Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 223-233

BAMBINA LARATO e GRAZIA RAGUSO (*)

Piani di traslazione di ordine 13^2 (**)

1 - Introduzione

Di recente sono state costruite varie fibrazioni non regolari di $PG(3, q)$ procedendo come segue. Sia Ω una fibrazione regolare di $PG(3, q)$; si supponga che q sia dispari e che Ω ammetta un insieme $\mathscr{R}$ di regoli tale che $\mathscr{R}$ consti di $(q+3)/2$ regoli: $R_1, R_2, \ldots, R_{(q+3)/2}$; due regoli di $\mathscr{R}$ abbiano due rette in comune; tre regoli di $\mathscr{R}$ non abbiano alcuna retta in comune.

L'insieme delle rette dei regoli R_i è una fibrazione parziale U che ricopre un insieme di $(q+1)^2(q+3)/4$ punti che denoteremo con I. Detto R'_i il regolo opposto ad R_i, è chiaro che l'insieme $\mathscr{V}$ delle rette dei regoli opposti R'_i è ancora un ricoprimento di I, ma non è una fibrazione in quanto per ogni punto di I passano esattamente due rette appartenenti a due regoli opposti R'_i. Si può tentare di comporre una fibrazione parziale di I prendendo opportunamente una metà, V, di $\mathscr{V}$, più precisamente $(q+1)(q+3)/4$ rette di $\mathscr{V}$ a due a due sghembe tra loro. Bruen (cfr. [**5**]) ha provato che V deve contenere $(q+1)/2$ rette di un regolo R'_i in modo che V risulti l'unione di tali mezzi regoli.

È chiaro che $(\Omega \setminus U) \cup V$ è una fibrazione di $PG(3, q)$ che denoteremo con Γ. Diremo poi che Γ è una fibrazione ottenuta mediante β-derivazione da Ω sostituendo U con V.

Inoltre, se Γ contiene un regolo N disgiunto da quelli di $\mathscr{R}$, più in generale un insieme di regoli N_i disgiunti tra loro e disgiunti da quelli di $\mathscr{R}$, si ottengono nuove fibrazioni Σ da Γ sostituendo N (rispettivamente ciascun N_i) con il suo regolo opposto. In accordo con la terminologia di largo uso, diremo che Σ è una fibrazione ottenuta mediante derivazione, più in generale mediante derivazione multiple, da Γ.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Nicolai 2, 70121 Bari, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 26-I-1983.

Il problema dell'esistenza delle fibrazioni β-derivate è irrisolto tranne che per $q = 5, 7, 11, 13$. Esempi particolari sono dati nei lavori di Bruen [**5**] quando $q = 5, 7$, in [**6**] e [**9**] quando $q = 11$. Sono stati determinati, inoltre, i gruppi di collineazioni per tali esempi, e in [**3**] Biscarini ha provato che l'esempio di Bruen è derivabile.

In [**11**]$_2$ una delle Autrici costruisce un nuovo piano di traslazione $\pi(\Gamma)$ di ordine 13^2. Successivamente, in [**10**], le Autrici determinano il gruppo H delle collineazioni della fibrazione Γ provando che

(I) H è il prodotto semidiretto di un gruppo di ordine 7 per un gruppo di ordine 24 che è a sua volta prodotto diretto di un gruppo diedrale di ordine 12 per un gruppo di ordine 2;

(II) H agisce su Γ secondo 16 orbite delle lunghezze 24, 12, 6, 4, 2.

In questo lavoro si dimostra che il piano $\pi(\Gamma)$ è derivabile, e mediante derivazione, si ottengono tra l'altro due piani $\pi(\Sigma_1)$ e $\pi(\Sigma_{12})$ non isomorfi tra loro.

Il gruppo delle collineazioni della fibrazione Σ_1 associata a $\pi(\Sigma_1)$ ammette un sottogruppo Z_1 contenente un sottogruppo normale $\langle\mu^2\rangle$ di ordine 7 tale che $Z_1/\langle\mu^2\rangle$ è un gruppo di ordine 2. Le orbite di rette di Σ_1 sono 59: quattro di lunghezza 14, due di lunghezza 7, quarantasette di lunghezza 2 e sei di lunghezza 1.

Il gruppo delle collineazioni della fibrazione Σ_{12} associata a $\pi(\Sigma_{12})$ ammette un sottogruppo Z_{12} contenente un sottogruppo normale $\langle\mu^2\rangle$ tale che $Z_{12}/\langle\mu^2\rangle$ è un gruppo abeliano elementare di ordine 4. Le orbite di rette di Σ_{12} sono trenta: una di lunghezza 28, quattro di lunghezza 14, diciotto di lunghezza 4 e sette di lunghezza 2.

