Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 235-246

DARIO PASQUALI COLUZZI (*)

Sulla partizione delle rette secanti una quadrica per la regolarità dei punti di $AG(3, q)$, q dispari e primo (**)

Introduzione

Se P_1 e P_2 sono due punti di uno spazio affine $AG(3, q)$, costruito su un campo γ di Galois di ordine dispari, un punto $\overline{P}$, distinto da P_1 e P_2, appartenente alla retta individuata dai due punti, è esterno o interno al segmento affine P_1P_2, secondo che $\overline{P}$ appartenga o no al segmento proiettivo P_1P_2 contenente il punto improprio della retta, cioè secondo che il rapporto semplice $B = (P_1P_2\overline{P})$ sia rispettivamente un quadrato ($B = \square$) o un non-quadrato ($B = \Delta$), essendo questi i due caratteri quadratici del gruppo moltiplicativo degli elementi diversi da zero di γ [**9**]$_1$.

Se ci si riferisce ad una quadrica non degenere Q di $AG(3, q)$, è noto che un punto $\overline{P}$ di $AG(3, q)$, non appartenente a Q, è sempre esterno rispetto a Q e il comportamento di $\overline{P}$ rispetto ai segmenti affini intercetti da Q sulle rette per $\overline{P}$, ossia quando $\overline{P}$ è esterno o interno a tali segmenti, conduce alla definizione di regolarità e di quasi-regolarità di $\overline{P}$ rispetto a Q.

Il problema della determinazione del numero e della configurazione geometrica dei punti $\overline{P}$ regolari e quasi-regolari rispetto ad un iperboloide e rispetto ad un paraboloide di $AG(3, q)$ è stato oggetto di studio nelle note [**1**]$_{1,2}$, nelle quali, analizzando soltanto i casi in cui è $q = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, si è giunti alla formulazione di una congettura.

In questa nota, nell'ipotesi che il campo γ abbia ordine $q \neq 2$ e primo, si determina dapprima per i singoli punti propri $\overline{P}$ di $AG(3, q)$, non appartenenti

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Facoltà di Ingegneria, Via A. Scarpa 10, 00161 Roma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 13-II-1983.

ad una quadrica non degenere Q (iperboloide o paraboloide), il numero delle rette per $\bar{P}$ secanti Q sulle quali il segmento affine intercetto da Q ammette $\bar{P}$ come punto esterno o come punto interno. Queste rette, alle quali sono aggiunte le rette per $\bar{P}$ ($\notin Q$) e tangenti a Q in punti propri, sono ripartite in relazione al comportamento di $\bar{P}$, stabilendo così se $\bar{P}$ abbia o non abbia qualche carattere di regolarità rispetto a Q. Quindi sono determinati il numero e la configurazione geometrica dei punti $\bar{P}$ di $AG(3, q)$ regolari e quasi-regolari rispetto a Q, *per ogni valore di* q *di* γ. *Si è così risolto il problema in generale e sono confermate le congetture delle due note menzionate.*

Rispetto ad un iperboloide Q *di tipo iperbolico (o* Q' *di tipo ellittico) i punti di* $AG(3, q)$, *non appartenenti a* Q *(o a* Q'*), si distribuiscono su* $(q-1)/2$ *iperboloidi di tipo diverso da* Q *(o da* Q'*), su* $(q-3)/2$ *iperboloidi dello stesso tipo di* Q *(o di* Q'*) e sul comune cono asintotico* τ. *Di tali punti quelli appartenenti ad iperboloidi dello stesso tipo non sono mai regolari; quelli appartenenti ad iperboloidi dell'altro tipo sono quasi-regolari se* $q \equiv 1 \pmod 4$, *ma non presentano alcun carattere di regolarità se* $q \equiv -1 \pmod 4$. *Il vertice del cono* τ *è sempre regolare, ma gli altri punti di* τ *risultano quasi-regolari rispetto a* Q *se* $q \equiv 1 \pmod 4$ *e regolari se* $q \equiv -1 \pmod 4$; *rispetto a* Q' *essi sono invece regolari se* $q \equiv 1 \pmod 4$ *e non presentano alcun carattere di regolarità se* $q \equiv -1 \pmod 4$, *fatta eccezione per* $q = 3$, *nel qual caso tali punti sono regolari* [**1**].

Nei riguardi della regolarità rispetto ad un paraboloide $\bar{Q}$ *di tipo iperbolico (o* $\bar{Q}'$ *di tipo ellittico) i punti di* $AG(3, q)$ *non appartenenti a* $\bar{Q}$ *(o a* $\bar{Q}'$*) si distribuiscono su* $q-1$ *paraboloidi dello stesso tipo di* $\bar{Q}$ *(o di* $\bar{Q}'$*). Tali punti non presentano alcun carattere di regolarità se* $q \equiv -1 \pmod 4$, *mentre risultano quasi-regolari se* $q \equiv 1 \pmod 4$ *rispetto a* $\bar{Q}$ *(o a* $\bar{Q}'$*).*

