipendenti (in particolare totalmente indipendenti), si pone il problema di appurare se tale singolarità:

(i) dipenda dai particolari parametri che definiscono $\psi_1, \ldots, \psi_s$,

(ii) sia indipendente dai particolari parametri che definiscono $\psi_1, \ldots, \psi_s$, mentre dipenda dalla geometria di $\psi_1, \ldots, \psi_s$, ovvero dagli insiemi dei rami Λ_j, M_j le cui tensioni e correnti rispettivamente siano interessate da ψ_j.

Infine in [6] viene fornita la caratterizzazione geometrica dei sistemi la cui singolarità è del tipo (ii), sotto opportune ipotesi su X e Ψ, e viene provato che tali ipotesi sono anche necessarie a tale caratterizzazione.

Nel caso della totale indipendenza il legame tra X e Ψ sotto il quale sussiste la caratterizzazione suddetta è che Ψ sia uno spazio totalmente coerente di operatori di X.

Scopo del presente lavoro è quello di individuare esempi particolarmente significativi di spazi totalmente coerenti di operatori; riteniamo però opportuno verificare con esempi che non tutti gli spazi di operatori sono totalmente coerenti.

2 - Esempi di spazi non totalmente coerenti di operatori

Si osservi innanzitutto che, se lo spazio X ha dimensione finita, condizione necessaria e sufficiente affinchè un sottospazio Ψ di $\mathrm{End}\,X$ sia totalmente coerente è che Ψ possieda un automorfismo di X.

Se $\dim X = \infty$, $\mathrm{End}\,X$ non è totalmente coerente, essendo, per ogni $\nu \in \boldsymbol{N}$, X^ν isomorfo ad $X^{\nu+1}$.

Se X è uno spazio di Hilbert separabile, lo spazio vettoriale degli operatori limitati di X non è totalmente coerente. Infatti, sia $X = l^2$ e sia $H \in M(2\times 1; \mathrm{End}\, l^2)$ tale che $H = (k_1, k_2)^T$, ove $k_1(\{x_n\}) = \{x_{2h-1}\}$, $k_2(\{x_n\}) = \{x_{2h}\}$. L'applicazione $l_H\colon l^2 \to (l^2)^2$; $\{x_n\} \mapsto H\{x_n\}$ è surgettiva: infatti, soluzione del sistema $H\{x_n\} = (\{v_n\}, \{w_n\})^T$ è la successione $\{x_n\}$ definita da $x_n = v_h$ per $n = 2h - 1$ e $x_n = w_h$ per $n = 2h$.

3 - Operatori compatti e totale coerenza

Qui X è uno spazio di Banach e $K(X)$ è lo spazio vettoriale degli operatori compatti di X in sè.

1 - Osservazione. *Se* $k \in K(X)$ *e* $\mathrm{Im}\,k$ *è chiusa, allora* $\dim \mathrm{Im}\,k < \infty$ (cfr. [7]).

2 - Lemma. *Siano* $k_1, \dots, k_n \in K(X)$; *allora* $k_1 \times \dots \times k_n \in K(X^n)$.

Dim. Siano S, Z le palle unitarie rispettivamente in X e X^n; essendo $Z \subset S^n$, si ha $\overline{(k_1 \times \dots \times k_n)(Z)} \subset \overline{(k_1 \times \dots \times k_n)(S^n)} = \overline{k_1(S) \times \dots \times k_n(S)} = \overline{k_1(S)} \times \dots \times \overline{k_n(S)}$; dalla compattezza di $\overline{k_j(S)}$ $j \in \{1, \dots, n\}$, segue l'asserto.

3 - Lemma. *Sia* $(k_1, \dots, k_n)^T \in (K(X))^n$; *l'applicazione* $X^n \to X$; $(x_1, \dots, x_n)^T \mapsto k_1(x_1) + \dots + k_n(x_n)$ *è compatta.*

Dim. L'asserto segue da 2, tenuto conto del fatto che l'addizione in X è continua.