2 – Adotteremo la terminologia di [**4**], [**5**], [**7**], [**8**]$_2$. Useremo coordinate omogenee (x, y, z, v) per denotare punti di $PG(3, q)$. In accordo con [**4**] e [**8**]$_1$, la retta congiungente i punti (x_1, y_1, z_1, v_1) e (x_2, y_2, z_2, v_2) sarà denotata con $\langle(x_1, y_1, z_1, v_1), (x_2, y_2, z_2, v_2)\rangle$. Inoltre, se $f, g, \ldots, h$ sono elementi di un gruppo, il sottogruppo da essi generato, sarà denotato con $\langle f, g, \ldots, h\rangle$.

3 – Faremo uso nel seguito della rappresentazione canonica di una fibrazione regolare Ω di $PG(3, q)$ su una quadrica ellittica Q di $PG(3, q)$ (cfr. [**4**]). Richiameremo brevemente tale rappresentazione rinviando per i particolari a [**8**]$_{1,2}$. Ci limiteremo al caso q dispari.

Si fissi un elemento s non quadrato in $GF(q)$ e si prenda Ω, come è lecito, quale unione della retta $\langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\rangle$ con le q^2 rette del tipo $\langle(a, sb, 0, 1)$ $(b, a, 1, 0)\rangle$ con $a, b \in GF(q)$. Inoltre, si consideri la quadrica ellittica Q di equazione $x^2 - sy^2 = zv$. I punti di Q sono $(0, 0, 1, 0)$ e $(a, b, a^2 - sb^2, 1)$ con a, b

$\in GF(q)$ e saranno denotati per brevità, con ∞ e $a + bt$ rispettivamente, dove t è un simbolo.

Premesso ciò, vale il teorema (cfr. [4], [5])

$$\sigma\colon \begin{cases} \infty \to \langle(1,\ 0,0,0),\ (0,1,0,0)\rangle \\ a + bt \to \langle(a, sb, 0, 1),\ (b, a, 1, 0)\rangle \end{cases}$$

è una corrispondenza biunivoca tra i punti di Q e le rette di Ω tale che i cerchi di Q hanno per immagini regoli di Ω e viceversa.

Sia G il gruppo delle collineazioni di Ω. Ogni $g \in G$ individua un'applicazione $\bar{g}$ di Q in se stessa nel modo seguente. Sia P un qualunque punto di Q e sia r la retta di Ω che corrisponde a P mediante σ, allora $\bar{g}(P)$ si definisce come il punto di Q che corrisponde a $g(r)$ mediante σ^{-1}. È chiaro che $\bar{g}$ è un automorfismo del piano inversivo associato alla quadrica Q; $\bar{g}$ si estende, come è noto ([**7**], 6, pag. 270), in modo univoco ad una collineazione g' di $PG(3, q)$ che muta Q in sè operando sui punti di Q come $\bar{g}$.

L'applicazione $\omega\colon g \to g'$ è un omomorfismo di G nel gruppo G' delle collineazioni che mutano Q in sè; Ker ω è un gruppo ciclico M di ordine $q + 1$, formato da tutte le collineazioni di $PG(3, q)$, che mutano in sè ciascuna retta di Ω.

In base alla corrispondenza σ, l'esistenza di un insieme $\mathscr{R}$ di regoli con le proprietà

$(1)_1$ $\mathscr{R}$ consta di $(q + 3)/2$ regoli R_j, $j = 1, 2, \ldots, (q + 3)/2$,

$(1)_2$ $|R_i \cap R_j| = 2$ per $1 \leqslant i < j \leqslant (q + 3)/2$,

$(1)_3$ $|R_i \cap R_j \cap R_k| = 0$ per $1 \leqslant i < j < k \leqslant (q + 3)/2$,

equivale all'esistenza di una catena di cerchi, $\mathscr{C}$, su Q con le proprietà

$(2)_1$ $\mathscr{C}$ consta di $(q + 3)/2$ cerchi C_j, $j = 1, 2, \ldots, (q + 3)/2$,

$(2)_2$ $|C_i \cap C_j| = 2$ per $1 \leqslant i < j \leqslant (q + 3)/2$,

$(2)_3$ $|C_i \cap C_j \cap C_k| = 0$ per $1 \leqslant i < j < k \leqslant (q + 3)/2$.

Supponiamo, d'ora in avanti, che Ω ammetta una catena di cerchi $\mathscr{C}$ con le proprietà (2). Sia $\mathscr{R}$ il corrispondente insieme di regoli. Denotiamo con U l'unione delle $(q + 1)(q + 3)/4$ rette di $\mathscr{R}$. Supponiamo inoltre che exista una fibrazione parziale V di $PG(3, q)$ tale che U e V fibrino la stessa parte di $PG(3, q)$. Denotiamo con Γ la fibrazione che si ottiene da Ω sostituendo U con V, È chiaro che se esiste un cerchio D, su Q, disgiunto dai cerchi della catena $\mathscr{C}$, si ottiene un'ulteriore fibrazione Σ sostituendo in Γ il regolo corrispondente a D con il suo regolo opposto. Con l'uso della terminologia dei piani di traslazione, si può dire che il piano di traslazione $\pi(\Sigma)$ associato a Σ si ottiene mediante derivazione del piano di traslazione $\pi(\Gamma)$ associato a Γ.