1 - Richiami

Gli elementi non nulli del gruppo moltiplicativo di un campo $\gamma = GF(q)$ di Galois, con $q \neq 2$ primo, si distribuiscono, come è noto, in due insiemi di $r = (q-1)/2$ elementi ciascuno. Nel primo insieme si pongono gli elementi $\square_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, ognuno dei quali è un quadrato, tali cioè che esista un elemento $K \neq 0$ del campo γ per cui è $K^2 = \square_i$; nel secondo insieme gli altri $r = (q-1)/2$ elementi Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ detti non-quadrati, per i quali non vale la condizione suddetta. Un elemento generico del primo insieme sarà indicato con il simbolo $\square$, mentre un elemento generico del secondo insieme sarà indicato con il simbolo Δ. Con i simboli $\square$ e Δ sono così indicati i due caratteri quadratici del campo. È noto che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento $K \neq 0$ del campo γ sia un quadrato ($\square$) o un non-quadrato (Δ) è che si abbia rispettivamente $K^r = 1$ o $K^r = -1$ [**9**]$_2$. In virtù di questo teorema il prodotto o il quoziente di due elementi concordi, aventi cioè lo stesso carattere quadratico, è sempre un quadrato, mentre il prodotto o il quoziente di due elementi discordi è sempre un non-quadrato.

Se indichiamo con (x_0, x_1, x_2, x_3) le coordinate omogenee di un punto dello spazio proiettivo $PG(3, q)$ associato ad $AG(3, q)$ e $x_0 = 0$ è l'equazione del piano improprio di $AG(3, q)$, l'equazione in coordinate omogenee di un iperboloide di $AG(3, q)$ può essere del tipo

$$\delta x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,, \tag{1.1}$$

con $\delta = \square$ se esso è di tipo iperbolico, con $\delta = \Delta$ se è di tipo ellittico; quella di un paraboloide iperbolico invece può essere

$$x_0 x_1 + x_2 x_3 = 0\,, \tag{1.2}$$

e di un paraboloide ellittico, infine,

$$\delta x_3^2 + x_1^2 + x_2 x_0 = 0 \qquad (\delta = \Delta) \tag{1.3}$$

per $q \equiv 1 \pmod 4$ e

$$x_1^2 + x_2 x_0 + x_3^2 = 0 \tag{1.4}$$

per $q \equiv -1 \pmod 4$ [**5**].

La suddivisione in $AG(3, q)$ delle rette passanti per un punto proprio $\overline{P} \notin Q$, tangenti o secanti Q, in relazione al comportamento di $\overline{P}$, cioè in relazione al fatto che $\overline{P}$ risulti esterno o interno a ciascun segmento affine intercetto da Q su tali rette, suggerisce l'introduzione delle seguenti definizioni.

Rispetto ad una quadrica Q un punto proprio $\overline{P} \notin Q$ di $AG(3, q)$ si dirà *regolare* se ha uno stesso comportamento rispetto ad ognuna delle coppie di punti propri intercetti da Q sulle rette uscenti da $\overline{P}$ e secanti o tangenti Q, cioè se $\overline{P}$ risulta sempre esterno o sempre interno rispetto ai segmenti affini determinati da dette coppie di punti, oppure è esterno rispetto alla metà di tali segmenti ed interno rispetto alla rimanente metà.

Un punto proprio $\overline{P}$ di $AG(3, q)$, non appartenente a Q, si dirà *quasi-regolare* rispetto a Q, quando soddisfa a quest'ultima condizione, prescindendo dal comportamento di $\overline{P}$ rispetto ai segmenti affini intercetti da Q sulle rette uscenti da $\overline{P}$ parallele al piano polare $\bar{\pi}$ di $\overline{P}$ rispetto a Q.

2 – Si consideri ora nello spazio affine $AG(3, q)$ una qualsiasi quadrica Q

non specializzata di equazione $F(x, y, z) = 0$ ed un punto $\overline{P}$, che non le appartenga, di coordinate affini $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. La generica retta s di $AG(3, q)$, uscente da $\overline{P}$, di equazione $\{x = \bar{x} + lt,\ y = \bar{y} + mt,\ z = \bar{z} + nt\}$, con $t \in \gamma$ e di parametri direttori l, m, n, è secante in due punti P_1 e P_2, a coordinate in γ, tangente in $P_1 \equiv P_2$, esterna a Q, se e soltanto se il discriminate $D = a^2 - 4\overline{F}b$ della equazione $F(\bar{x} + lt, \bar{y} + mt, \bar{z} + nt) = bt^2 + at + \overline{F} = 0$ è rispettivamente un quadrato, zero, un non-quadrato.

Con b è indicata, per abbreviare, l'espressione che si ottiene sostituendo i parametri direttori l, m, n, al posto delle variabili x, y, z dei termini di secondo grado dell'equazione di Q. In particolare, nel caso che Q sia un iperboloide, se a tali variabili si sostituiscono, nell'ordine, le coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di $\overline{P}$ e si cambia di segno, si ha l'espressione $-c = -\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2$, la quale, secondo che sia un non-quadrato, zero, o un quadrato, esprime che la retta impropria r_∞ del piano polare $\bar{\pi}$ di $\overline{P}$ rispetto a Q è rispettivamente esterna, tangente, o secante la conica impropria C_∞ di Q. Nel caso in cui Q sia invece un paraboloide, la retta impropria del piano polare $\bar{\pi}$ di $\overline{P}(\notin Q)$ rispetto a Q, è ovviamente secante o esterna la conica impropria C_∞ di Q secondo che il paraboloide sia rispettivamente di tipo iperbolico o ellittico.