4 - Teorema. *Se* $\dim X = \infty$, $K(X)$ *soddisfa la proprietà* (B).

Dim. L'asserto segue da 1, tenuto conto di 3.

5 - Corollario. $K(X)$ *è totalmente coerente se e solo se* X *ha dimensione finita.*

Sia $h \in \mathrm{End}\,X$ e sia T un sottospazio vettoriale di $K(X)$.

6 - Teorema. *Se* $\dim X = \infty$, $\boldsymbol{R}h + T$ *soddisfa la proprietà* (B).

Dim. Sia $H = Ah + K$ ove $A \in M((\nu+1)\times\nu; \boldsymbol{R})$, $K \in M((\nu+1)\times\nu; T)$. Essendo le $\nu+1$ righe di A elementi di $\boldsymbol{R}^\nu$, esiste una loro combinazione lineare nulla a coefficienti reali $c_1, \dots, c_{\nu+1}$ non tutti nulli. Moltiplicando a sinistra H per $(c_1, \dots, c_{\nu+1})$, si ottiene una riga ad elementi in T; l'asserto segue dalla applicazione di 4 a tale riga, tenuto conto del fatto che $(c_1, \dots, c_{\nu+1})\boldsymbol{x}$, per ogni $\boldsymbol{x} \in X^{\nu+1}$, descrive tutto X.

7 – Corollario. *Se* $\dim X = \infty$ *e* h *è surgettiva* (*in particolare se* $h = \iota_X$), $\boldsymbol{R}h + T$ *è totalmente coerente.*

Esempio. Sia $L^2([a, b]) = X$ e ne sia ι l'applicazione identica. Si consideri il sottospazio vettoriale S di $K(X)$ costituito dagli operatori di Hilbert-Schmidt; $\boldsymbol{R}\iota + S$ è totalmente coerente.

4 - Totale coerenza di spazi di operatori integro-differenziali

Sia $J = [a, b]$, e sia Z lo spazio vettoriale degli operatori con nucleo del tipo $p: C^\infty(J) \to C^\infty(J)$ definiti da $pu(x) = \int_J N(x, y)u(y)\,\mathrm{d}y$, ove il nucleo $N \in C^\infty(J \times J)$.

8 – Proposizione. *Sia* $p \in Z$; p *non è surgettivo.*

Dim. Sia $p \in Z$ e ne sia N il nucleo. Posto $\alpha_r = \sup_{(x,y)\in J\times J} |(\partial/\partial x)^r N(x, y)|$, sia $\{\beta_r\}$ una successione reale divergente, tale che $\alpha_r \leqq \beta_r$, per ogni $r \in \boldsymbol{N}$; poichè è $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^r(pu)(x) = \int_J ((\partial/\partial x)^r N(x, y))u(y)\mathrm{d}y$, si ha che $|(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^r(pu)(x)| \leqq \beta_r \int_J |u(y)|\,\mathrm{d}y$, da cui $\sup_{x\in J} |(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^r(pu)(x)| \leqq \beta_r \int_J |u(y)|\,\mathrm{d}y$.

Se $\{\gamma_r\}$ è una successione reale a termini positivi, infinita di ordine superiore a $\{\beta_r\}$, certamente esiste (cfr. [5]) $w \in C^\infty(J)$ tale che $\gamma_r = \sup_{x\in J} |(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^r w|$; allora non esiste alcuna $u \in C^\infty(J)$ tale che $pu = w$.

9 – Lemma. *Data comunque una matrice* $H \in M(1\times\nu; Z)$, *l'applicazione* $l_H: (C^\infty(J))^\nu \to C^\infty(J)$; $\boldsymbol{u} \mapsto H\boldsymbol{u}$ *non è surgettiva.*