In generale, se $\mathscr{D}$ è un insieme di cerchi, disgiunti tra loro e disgiunti da quelli della catena $\mathscr{C}$, allora si ottiene una nuova fibrazione ∇ a partire da Γ sostituendo l'unione dei regoli che corrispondono ai cerchi di $\mathscr{D}$ con i rispettivi regoli opposti.

Denotiamo con W il gruppo delle collineazioni che mutano U in sè e con W' il gruppo delle collineazioni che mutano in sè l'insieme dei punti dei cerchi della catena $\mathscr{C}$. È chiaro che allora $\omega(W) = W'$, cioè $W/M \simeq W'$. Si prova, [**8**]$_2$, che W' permuta tra di loro i cerchi della catena $\mathscr{C}$. Inoltre, se H denota il gruppo delle collineazioni della fibrazione Γ, si ha ([**5**], Teor. 3.5 e [**1**]) che H è il sottogruppo di W che muta V in sè.

Sia F' il sottogruppo di W' che muta D in sè. Sia F il sottogruppo di W che muta in sè il regolo N, corrispondente a D. Allora F muta in sè anche il regolo N' opposto ad N. Inoltre $\omega(F) = F'$, cioè $F/M \simeq F'$. Il gruppo $Z = H \cap F$ è un gruppo di collineazioni della fibrazione Σ.

In generale, sia $\hat{F}'$ il sottogruppo di W' che muta $\mathscr{D}$ in sè. Sia $\hat{F}$ il sottogruppo di W che muta in sè l'unione dei regoli che corrispondono ai cerchi di $\mathscr{D}$. Allora $\hat{F}$ muta in sè anche l'unione dei rispettivi regoli opposti. Inoltre $\omega(\hat{F}) = \hat{F}'$ cioè $\hat{F}/M \simeq \hat{F}'$. Il gruppo $\hat{Z} = H \cap \hat{F}$ è un gruppo di collineazioni della fibrazione ∇.

Osserviamo infine che la determinazione dei gruppi $W, H, F, Z, \hat{Z}$ è ricondotta a quella di $W', H', F', Z', \hat{Z}$.

4 - Configurazione di cerchi su una quadrica ellittica di $PG(3, 13)$

D'ora in avanti supporremo sempre $q = 13$. Poniamo $GF(13) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e assumiamo, come è lecito, $s = 2$.

In $PG(3, 13)$ consideriamo la quadrica ellittica Q di equazione

$$Q: x^2 + 11y^2 = zv\,, \tag{4.1}$$

e l'insieme $\mathscr{P}$ formato dai punti

$$(4.2)_1 \qquad \mathscr{P}: P_1 = (7, 0, 5, 1)\,, \quad P_2 = (8, 0, 6, 1)\,, \quad P_3 = (11, 0, 2, 1)\,,$$

$$(4.2)_2 \qquad P_4 = (2, 0, 2, 1)\,, \quad P_5 = (5, 0, 6, 1)\,, \quad P_6 = (6, 0, 5, 1)\,,$$

$$(4.2)_3 \qquad P_7 = (1, 2, 0, 0)\,, \quad P_8 = (1, 11, 0, 0)\,,$$

Detto π_i il piano polare di P_i rispetto a Q, i cerchi $C_i = \pi_i \cap Q$ formano una catena $\mathscr{C}$ di cerchi soddisfacente le proprietà (2) (cfr. [**11**]$_1$) consideriamo, ora, i punti non situati su Q: $S_1 = (0, 5, 1, 1)$, $S_2 = (0, 1, 12, 1)$.

È di facile verifica che i cerchi D_1 e D_2, ottenuti intersecando Q con i piani polari di S_1 e di S_2 rispettivamente, sono disgiunti e che, inoltre, sia D_1 sia D_2 sono disgiunti anche dai cerchi della catena $\mathscr{C}$.

Sia W' il gruppo delle collineazioni di $PG(3, 13)$ che trasforma in sè la quadrica Q mutando in sè la catena $\mathscr{C}$.

In [**10**] si è provato che

$W' = \langle \Phi', \Psi', \delta' \rangle$. *Il centro di* W' *è* $\langle \delta'(\Phi')^3, \delta' \rangle$.

W' *ha ordine* 24 *ed è il prodotto diretto del gruppo diedrale* $\langle \Phi', \Psi' \rangle$ *di ordine* 12 *per il gruppo* $\langle \delta' \rangle$ *di ordine* 2, *dove*

$$\begin{aligned}
&\Phi': \varrho x' = x, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho z' = 10z, \quad \varrho v' = 4v;\\
&\Psi': \varrho x' = x, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho z' = 7v, \quad \varrho v' = 2z;\\
&\delta': \varrho x' = x, \quad \varrho y' = 12y, \quad \varrho z' = z, \quad \varrho v' = v.
\end{aligned}$$

Determineremo ora il sottogruppo F_i' $(i = 1, 2)$ di W' che muta S_i in sè.