Inoltre con a è indicata l'espressione ottenuta sostituendo l, m, n rispettivamente alle variabili x, y, z dell'equazione del piano polare $\bar{\pi}$ di $\overline{P}$ rispetto a Q. Tale espressione uguagliata a zero esprime il parallelismo fra la retta s di parametri direttori l, m, n ed il piano $\bar{\pi}$ di parametri di giacitura $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Con $\overline{F}$ infine è indicato il valore che l'equazione della quadrica Q assume quando alle variabili x, y, z si sostituiscono le coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di $\overline{P}$.

Il punto $\overline{P}$, le cui coordinate affini si ottengono dalle equazioni di s per $t = 0$, risulta esterno o interno al segmento affine P_1P_2 della retta secante Q secondo che il rapporto semplice $B = (P_1P_2\overline{P}) = (a - \sqrt{D})/(a + \sqrt{D}) = t_1/t_2$ $(0 \neq B \in \gamma)$ sia un quadrato o un non-quadrato rispettivamente e si ha ciò, come è noto, quando è rispettivamente

$$(a - \sqrt{D})^r/(a + \sqrt{D})^r = 1 \qquad \text{e} \qquad (a - \sqrt{D})^r/(a + \sqrt{D})^r = -1\,.$$

La prima di queste due ultime condizioni si può scrivere

$$(2.1) \qquad \sum_{0}^{(r-1)/2}{}_K \frac{r(r-1)\ldots(r-2K)}{(2K+1)!}\, a^{r-2K-1}\sqrt{D^{2K+1}} = 0 \quad \text{quando è } q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$(2.2) \qquad \sum_{0}^{(r-2)/2}{}_K \frac{r(r-1)\ldots(r-2K)}{(2K+1)!}\, a^{r-2K-1}\sqrt{D^{2K+1}} = 0 \quad \text{quando è } q \equiv 1 \pmod 4)\,.$$

La seconda invece si può scrivere

$$(2.3) \quad a^r + \sum_{1}^{(r-1)/2} {}_K \frac{r(r-1)\dots(r-2K+1)}{(2K)!} a^{r-2K}\sqrt{D^{2K}} = 0 \quad \text{quando è } q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$(2.4) \quad a^r + \sum_{1}^{r/2} {}_K \frac{r(r-1)\dots(r-2K+1)}{(2K)!} a^{r-2K}\sqrt{D^{2K}} = 0 \quad \text{quando è } q \equiv 1 \pmod 4.$$

Se è $q \equiv 1 \pmod 4$ *il polinomio* (2.2) *è sempre soddisfatto da* $D = 0$ *e* $a = 0$, *e, risolto rispetto ad* a^2, *tale polinomio ammette* $(r-2)/2$ *radici del tipo* $a^2 = \square_i D$ (*con* $D = \square = 1$), *dove* $\square_i (\neq 1)$ *assume* $(r-2)/2$ *valori quadrati del campo tra loro reciproci, appartenenti al sottoinsieme* $E\{\square_i / 0 \neq \square_i\colon 0 \neq \square_i - 1 = \square\}$ *di* γ; *in particolare* è $\square_i = -1$ *soltanto quanto è* $q \equiv 1 \pmod 8$. *Sempre per* $q \equiv 1 \pmod 4$ *il polinomio* (2.4) *invece è soddisfatto da* $r/2$ *radici del tipo* $a^2 = \square_i D$ (*con* $D = \square = 1$), *dove* $\square_i (\neq 1)$ *assume i rimanenti* $r/2$ *valori quadrati del campo tra loro reciproci ed opposti a quelli* ($\square_i \in E$) *del polinomio* (2.2); *in particolare è* $\square_i = -1$ *soltanto quando è* $q \equiv 5 \pmod 8$. *Se è* $q \equiv -1 \pmod 4$, *invece, il polinomio* (2.1) *è soddisfatto da* $D = 0$ *e da* $(r-1)/2$ *radici del tipo* $a^2 = \square_i D$ (*con* $D = \square = 1$), *dove* $\square_i$ $(\neq 1)$ *assume gli* $(r-1)/2$ *valori quadrati del campo appartenenti ad* E; *il polinomio* (2.3) *a sua volta ammette come radice* $a = 0$ *e* $(r-1)/2$ *radici del tipo* $a^2 = \square_i D$ (*con* $D = \square = 1$), *dove* $\square_i$ $(\neq 1)$ *assume i rimanenti* $(r-1)/2$ *valori quadrati del campo reciproci dei valori* $\square_i \in E$ *del polinomio* (2.1).

3 – Siano in $AG(3, q)$ $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 + \delta = 0$ l'equazione di un iperpoloide iperbolico Q dove è $\delta = \square$ (ellittico Q' se $\delta = \Delta$)[1] e $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate affini di un punto $\bar{P}$ non appartenente a $Q(Q')$. Suddividiamo l'insieme dei punti propri di $AG(3, q)$, non appartenenti a $Q(Q')$, in tre sottoinsiemi α, β, γ. In α poniamo quei punti il cui piano polare $\bar{\pi}$ rispetto a $Q(Q')$ ha la retta impropria r_∞ esterna alla conica impropria C_∞ di $Q(Q')$. Essi si distribuiscono su Q' e su $(q-3)/2$ iperboloidi ellittici Q'_1 $(i = 1, 2, \dots, (q-3)/2)$ di equazioni $c = -\Delta$. Nell'insieme β poniamo i punti $\bar{P}$ il cui piano polare $\bar{\pi}$ ha r_∞ tangente C_∞ e anche l'origine O del riferimento, centro di $Q(Q')$. Essi appartengono al cono τ, asintotico di $Q(Q')$ di equazione $c = 0$. Quelli infine il cui piano $\bar{\pi}$ ha r_∞ secante C_∞ si distribuiscono su Q e su $(q-3)/2$ iperboloidi iperbolici Q_i $(i = 1, 2, \dots, (q-3)/2)$ di equazioni $c = -\square$ e costituiscono il terzo sottoinsieme γ.