Dim. Sia $(p_1, \dots, p_\nu)^T \in Z^\nu$; per ogni $(u_1, \dots, u_\nu)^T \in (C^\infty(J))^\nu$ si ha $\sigma = \sup_{x\in J} |(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^r(\sum_1^\nu{}_i (p_i u_i))(x)| \leqq \sum_1^\nu{}_i \sup |(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^r(p_i u_i)(x)|$, e, procedendo in modo analogo a quello di 8, $\sigma \leqq \sum_1^\nu{}_i \beta_{ir} \int_J |u_i(x)|\,\mathrm{d}x$, ove $\{\beta_{1r}\}, \dots, \{\beta_{\nu r}\}$ sono opportune successioni reali positivamente divergenti. Posto $\mu_r = \max\{\beta_{ir},\ i = 1, \dots, \nu\}$, e $h = \max\{\int_J |u_i(x)|\,\mathrm{d}x,\ i=1, \dots, \nu\}$, si ha che $\sup_{x\in J} |(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^r(\sum_1^\nu{}_i p_i u_i)(x)| \leqq \mu_r \nu h$; si è così ricondotti al caso trattato in 8; segue la non surgettività di l_H.

Sia D la derivazione in $C^\infty(J)$.

10 – Teorema. *Lo spazio vettoriale* $\boldsymbol{R}[D] + Z$ *è totalmente coerente.*

Dim. L'applicazione $l_H\colon (C^\infty(J))^\nu \to (C^\infty(J))^{\nu+1}$; $\boldsymbol{u} \mapsto H\boldsymbol{u}$ si esprime nella forma $l_H = l_Q + l_K$, ove $Q \in M((\nu+1)\times\nu; \boldsymbol{R}[D])$, $K \in M((\nu+1)\times\nu; Z)$.

Essendo le $\nu+1$ righe di Q elementi di $(\boldsymbol{R}[D])^\nu$, esiste una loro combinazione lineare nulla a coefficienti $r_1, \ldots, r_{\nu+1}$ appartenenti a $\boldsymbol{R}[D]$ non tutti nulli. Moltiplicando a sinistra H per $(r_1, \ldots, r_{\nu+1})$, si ottiene una riga ad elementi in Z. La non surgettività di l_H segue dall'applicazione di 9 a tale riga, tenuto conto del fatto che $(r_1, \ldots, r_{\nu+1})\,\boldsymbol{a}$, per ogni $\boldsymbol{a} \in (C^\infty(J))^{\nu+1}$, descrive tutto $C^\infty(J)$; poichè $\boldsymbol{R}[D]$ è dotato di identità, segue la tesi.

Bibliografia

[1] J. Dieudonne, *Eléments d'analyse*, Gauthier-Villars **7** (1978).

[2] M. Dozio e M. Pedrazzoli, *Grafi algebrici di tipo geometrico*, Quaderni Ist. Mat. Appl. Facoltà di Ingegneria, quad. 5, Pisa 1981.

[3] M. Dozio, M. Martelli e R. Rebaudo, *Grafi algebrici e vincoli lineari*, Quaderni Ist. Mat. Appl. Facoltà di Ingegneria, quad. 1, Pisa 1981.

[4] M. Martelli e M. Poletti: $[\bullet]_1$ *Grafi e strutture algebriche associate. Il Teorema di Tellegen*, Quaderni Ist. Mat. Appl. Facoltà di Ingegneria, quad. 1, Pisa 1980; $[\bullet]_2$ *Grafi algebrici*, Quaderni Ist. Mat. Appl. Facoltà di Ingegneria, quad. 2, Pisa 1980.

[5] R. Narasimhan, *Lectures on topics in analysis*, Tata Institute of Fundamental Research 1965.

[6] M. Poletti e R. Rebaudo, *Sistemi indipendenti di componenti lineari parametrici*, Quaderni Ist. Mat. Appl. Facoltà di Ingegneria, quad. 3, Pisa 1982.

[7] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Company 1973.

[8] M. Schechter, *Principles of functional analysis*, Academic Press 1971.

[9] S. Seshu and M. B. Reed, *Linear graphs and electrical networks*, Reading Mass., Addison-Wesley 1961.

[10] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63-89.

Summary

The notion of totally coherent space of operators has been recently revealed significant in circuit theory. In this paper totally coherent spaces of operators, arising in natural way in circuit theory, are specified.

* * *