Con calcoli un pò lunghi ma privi di difficoltà si calcolano le azioni dei generatori di W' sui punti S_i $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ dove

$$\begin{aligned}
&S_3 = (0, 8, 1, 1), \quad S_4 = (0, 12, 12, 1), \quad S_5 = (0, 11, 9, 1), \quad S_6 = (0, 10, 4, 1),\\
&S_7 = (0, 9, 10, 1), \quad S_8 = (0, 6, 3, 1), \quad S_9 = (0, 2, 9, 1), \quad S_{10} = (0, 3, 4, 1),\\
&S_{11} = (0, 7, 3, 1), \quad S_{12} = (0, 4, 10, 1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi': (S_1 S_5 S_8 S_3 S_9 S_{11})(S_2 S_6 S_7 S_4 S_{10} S_{12}),\\
&\Psi': (S_1 S_7)(S_2 S_8)(S_3 S_{12})(S_4 S_{11})(S_5 S_6)(S_9 S_{10}),\\
&\delta': (S_1 S_3)(S_2 S_4)(S_5 S_9)(S_6 S_{10})(S_7 S_{12})(S_8 S_{11}).
\end{aligned}$$

Ne segue che S_1 ed S_2 appartengono ad una stessa orbita di W' che è formata dai dodici punti $S_1, S_2, \ldots, S_{12}$.

Pertanto vi sono esattamente due collineazioni di W' che fissano S_1 ed altrettante fissano S_2. Con una semplice verifica si dimostra che si tratta delle medesime due collineazioni: I, $(\Phi')^3\delta'$, ove $(\Phi')^3\delta'$: (S_i) $(i = 1, 2, \ldots, 12)$.

Resta così provato il

TEOREMA 1. $F_1' = F_2' \cdot F_1' = \langle (\Phi')^3 \delta' \rangle$ *è un gruppo di ordine* 2.

Infine, se F'_{12} denota il sottogruppo di W' che muta $\{S_1, S_2\}$ in sè, vale il

Teorema 2. $F'_{12} = \langle (\Phi')^4 \Psi', \Phi' \delta' \Psi' \rangle$. *$F'_{12}$ è un gruppo abeliano elementare di ordine* 4.

5 - Le fibrazioni associate alle configurazioni date in 4

Denoteremo, con abuso di notazione, $\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$ con ∞ e $\langle (a, 2b, 0, 1), (b, a, 1, 0) \rangle$ con $a + bt$. In accordo con **2** i regoli che corrispondono ai cerchi C_i, mediante σ, saranno denotati con $R_1, \dots, R_8$. Sia U l'unione delle rette di tali regoli.

Consideriamo (cfr. [**11**]$_2$), per ogni i, $1 \leqslant i \leqslant 8$, un mezzo regolo opposto ad R_i, cioè un sottoinsieme $\frac{1}{2}R'_i$ di sette rette contenute nel regolo R'_i opposto ad R_i

$$\tfrac{1}{2}R'_i = \{r'_{i1}, r'_{i2}, r'_{i3}, r'_{i4}, r'_{i5}, r'_{i6}, r'_{i7}\} ,$$