---

(1) D'ora in poi scriviamo in parentesi tutto ciò che è relativo all'iperboloide ellittico.

Il numero e la suddivisione delle rette di parametri direttori l, m, n passanti per un punto proprio $\overline{P}$ di $AG(3, q)$, tangenti e secanti $Q(Q')$ in segmenti affini, rispetto ai quali $\overline{P}$ risulta esterno o interno, si hanno, in relazione al comportamento di $\overline{P}$, rispettivamente dall'esame dei seguenti sistemi

$$(3.1) \qquad \left(\frac{a-\sqrt{D}}{a+\sqrt{D}}\right)^r = 1, \qquad b = \frac{a^2-D}{c+\delta}, \qquad c = -\Delta,\ 0,\ -\square;$$

$$(3.2) \qquad \left(\frac{a-\sqrt{D}}{a+\sqrt{D}}\right)^r = -1, \qquad b = \frac{a^2-D}{c+\delta}, \qquad c = -\Delta,\ 0,\ -\square.$$

Nei sistemi (3.1) quando nella prima equazione è $D=0$ (³) basta attribuire, nella seconda equazione, ad a^2 il valore 1, in quanto se si attribuisce ad a^2 qualsiasi altro valore quadrato del campo γ si ottengono sistemi equivalenti. In tutti gli altri casi, cioè quando è $D = \square$, nei sistemi (3.1) e (3.2), per lo stesso motivo, basta porre $D = 1$. I sistemi (3.1), per ogni valore di c, se è $q \equiv -1 \pmod 4$ si specializzano nei sistemi

$$(3.1)^{\mathrm{I}} \qquad D = 0(a^2=1), \qquad b = 1/(c+\delta), \qquad c = -\Delta, 0, -\square,$$

e in $(r-1)/2$ sistemi del tipo

$$(3.1)^{\mathrm{II}} \quad a^2 = \square_i D (D = \square = 1), \qquad b = (a^2-1)/(c+\delta), \qquad c = -\Delta, 0, -\square,$$

dove i $\square_i$ sono le radici del polinomio (2.1); se è $q \equiv 1 \pmod 4$, invece, essi si specializzano in

$$(3.1)^{\mathrm{III}} \qquad D = 0(a^2=1), \qquad b = 1/(c+\delta), \qquad c = -\Delta, 0, -\square,$$

in

$$(3.1)^{\mathrm{IV}} \qquad a = 0(D=1), \qquad b = -1/(c+\delta), \qquad c = -\Delta, 0, -\square,$$

e in $(r-2)/2$ sistemi del tipo

$$(3.1)^{\mathrm{V}} \quad a^2 = \square_i D \ (D=1), \qquad b = (a^2-1)/(c+\delta), \qquad c = -\Delta, 0, -\square,$$

(³) $D = 0$ esprime, come è geometricamente evidente, che il punto $\overline{P}$ è esterno ai segmenti affini $P_1 \equiv P_2$ $(B = 1)$ delle rette per $\overline{P}$ tangenti $Q(Q')$. Queste sono in numero di $q+1$, q, $q-1$, secondo che $\overline{P}$ appartenga rispettivamente a α, β, γ.

dove i $\square_i$ sono le radici del polinomio (2.2).

I sistemi (3.2) a loro volta, nel caso in cui è $q \equiv -1 \pmod 4$, danno luogo, per ogni valore di c, ai sistemi

$$(3.2)' \qquad a = 0 (D = 1), \quad b = -1/(c+\delta), \quad c = -\Delta, 0, -\square,$$

e agli $(r-1)/2$ sistemi del tipo

$$(3.2)'' \qquad a^2 = \square_i D (D = 1), \quad b = (a^2 - 1)/(c + \delta), \quad c = -\Delta, 0, -\square,$$

dove i $\square_i$ sono le radici del polinomio (2.3); nel caso in cui è $q \equiv 1 \pmod 4$ invece essi danno luogo a $r/2$ sistemi del tipo

$$(3.2)''' \qquad a^2 = \square_i D (D = 1), \quad b = (a^2 - 1)/(c + \delta), \quad c = -\Delta, 0, -\square,$$

dove i $\square_i$, questa volta, sono le radici del polinomio (2.4).

In questi sistemi, se si assumono l, m, n, come coordinate affini di punto, $a = 0$ è l'equazione di un piano passante per l'origine O del riferimento, $a^2 = \square_i D$ è l'equazione complessiva di due piani simmetrici rispetto ad O, $b = (a^2 - D)(c + \delta)$ è l'equazione di un iperboloide $\overline{\overline{Q}}$ iperbolico o ellittico secondo che $D - a^2$ e $c + \delta$ siano rispettivamente concordi o discordi. Il piano di equazione $a = 0$ interseca $\overline{\overline{Q}}$ secondo una conica i cui punti si corrispondono in una simmetria centrale di centro O. Tale piano è tangente a $\overline{\overline{Q}}$ in un punto improprio quando è $(0 \neq)\ \overline{P} \in \beta$ (4). Pertanto le rette passanti per un punto proprio $\overline{P}$ di $AG(3, q)$, parallele a $\bar{\pi}$ e secanti $Q(Q')$ in segmenti affini, rispetto ai quali $\overline{P}$ è esterno se è $q \equiv 1 \pmod 4$, e interno se è $q \equiv -1 \pmod 4$, sono $(q+1)/2$ quando $\overline{P} \in \alpha$, $(q-1)/2$ quando $\overline{P} \in \gamma$, q quando $(0 \neq) \overline{P} \in \beta$ e $\delta = \square$, non ve ne sono se $(0 \neq) \overline{P} \in \beta$ e $\delta = \Delta$.

I due piani di equazione complessiva $a^2 = \square_i D$ intersecano l'iperboloide $\overline{\overline{Q}}$ secondo due coniche i cui punti si corrispondono, a coppie, secondo una simmetria centrale di centro O. Essi sono tangenti a $\overline{\overline{Q}}$ sia quando è $c = -a^2\delta = -\square$ $(\delta = \square)$ e in questo caso ciascuna conica sezione è formata da $2q - 1$ punti, sia quando è $c = -a^2\delta = -\Delta$ $(\delta = \Delta)$ e in questo caso ciascuna conica sezione è formata da un sol punto. Nel caso in cui è $P \in \beta$ infine, ciascuno dei due piani è tangente a $\overline{\overline{Q}}$ in un punto proprio se $\delta = \square$, in un punto improprio se $\delta = \Delta$.

(4) Il vertice O di r ha uno stesso comportamento rispetto ai segmenti affini delle rette uscenti da esso e secanti Q (Q') e quindi è sempre regolare; infatti per esso risulta $B^r = \pm 1$.

Pertanto dall'esame dei sistemi (3.1) e (3.2), distinguendo il caso in cui è $q \equiv -1 \pmod 4$ da quello in cui è $q \equiv 1 \pmod 4$, si ha il numero e la suddivisione delle rette passanti per un punto $\overline{P}$ di $AG(3, q)$, tangenti o secanti $Q(Q')$ e determinanti segmenti affini rispetto ai quali $\overline{P}$ risulta esterno o interno [5]. Per brevità non viene scritto nè il numero delle rette per $\overline{P}$ tangenti $Q(Q')$, nè il numero delle rette secanti $Q(Q')$, parallele a $\bar{\pi}$, essendo tali numeri in ogni caso noti per quanto è stato detto precedentemente in proposito. Va inteso che essi devono essere considerati al fine di determinare la regolarità o la quasi-regolarità di $\overline{P}$ rispetto a $Q(Q')$.

4 - Iperboloide iperbolico Q

4.1 $q \equiv -1 \pmod 4$.

(a_1) $P \in \alpha$. *Nessuno dei punti propri $\overline{P}$ appartenenti ai $(q-1)/2$ iperboloidi ellittici Q'_i di equazioni $c = -\Delta$ è regolare o quasi-regolare.* Infatti per ognuno di tali punti $\overline{P}$ passano $(q-3)(q+1)/2$ rette secanti Q, la metà delle quali con $\overline{P}$ esterno $((r-1)/2$ sistemi $(3.1)^{\mathrm{II}})$, l'altra metà con $\overline{P}$ interno $((r-1)/2$ sistemi $(3.2)'')$.

(b_1) $\overline{P} \in \beta$. *Tutti i punti $\overline{P}$ appartenenti al cono τ di equazione $c = 0$ sono regolari,* in quanto per ciascun punto $\overline{P} \neq 0$ passano $(q-3)q/2$ rette secanti Q, la metà delle quali con $\overline{P}$ esterno $((r-1)/2$ sistemi $(3.1)^{\mathrm{II}})$, l'altra metà con $\overline{P}$ interno $((r-1)/2$ sistemi $(3.2)'')$.

(c_1) $\overline{P} \in \gamma$. *Nessuno dei punti propri $\overline{P}$, appartenenti ai $(q-3)/2$ iperboloidi iperbolici Q_i di equazioni $c = -\square$ $(\square \neq 1)$ è regolare o quasi-regolare.* Infatti se $\overline{P}$ appartiene ad uno dei $(q-3)/2$ iperboloidi iperbolici Q_i di equazioni $c = -a^2\delta = -\square_i$, per esso passano $(q-3)(q-1)/4$ rette secanti, con $\overline{P}$ esterno $((r-1)/2$ sistemi $(3.1)^{\mathrm{II}})$ quando è $\square_i \notin E$, con $\overline{P}$ interno $((r-1)/2$ sistemi $(3.2)'')$ quando è $\square_i \in E$ e $(q^2+3)/4$ rette secanti con $\overline{P}$ interno $((r-1)/2$ sistemi $(3.2)'')$ quando è $\square_i \notin E$, con $\overline{P}$ esterno $((r-1)/2$ sistemi $(3.1)^{\mathrm{II}})$ quando è $\square_i \in E$.