dove

$r'_{11} = \langle (7, 4, 0, 1), (11, 7, 1, 0) \rangle$, $r'_{12} = \langle (0, 7, 0, 1), (3, 1, 1, 0) \rangle$,
$r'_{13} = \langle (1, 7, 0, 1), (3, 0, 1, 0) \rangle$, $r'_{14} = \langle (11, 3, 0, 1), (5, 3, 1, 0) \rangle$,
$r'_{15} = \langle (3, 3, 0, 1), (5, 11, 1, 0) \rangle$, $r'_{16} = \langle (12, 1, 0, 1), (6, 2, 1, 0) \rangle$,
$r'_{17} = \langle (2, 1, 0, 1), (6, 12, 1, 0) \rangle$, $r'_{21} = \langle (8, 12, 0, 1), (7, 8, 1, 0) \rangle$,
$r'_{22} = \langle (9, 9, 0, 1), (2, 7, 1, 0) \rangle$, $r'_{23} = \langle (7, 9, 0, 1), (2, 9, 1, 0) \rangle$,
$r'_{24} = \langle (0, 8, 0, 1), (9, 3, 1, 0) \rangle$, $r'_{25} = \langle (3, 8, 0, 1), (9, 0, 1, 0) \rangle$,
$r'_{26} = \langle (10, 3, 0, 1), (5, 6, 1, 0) \rangle$, $r'_{27} = \langle (6, 3, 0, 1), (5, 10, 1, 0) \rangle$,
$r'_{31} = \langle (11, 10, 0, 1), (8, 11, 1, 0) \rangle$, $r'_{32} = \langle (0, 11, 0, 1), (1, 9, 1, 0) \rangle$,
$r'_{33} = \langle (9, 11, 0, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$, $r'_{34} = \langle (4, 9, 0, 1), (2, 5, 1, 0) \rangle$,
$r'_{35} = \langle (5, 9, 0, 1), (2, 4, 1, 0) \rangle$, $r'_{36} = \langle (1, 1, 0, 1), (6, 8, 1, 0) \rangle$,
$r'_{37} = \langle (8, 1, 0, 1), (6, 1, 1, 0) \rangle$, $r'_{41} = \langle (2, 3, 0, 1), (5, 2, 1, 0) \rangle$,
$r'_{42} = \langle (4, 2, 0, 1), (12, 0, 1, 0) \rangle$, $r'_{43} = \langle (0, 2, 0, 1), (12, 4, 1, 0) \rangle$,
$r'_{44} = \langle (8, 4, 0, 1)\ (11, 9, 1, 0) \rangle$, $r'_{45} = \langle (9, 4, 0, 1), (11, 8, 1, 0) \rangle$,
$r'_{46} = \langle (5, 12, 0, 1), (7, 12, 1, 0) \rangle$, $r'_{47} = \langle (12, 12, 0, 1), (7, 5, 1, 0) \rangle$,
$r'_{51} = \langle (5, 1, 0, 1), (6, 5, 1, 0) \rangle$, $r'_{52} = \langle (6, 4, 0, 1), (11, 4, 1, 0) \rangle$,
$r'_{53} = \langle (4, 4, 0, 1), (11, 6, 1, 0) \rangle$, $r'_{54} = \langle (10, 5, 0, 1), (4, 0, 1, 0) \rangle$,
$r'_{55} = \langle (0, 5, 0, 1), (4, 10, 1, 0) \rangle$, $r'_{56} = \langle (7, 10, 0, 1), (8, 3, 1, 0) \rangle$,
$r'_{57} = \langle (3, 10, 0, 1), (8, 7, 1, 0) \rangle$, $r'_{61} = \langle (6, 9, 0, 1), (2, 6, 1, 0) \rangle$,
$r'_{62} = \langle (12, 6, 0, 1), (10, 0, 1, 0) \rangle$, $r'_{63} = \langle (0, 6, 0, 1), (10, 12, 1, 0) \rangle$,
$r'_{64} = \langle (10, 10, 0, 1), (8, 2, 1, 0) \rangle$, $r'_{65} = \langle (2, 10, 0, 1), (8, 10, 1, 0) \rangle$,
$r'_{66} = \langle (11, 12, 0, 1), (7, 1, 1, 0) \rangle$, $r'_{67} = \langle (1, 12, 0, 1), (7, 11, 1, 0) \rangle$,

$r'_{71} = \langle(1, 4, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\rangle$, $r'_{72} = \langle(1, 9, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle$,
$r'_{73} = \langle(0, 1, 0, 0), (0, 0, 9, 1)\rangle$, $r'_{74} = \langle(1, 5, 0, 0), (0, 0, 8, 1)\rangle$,
$r'_{75} = \langle(1, 1, 0, 0), (0, 0, 5, 1)\rangle$, $r'_{76} = \langle(1, 12, 0, 0), (0, 0, 4, 1)\rangle$,
$r'_{77} = \langle(1, 8, 0, 0), (0, 0, 12, 1)\rangle$, $r'_{81} = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 0, 7, 1)\rangle$,
$r'_{82} = \langle(1, 11, 0, 0), (0, 0, 10, 1)\rangle$, $r'_{83} = \langle(1, 7, 0, 0), (0, 0, 11, 1)\rangle$,
$r'_{84} = \langle(1, 3, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\rangle$, $r'_{85} = \langle(1, 10, 0, 0), (0, 0, 3, 1)\rangle$,
$r'_{86} = \langle(1, 2, 0, 0), (0, 0, 6, 1)\rangle$, $r'_{87} = \langle(1, 6, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$.

Sia V l'unione di queste 56 rette. In **[11]**$_2$ si prova che V è una fibrazione parziale e che U e V fibrano la stessa parte di $PG(3, 13)$. Ne segue che $\Gamma = (\Omega \setminus U) \cup V$ è una fibrazione di $PG(3, 13)$.

Ora sia N_i $(i = 1, 2)$ il regolo che corrisponde al cerchio D_i mediante σ. Le rette del regolo N'_i $(i = 1, 2)$ opposto ad N_i sono riportate dalla tabella seguente

$$N'_i = \{n'_{i\,1}, n'_{i\,2}, n'_{i\,3}, n'_{i\,4}, n'_{i\,5}, n'_{i\,6}, n'_{i\,7}, n'_{i\,8}, n'_{i\,9}, n'_{i\,10}, n'_{i\,11}, n'_{i\,12}, n'_{i\,13}, n'_{i\,14}\},$$

dove

$n'_{1\,1} = \langle(3, 6, 0, 1), (7, 10, 1, 0)\rangle$, $n'_{1\,2} = \langle(3, 1, 0, 1), (3, 10, 1, 0)\rangle$,
$n'_{1\,3} = \langle(4, 8, 0, 1), (6, 9, 1, 0)\rangle$, $n'_{1\,4} = \langle(4, 12, 0, 1), (4, 9, 1, 0)\rangle$,
$n'_{1\,5} = \langle(5, 0, 0, 1), (10, 8, 1, 0)\rangle$, $n'_{1\,6} = \langle(5, 7, 0, 1), (0, 8, 1, 0)\rangle$,
$n'_{1\,7} = \langle(8, 0, 0, 1), (10, 5, 1, 0)\rangle$, $n'_{1\,8} = \langle(8, 7, 0, 1), (0, 5, 1, 0)\rangle$,
$n'_{1\,9} = \langle(9, 8, 0, 1), (6, 4, 1, 0)\rangle$, $n'_{1\,10} = \langle(9, 12, 0, 1), (4, 4, 1, 0)\rangle$,
$n'_{1\,11} = \langle(10, 6, 0, 1), (7, 3, 1, 0)\rangle$, $n'_{1\,12} = \langle(10, 1, 0, 1), (3, 3, 1, 0)\rangle$,
$n'_{1\,13} = \langle(1, 10, 0, 1), (5, 12, 1, 0)\rangle$, $n'_{1\,14} = \langle(12, 10, 0, 1), (5, 1, 1, 0)\rangle$,
$n'_{2\,1} = \langle(1, 0, 0, 1), (2, 12, 1, 0)\rangle$, $n'_{2\,2} = \langle(6, 5, 0, 1), (6, 7, 1, 0)\rangle$,
$n'_{2\,3} = \langle(7, 5, 0, 1), (6, 6, 1, 0)\rangle$, $n'_{2\,4} = \langle(7, 12, 0, 1), (9, 6, 1, 0)\rangle$,
$n'_{2\,5} = \langle(12, 4, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\rangle$, $n'_{2\,6} = \langle(12, 0, 0, 1), (2, 1, 1, 0)\rangle$,
$n'_{2\,7} = \langle(2, 9, 0, 1), (4, 11, 1, 0)\rangle$, $n'_{2\,8} = \langle(8, 2, 0, 1), (1, 5, 1, 0)\rangle$,
$n'_{2\,9} = \langle(6, 12, 0, 1), (9, 7, 1, 0)\rangle$, $n'_{2\,10} = \langle(2, 8, 0, 1), (11, 11, 1, 0)\rangle$,
$n'_{2\,11} = \langle(11, 8, 0, 1), (11, 2, 1, 0)\rangle$, $n'_{2\,12} = \langle(11, 9, 0, 1), (4, 2, 1, 0)\rangle$,
$n'_{2\,13} = \langle(5, 2, 0, 1), (1, 8, 1, 0)\rangle$, $n'_{2\,14} = \langle(1, 4, 0, 1), (0, 12, 1, 0)\rangle$.

Con abuso di linguaggio denoteremo con N_i (risp. N'_i) $(i = 1, 2)$ anche l'unione dei punti sulle rette del regolo N_i (risp. N'_i). Allora $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Inoltre, essendo $N_i \cap U = \emptyset$ $(i = 1, 2)$, si ha anche $N'_i \cap V = \emptyset$. Resta così provato il seguente

Teorema 3. *I seguenti sottoinsiemi di rette sono fibrazioni di* $PG(3, 13)$:

$$\Sigma_1 = (\Omega - (U \cup N_1)) \cup (V \cup N_1'), \qquad \Sigma_2 = (\Omega - (U \cup N_2)) \cup (V \cup N_2'),$$

$$\Sigma_{12} = (\Omega - (U \cup N_1 \cup N_2)) \cup (V \cup N_1' \cup N_2').$$

6 - Gruppi di collineazioni delle fibrazioni Σ_1, Σ_2, Σ_{12}

In accordo con [**10**] indicheremo con W il gruppo delle collineazioni che trasformano Ω in sè, mutando in sè la fibrazione parziale U. Inoltre denoteremo con F_1 (risp. F_2) il sottogruppo di W che muta N_1 (risp. N_2) in sè, e con F_{12} il sottogruppo di W che muta in sè l'unione dei regoli N_1 e N_2.

In base ai risultati riportati in **3**, si ha

$$\omega(W) = W', \quad \omega(F_1) = F_1', \quad \omega(F_2) = F_2', \quad \omega(F_{12}) = F_{12}'.$$

Ker ω è un gruppo ciclico M di ordine 14 formato dalle collineazioni del gruppo $\langle\mu\rangle$, dove μ: $\varrho x' = x + 7y$, $\varrho y' = x + y$, $\varrho z' = z + v$, $\varrho v' = 7z + v$.