4.2 $q \equiv 1 \pmod 4$. In questo caso *sia i punti $\overline{P} \in \alpha$ che i punti $(0 \neq)\overline{P} \in \beta$ sono quasi-regolari.* Infatti le rette per $\overline{P} \in \alpha$ secanti Q sono $(q-5)(q+1)/4$ con $\overline{P}$ esterno $((r-2)/2$ sistemi $(3.1)^{\mathrm{V}})$ e $(q-1)(q+1)/4$ con $\overline{P}$ interno $(r/2$

---

[5] Ogni qualvolta si scriverà «con $\overline{P}$ esterno» oppure «con $\overline{P}$ interno» si intende dire che $\overline{P}$ ha un tale comportamento rispetto a tutti i segmenti affini delle rette considerate.

sistemi $(3.2)'''$), mentre $(0 \neq)\bar{P} \in \beta$ risulta esterno ai segmenti affini delle $(q-5)q/4$ rette secanti $((r-2)/2$ sistemi $(3.1)^{\mathrm{v}})$ e interno a quelli appartenenti a $(q-1)q/4$ rette secanti Q $(r/2$ sistemi $(3.2)''')$. *Nessun punto $\bar{P} \in \gamma$ è regolare o quasi-regolare.* Infatti se $\bar{P}$ appartiene a uno dei $(q-1)/4$ iperboloidi iperbolici Q_i di equazioni $c = -a^2\delta = -\square_i$ con $\square_i \notin E$, per esso passano $(q-5)\cdot(q-1)/4$ rette secanti Q con $\bar{P}$ esterno $((r-2)/2$ sistemi $(3.1)^{\mathrm{v}})$ e $(q+1)^2/4$ con $\bar{P}$ interno $(r/2$ sistemi $(3.2)''')$, mentre se $\bar{P}$ appartiene ad uno dei $(q-5)/4$ iperboloidi iperbolici Q_i di equazioni $c = -a^2\delta = -\square_i$ con $\square_i \in E$ per essi passano $(q^2-2q+5)/4$ rette secanti Q con $\bar{P}$ esterno $((r-2)/2$ sistemi $(3.1)^{\mathrm{v}})$ e $(q-1)^2/4$ con $\bar{P}$ interno $(r/2$ sistemi $(3.2)''')$.

5 - Iperboloide ellittico Q'

5.1 $q \equiv -1 \pmod 4$. *Fatta eccezione per il vertice O di τ che è regolare, nessun punto proprio $\bar{P} \notin Q'$ di $AG(3, q)$ risulta regolare o quasi-regolare.*

(a$_1$) $\bar{P} \in \alpha$. Un punto $\bar{P}$ appartenente ad uno dei $(q-3)/2$ iperboloidi ellittici Q'_i, $c = -a^2\delta = -\Delta_i = \square_i$ risulta esterno o interno ai segmenti affini di $(q-3)(q+1)/4$ rette secanti Q' e interno o esterno ai segmenti affini di $(q^2-6q-3)/4$ rette secanti Q' quando è rispettivamente $\square_i \notin E$ o $\square_i \in E$.

(b$_1$) $\bar{P} \in \beta$. Per ognuno di tali punti $\bar{P} \neq 0$ passano $(q-3)q/2$ rette secanti Q', la metà delle quali con $\bar{P}$ esterno, l'altra metà con $\bar{P}$ interno.

(c$_1$) $\bar{P} \in \gamma$. Le rette per $\bar{P}$ secanti Q' sono $(q-3)(q-1)/2$ metà delle quali con $\bar{P}$ esterno l'altra metà con $\bar{P}$ interno.

5.2 $q \equiv 1 \pmod 4$. *In questo caso, mentre i punti $\bar{P} \in \alpha$ non sono regolari nè quasi-regolari, sono invece regolari tutti i punti $\bar{P} \in \beta$ e quasi-regolari quelli appartenenti a γ.*

(a$_2$) $\bar{P} \in \alpha$. Se $\bar{P}$ appartiene ad uno dei $(q-3)/2$ iperboloidi ellittici Q'_i di equazioni $c = -a^2\delta = -\Delta_i$ $(\Delta_i = \square_i\delta)$, per esso passano $(q-5)(q+1)/4$ rette secanti Q' con $\bar{P}$ esterno e $(q^2-4q-1)/4$ con $\bar{P}$ interno quando è $\square_i \notin E$, e invece per esso passano $(q^2-8q-5)/4$ rette secanti Q' con $\bar{P}$ esterno e $(q-1)(q+1)/4$ con $\bar{P}$ interno quando è $\square_i \in E$.

(b$_2$) $\bar{P} \in \beta$. Le rette per $\bar{P} \neq 0$ secanti Q' sono $(q-5)q/4$ con $\bar{P}$ esterno e $(q-1)q/4$ con $\bar{P}$ interno.