In [**10**] si è determinato W provando che

$|W| = 336$. *W è il prodotto semidiretto del suo sottogruppo normale $\langle\mu\rangle$ per il gruppo $\langle\Phi, \Psi, \delta\rangle$.*

$\langle\Phi, \Psi, \delta\rangle$ è il prodotto diretto del gruppo diedrale $\langle\Phi, \Psi\rangle$ di ordine 12 per il gruppo $\langle\delta\rangle$ di ordine 2, dove

$$\begin{array}{llll} \Phi: \varrho x' = x, & \varrho y' = y, & \varrho z' = 4z, & \varrho v' = 4v; \\ \Psi: \varrho x' = 3z, & \varrho y' = 7v, & \varrho z' = x, & \varrho v' = 6y; \\ \delta: \varrho x' = x, & \varrho y' = 12y, & \varrho z' = 12z, & \varrho v' = v. \end{array}$$

Dai teoremi 1 e 2 segue che

$|F_1| = |F_2| = 28$. *$F_1 = F_2$ è il prodotto semidiretto del suo sottogruppo normale $\langle\mu\rangle$ per il gruppo $\langle\Phi^3\delta\rangle$ di ordine 2.*

$|F_{12}| = 56$. *F_{12} è il prodotto semidiretto del suo sottogruppo normale $\langle\mu\rangle$ per il gruppo $\langle\Phi^4\Psi, \Phi\delta\Psi\rangle$ di ordine 4.*

In accordo con [**10**] denoteremo con H il gruppo delle collineazioni della fibrazione Γ, ovvero il sottogruppo di W formato dalle collineazioni di W che mutano in sè la fibrazione parziale V.

In [**10**] si è provato che

H è il prodotto semidiretto del gruppo $\langle \mu^2 \rangle$ di ordine 7 per il gruppo $\langle \Phi, \Psi\delta, \delta\mu \rangle$ di ordine 24. $|H| = 168$.

Determiamo, ora, il sottogruppo Z_i $(i = 1, 2)$ di H che muta in sè la fibrazione Σ_i. Poichè Z_i muta in sè il regolo N_i, dovendo mutare in sè il regolo N_i' opposto ad N_i, si ha che Z_i risulta un sottogruppo di F_i, quello formato dalle collineazioni che mutano in sè la fibrazione parziale V. Ne segue che $Z_i = H \cap F_i$.

Inoltre risulta $|Z_i| \leqslant 14$. Infatti $|F_i| = 28$ e Z_i è un sottogruppo proprio di F_i essendo $\langle \mu \rangle < F_i$, e $\langle \mu \rangle \cap H = \langle \mu^2 \rangle = \frac{1}{2}\langle \mu \rangle$. Mettiamo infine in evidenza che $\langle \mu^2 \rangle$ è un sottogruppo normale di Z_i.

Proviamo il seguente

Teorema 4. *Le seguenti collineazioni*

$$\alpha = \mu\Phi^3\delta: \varrho x' = x + 6y, \quad \varrho y' = x + 12y, \quad \varrho z' = z + 12v, \quad \varrho v' = 7z + 12v$$

$$\mu^2: \quad \varrho x' = 4x + 7y, \quad \varrho y' = x + 4y, \quad \varrho z' = 4z + v, \quad \varrho v' = 7z + 4v$$

generano un sottogruppo Z_i $(i = 1, 2)$ di H che muta in sè la fibrazione Σ_i. $Z_i/\langle \mu^2 \rangle$ è un gruppo di ordine 2. $|Z_i| = 14$ e Z_i agisce su Σ_i secondo 59 orbite.

Dim. Con un semplice calcolo si verifica che $\alpha \in Z_i$ e che $\alpha^2 = I$. Inoltre è immediato che $\langle \mu^2 \rangle \cap \langle \alpha \rangle = \{I\}$ e che $\langle \mu^2 \rangle \lhd \langle \mu^2, \alpha \rangle$. Ne segue che $\langle \mu^2, \alpha \rangle$ è prodotto semidiretto del gruppo $\langle \mu^2 \rangle$ di ordine 7 per il gruppo $\langle \alpha \rangle$ di ordine 2 e quindi $\langle \mu^2, \alpha \rangle$ è un gruppo di ordine 14. Poichè, come si è detto, $|Z_i| \leqslant 14$, ne discende che $|Z_i| = 14$ e $Z_i = \langle \mu^2, \alpha \rangle$. Con calcoli diretti si prova poi che Z_1 agisce su Σ_i secondo 59 orbite.

Determineremo infine un gruppo di collineazioni della fibrazione Σ_{12}.

A tale scopo notiamo che Z_i muta in sè Σ_{12}. Inoltre $\beta = \Phi\Psi\delta$, che non appartiene a Z_i, è un'ulteriore collineazione della fibrazione Σ_{12}. Poichè β commuta con le collineazioni di Z_i, dal precedente teorema discendono altri due teoremi.