(c$_2$) $\bar{P} \in \gamma$. In questo caso $\bar{P}$ risulta esterno a $(q-5)(q-1)/4$ segmenti affini di rette secanti Q' e interno invece a $(q-1)^2/4$,

6 - Se $\overline{Q}$ è un paraboloide iperbolico e $\overline{Q}'$ un paraboloide ellittico di $AG(3, q)$, il numero e la distribuzione delle rette uscenti da un punto $\overline{P}$ non appartenente a $\overline{Q}(\overline{Q}')$, tangenti e secanti $\overline{Q}(\overline{Q}')$ in segmenti affini rispetto ai quali $\overline{P}$ risulta esterno o interno, conduce a considerare i seguenti sistemi

$$(6.1) \qquad \left(\frac{a-\sqrt{D}}{a+\sqrt{D}}\right)^r=1, \; b=\frac{a^2-D}{4\overline{F}}, \quad \overline{F}=\Delta, \square,$$

$$(6.2) \qquad \left(\frac{a-\sqrt{D}}{a+\sqrt{D}}\right)^r=-1, \; b=\frac{a^2-D}{4\overline{F}}, \quad \overline{F}=\Delta, \square .$$

Ciascuno dei sistemi (6.1) e (6.2) dà luogo a tanti sistemi quante sono rispettivamente le radici delle coppie dei polinomi (2.1), (2.2) e (2.3), (2.4). Se è $q \equiv -1 \pmod 4$, il sistema (6.1) si specializza nel sistema

$$(6.1)^{\mathrm{I}} \qquad D=0 (a^2=1), \quad b=1/4\overline{F}, \quad F=\Delta, \square,$$

e in $(r-1)/2$ sistemi del tipo

$$(6.1)^{\mathrm{II}} \qquad a^2=\square_i D, \quad b=(a^2-1)/4\overline{F} \;\; (D=1), \quad \overline{F}=\Delta, \square$$

dove i $\square_i$ sono le radici del polinomio (2.1); se è $q \equiv 1 \pmod 4$ invece, il sistema (6.1) si specializza in

$$(6.1)^{\mathrm{III}} \qquad D=0 \;\; (a^2=1), \quad b=1/4\overline{F}, \quad F=\Delta, \square$$

in

$$(6.1)^{\mathrm{IV}} \qquad a=0, \quad b=-1/4\overline{F} \;\; (D=1), \quad F=\Delta, \square$$

e in $(r-2)/2$ sistemi del tipo

$$(6.1)^{\mathrm{V}} \qquad a^2=\square_i D, \quad b=(a^2-1)/4\overline{F} \;\; (D=1), \quad \overline{F}=\Delta, \square,$$

dove i $\square_i$ sono le radici del polinomio (2.2).

I sistemi (6.2) a loro volta, quando è $q \equiv -1 \pmod 4$ danno luogo al sistema

$$(6.2)' \qquad a=0, \quad b=-1/4\overline{F} \;\; (D=1), \quad \overline{F}=\Delta, \square,$$

e agli $(r-1)/2$ sistemi del tipo

$$(6.2)'' \qquad a^2=\square_i D, \quad b=(a^2-1)/4\overline{F} \;\; (D=1), \quad \overline{F}=\Delta, \square,$$

dove i $\square_i$ sono le radici del polinomio (2.3); quando è $q \equiv 1 \pmod 4$, invece, essi danno luogo a $r/2$ sistemi del tipo

$$(6.2)''' \qquad a^2 = \square_i D, \quad b = (a^2 - 1)/4\bar{F} \quad (D = 1), \quad \bar{F} = \Delta, \ \square,$$

dove i $\square_i$ sono le radici del polinomio (2.4).

Se si assumono l, m, n come coordinate di punto, dal sistema del tipo $\{D = 0\ (a^2 = 1);\ b = 1/4\bar{F};\ \bar{F} = \Delta, \square\}$ che si può scrivere $\{a^2 = 1 (D = 0);\ b = 1/4\bar{F},\ \bar{F} = \Delta, \square\}$ deriva che i due piani, simmetrici rispetto all'origine O del riferimento, di equazione complessiva $a^2 = 1$, intersecano il cilindro di equazione $b = 1/4\bar{F}$, [il quale risulta iperbolico o ellittico secondo che ci si riferisca ad un paraboloide iperbolico o ellittico] secondo due coniche i cui punti ($2q - 2$ per $\bar{Q}$ e $2q + 2$ per $\bar{Q}'$) si corrispondono, a coppie, in una simmetria centrale di centro O. Le coordinate dei punti di una delle due coniche sezioni sono i parametri direttori delle rette uscenti dal punto proprio $\bar{P}$ di $AG(3, q)$ non appartenente a $\bar{Q}(\bar{Q}')$, le quali contengono i segmenti affini tangenti, al finito, al paraboloide iperbolico (ellittico), rispetto ai quali, come è geometricamente ovvio, il punto $\bar{P}$ risulta esterno.

Allo stesso modo dal sistema $\{a = 0;\ b = -1/4\bar{F} (D = 1);\ \bar{F} = \Delta, \square\}$ deriva che il piano di equazione $a = 0$ interseca il cilindro iperbolico (ellittico) di equazione $b = -1/4\bar{F}$ secondo una conica i cui punti si corrispondono, a coppie, in una simmetria centrale di centro O. Le coordinate di tali punti, sono i parametri direttori delle $(q - 1)/2$ $\big((q + 1)/2\big)$ rette parallele al piano polare $\bar{\pi}$ di $\bar{P}$ rispetto a $\bar{Q}(\bar{Q}')$ e uscenti dal punto $\bar{P}$, secanti il paraboloide iperbolico (ellittico) in segmenti affini rispetto ai quali $\bar{P}$ risulta esterno se è $q \equiv 1 \pmod 4$ e interno se $q \equiv -1 \pmod 4$.