Teorema 5. *La collineazione involutaria β di $PG(3, 13)$ scambia Σ_1 con Σ_2.*

Teorema 6. *Le collineazioni μ^2, $\alpha = \mu\Phi^3\delta$ e $\beta = \Phi\Psi\delta$, generano un gruppo*

Z_{12} di collineazioni della fibrazione Σ_{12}. Z_{12} è il prodotto diretto del gruppo Z_i di ordine 14 *per il gruppo $\langle\beta\rangle$ di ordine* 2. $|Z_{12}| = 28$. *Z_{12} agisce su Σ_{12} secondo* 30 *orbite.*

7 – Seguendo A. Barlotti [**2**] ricordiamo come si può rappresentare un piano di traslazione, di ordine q^2, avente nucleo di ordine q, nello spazio proiettivo a quattro dimensioni.

Siano $S = PG(4, q)$ lo spazio proiettivo a quattro dimensioni su $GF(q)$, $\bar{S} = PG(3, q)$ un suo iperpiano e θ una fibrazione di $\bar{S}$. Si costruisce un piano di traslazione, $\pi(\theta)$, i cui elementi si diranno π-punti e π-rette, nel modo seguente.

I π-punti sono di due tipi. I π-punti di prima specie sono i punti di $S \setminus \bar{S}$; i π-punti di seconda specie sono le rette di θ.

Le π-rette sono di due tipi. Le π-rette di prima specie sono i piani di S, non appartenenti a $\bar{S}$, che passano per le rette di θ. Esiste una sola π-retta di seconda specie ed è data da θ.

Infine, un π-punto e una π-retta sono incidenti se e solo se l'elemento di S che rappresenta la π-retta contiene l'elemento di S che rappresenta il π-punto.

Due piani di traslazione dello stesso ordine, $\pi(\theta_1)$ e $\pi(\theta_2)$, costruiti a partire da due fibrazioni distinte θ_1 e θ_2 sono isomorfi se e solo se esiste una collineazione che trasforma θ_1 in θ_2 ([**5**], Th. 3.1).

Dal Teorema 5 discende che $\pi(\Sigma_1) \simeq \pi(\Sigma_2)$, mentre dal Teorema 6 discende che $\pi(\Sigma_1)$ e $\pi(\Sigma_{12})$ non sono isomorfi.

Il gruppo delle collineazioni del piano di traslazione $\pi(\theta)$ si ritrova nel modello $(S, \bar{S}, \theta)$ come il gruppo delle collineazioni di S che lascia fermo l'iperpiano $\bar{S}$ mutando in sè la fibrazione θ.

Le Autrici ringraziano il prof. G. Korchmaros per le utili discussioni sull'argomento.

Bibliografia

[**1**] L. M. Abatangelo and V. Abatangelo, *On Bruen's plane of order* 5^2, Geom. Dedicata (in corso di pubblicazione).

[**2**] A. Barlotti, *Representation and construction of projective planes and other geometric structures from projective spaces*, Jahresber, Deutsch. Math.-Verein **77** (1975), 28-38.

[**3**] P. Biscarini, *Piani di traslazione di ordine* 49, Circ. Mat. Palermo (in corso di pubblicazione).

[**4**] R. H. Bruck, *Construction problems of finite projective planes*, Proc. Conf. on Combinatorics, Univ. of North Carolina 1967.

[5] A. A. Bruen, *Inversive Geometry and some new translation planes* (I), Geom. Dedicata **7** (1977), 81-98.

[6] M. Capursi, *A translation plane of order* 11^2, J. Combin. Theory Ser. A (to appear).

[7] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin 1968.

[8] G. Korchmáros: $[\cdot]_1$ *On Bruen's plane of order* 7^2 (in corso di pubblicazione); $[\cdot]_2$ *Recenti risultati di geometria finita*, Conferenza tenuta presso l'Università degli Studi di Bari 1981.

[9] G. Korchmáros and G. Pellegrino, *Translation planes of order* 11^2, Ann. Discrete Math. (to appear).

[10] B. Larato e G. Raguso, *Il gruppo delle collineazioni di un piano di traslazione di ordine* 13^2, Atti del Convegno di Geometria Combinatoria, Passo della Mendola 1982 (in corso di stampa).

[11] G. Raguso: $[\cdot]_1$ *Example of chain of circles on an elliptic quadric of* $PG(3, q)$ $q = 9, 13$, J. Comb. Theory Ser. A **32** (1982); $[\cdot]_2$ *Un piano di traslazione di ordine* 13^2, Note Mat. Lecce (in corso di pubblicazione).

Summary

In [**11**]$_2$ *G. Raguso constructed a new translation plane of order* 13^2. *Here, from this plane two other translation planes of order* 13^2 *are constructed by derivation, respectively multiple derivation. The inherited collineation groups are also determinated.*

* * *