Infine quando il sistema è del tipo $\{a^2 = \square_i D;\ b = (a^2 - 1)/4\bar{F} (D = 1);\ \bar{F} = \Delta, \square\}$ i due piani simmetrici rispetto ad O, di equazione complessiva $a^2 = \square_i D$ intersecano il cilindro iperbolico (ellittico) in due coniche i cui punti si corrispondono, a coppie, in una simmetria centrale di centro O. Le coordinate dei punti di una delle due coniche sezioni cono i parametri direttori delle rette uscenti dal punto $\bar{P}$ e secanti il paraboloide iperbolico (ellittico). Pertanto da tali sistemi si ha

I punti propri $\bar{P}$ di $AG(3, q)$, sia rispetto a $\bar{Q}$, sia rispetto a $\bar{Q}'$ non hanno alcun carattere di regolarità quando è $q \equiv -1 \pmod 4$, mentre risultano quasi-regolari quando è $q \equiv 1 \pmod 4$.

Rispetto a $\bar{Q}$, infatti, ogni punto $\bar{P}$ risulta esterno a $(q - 1)(q - 3)/4$ e interno a $(q - 1)(q - 3)/4$ segmenti affini di rette secanti $\bar{Q}$ quando è $q \equiv -1 \pmod 4$, mentre $\bar{P}$ risulta esterno a $(q - 1)(q - 5)/4$ e interno a $(q - 1)^2/4$ segmenti di rette secanti quando è $q \equiv 1 \pmod 4$.

Rispetto a $\bar{Q}'$, invece, quando è $q \equiv -1 \pmod 4$ le rette per $\bar{P}$ secanti $\bar{Q}'$

e con $\overline{P}$ esterno sono $(q+1)(q-3)/4$, e quelle con $\overline{P}$ interno sono $(q+1)$ $\cdot(q-3)/4$, e quando è $q \equiv 1 \pmod 4$ infine esse sono rispettivamente $(q+1)(q-5)/4$ e $(q+1)(q-1)/4$.

Bibliografia

[1] I. Anastasia Pomilio e D. Pasquali Coluzzi: $[\cdot]_1$ *Sulla regolarità dei punti di uno spazio affine $AG(3,q)$, con q dispari e primo, rispetto ad un iperboloide*, Rend. Mat. (1982), $[\cdot]_2$ *Regolarità e quasi-regolarità dei punti di $AG(3,q)$, con $q \neq 2$, e primo, rispetto ad un paraboloide*, Rend. Mat. (in corso di stampa).

[2] A. Barlotti, *Some topics in finite geometrical structures*, Chapel Hill, N.C. Mimeo series **439** (1965).

[3] P. Dembowski, *Finite geometries*, Springer-Verlag, New York Inc. 1968.

[4] V. Dicuonzo, *Su una classe di spazi metrici finiti e i gruppi dei loro movimenti*, Ann. Mat. Pura Appl. **4** C (1974), 1-43.

[5] J. W. P. Hirschfeld, *Projective geometries over finite fields*, Oxford 1979.

[6] S. Ilkka, *On the inner and outer points of conics and betweenes-relation in finite linear planes of odd characteristic*, Rep. Tech. Mat. Univ. Helsinki A **16** (1972).

[7] P. Kustaanheimo, *On the relation of order in geometries over a Galois fields*, Soc. Sci. Fenn., Comment. Phys.-Math. (8) **20** (1957).

[8] G. Pellegrino, *Sulle sostituzioni lineari, sui campi finiti di ordine dispari, che conservano oppure scambiano il carattere quadratico degli elementi trasformati*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **1** B (1982), 211-223.

[9] B. Segre: $[\cdot]_1$ *Proprietà elementari relative ai segmenti e alle coniche sopra un campo qualsiasi ed una congettura di Seppo Ilkka per il caso dei campi di Galois*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **96** (1973), 290-337; $[\cdot]_2$ *Lectures on modern Geometry*, Cremonese, Roma 1961; $[\cdot]_3$ *Le geometrie di Galois*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **48** (1957), 1-96; $[\cdot]_4$ *Introduction to Galois geometries*, Atti Acc. Naz. Lincei Mem. (8) **8** (1967), 133-236; $[\cdot]_5$ *Ovals in a finite projective plane*, Canad. J. Math. **7** (1955), 414-416.

[10] G. Tallini e O. Ferri, *Caratterizzazione della famiglia di rette secanti una quadrica ellittica di $PG(3,q)$, q dispari*, Convegno « Geom. Combinatoria e di incidenza: Fondamenti e applicazioni », Passo della Mendola, luglio 1982.

Summary

In this work we determine the division of the lines passing through a generic point $\overline{P}$ of $AG(3,q)$ with $q \neq 2$ and prime, which are secant and tangent to a quadric Q (hyperboloid or paraboloid) of $AG(3,q)$ with regard to the external or internal position of $\overline{P}$ with respect to affine segment intercepted from Q in each of such lines, in this way so the regularity or the quasi-regularity of $\overline{P}$ with respect to Q is stated. Moreover we determine beside the number and the geometric configuration of the points $\overline{P}$ of $AG(3,q)$ regular or quasi-regular with respect to Q, for every q odd and prime.