Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 161-176

P. Azzimondi e C. Scaravelli (*)

Sul punto unito comune a due applicazioni in spazi metrici generalizzati (**)

1 - Introduzione

Diamo qui alcuni teoremi di punto unito comune a due applicazioni di uno spazio metrico generalizzato (E, d), completo, in sè. La definizione di questo spazio (già introdotto in $[\mathbf{1}]_{1,3}$, e ivi chiamato H-spazio) è la seguente: « E è un insieme, e d: $E \times E \to \mathscr{R}^+$ una applicazione che verifica le seguenti proprietà

(a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ per $x_1, x_2 \in E$,

(b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ per $x_1, x_2 \in E$,

(c) esistono: un sottoinsieme A di $\mathscr{R}^+$ contenente un intervallo $0 \vdash\!\dashv a$ $(a > 0)$, una costante reale $\tau \geqslant 1$, e una funzione φ: $A \to \mathscr{R}^+$ infinitesima nello zero, tali che, per ogni $x_1, x_2, x_3 \in E$, $d(x_1, x_2) \in A \Rightarrow d(x_1, x_3) \leqslant \varphi[d(x_1, x_2)] + \tau d(x_2, x_3)$ (*proprietà triangolare generalizzata*: *p.t.g.*) ».

In questi H-spazi (che sono spazi di Hausdorff) si possono introdurre (e trattare alla stessa stregua che negli ordinari spazi metrici) le nozioni topologiche e di completezza. Segnaliamo però che *l'applicazione d è uniformemente continua se e solo se $\tau = 1$: in generale, anzi, non è neppure continua* (cfr., ad es., $[\mathbf{1}]_2$).

Per brevità negli enunciati dei teoremi che seguono non verrà più detto che qui *consideriamo ancora, e soltanto, H-spazi (E, d) completi*. E resterà pure sot-

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, via dell'Università 12, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi G.N.I.M. e G.N.A.F.A. (C.N.R.) e con fondi M.P.I. — Ricevuto: 11-XI-1982.

tinteso che A, τ, φ e ψ (ove compaiono) sono rispettivamente l'insieme, la costante, la funzione indicati in (c) e la funzione $\psi\colon E\times E\to 0 \vdash\!\dashv 1$ così definita

$$(1)\qquad \psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{d(x_1, x_2)}{\varphi[d(x_1, x_2)]} & \text{per } (x_1, x_2) \text{ tale che } d(x_1, x_2) \in A\setminus\{0\} \\ 1 & \text{per } (x_1, x_2) \text{ tale che } d(x_1, x_2) \notin A\setminus\{0\}\,. \end{cases}$$

Com'è evidente (cfr. ancora, ad es., [**1**]$_{1,3}$) *gli spazi metrici sono H-spazi particolari con* $A \equiv \mathscr{R}^+$, $\tau = 1$, φ *funzione identica* (e $\psi \equiv 1$).

In **2**, in particolare, diamo teoremi nei quali quella che potremmo chiamare «ipotesi di contrattività comune» [cfr. (2), (9), (9)', (11), (18)] viene fatta soltanto relativamente alle variabili distinte, mentre in **3** diamo un teorema nel quale tale ipotesi [cfr. (19)] viene fatta relativamente alle variabili non necessariamente distinte. In **4**, poi, oltre a qualche considerazione sui casi particolari, segnaliamo sia il fatto (preannunciato alla fine di [**1**]$_3$) che per $f_1 = f_2$ il Teorema 6 diventa esattamente il Teorema 1 di [**1**]$_3$ (con ovvie conseguenze nel caso metrico), sia il fatto che il Teorema 6 contiene un'ipotesi che inserita nel quesito posto alla fine di [**3**]$_2$, permette di dare una risposta affermativa al quesito stesso, che, altrimenti, come si sa (cfr. [**8**], es. 5), avrebbe risposta negativa.

Infine vogliamo notare subito che (anzichè procedere secondo direttive tentate da altri Autori negli spazi metrici: cfr., ad es., [**2**], [**3**]$_2$, [**4**], [**5**], [**7**], [**8**], [**9**], [**10**]) *nell'ipotesi di contrattività comune dei teoremi* 1, 3, 4, 5, 6 *abbiamo cercato di coinvolgere a primo membro il minor numero possibile delle sei distanze* $d(f_r(x_s), f_h(x_k))$ $(r = 1, 2;\ s = 3 - r, 2;\ h = 1, r\wedge s;\ k = 1, r\wedge(3 - h))$, *e a secondo membro abbiamo messo tutte le nove distanze* $d(x_1, x_2)$, $d(x_i, f_j(x_h))$ $(i, j, h = 1, 2)$. *Infatti riteniamo che questo sia un modo naturale di procedere nello studio del punto unito comune a due applicazioni. E sotto questo aspetto avere il risultato del Teorema* 6, *dove a primo membro di* (19) *ci sono soltanto le due distanze* $d(f_1(x_1), f_2(x_2))$, $d(f_1(x_1), f_1(x_2))$, *e a secondo membro tutte le nove distanze di cui sopra prive di coefficienti che non siano* $1/\tau$ (*si ricordi che negli spazi metrici* $\tau = 1$), *può ritenersi soddisfacente*: tanto più che avere a primo membro la sola distanza $d(f_1(x_1), f_2(x_2))$ non basta neppure nel caso metrico anche se a secondo membro ci sono soltanto cinque di quelle nove distanze (cfr., appunto, [**8**], es. 5).

2 - Teoremi con ipotesi di contrattività comune a variabili distinte

Teorema 1. *Siano* $f_1, f_2\colon E \to E$ *due applicazioni tali che, per tutti gli*

$x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$, si abbia

$$d(f_1(x_1), f_r(x_2)) \tag{2}$$

$$\leqslant \alpha \max \left\{d(x_1, x_2), \frac{1}{\tau} d(x_i, f_j(x_2)), \quad \lambda_{ij}(x_1, x_2)\, d(x_i, f_j(x_1)) : i, j = 1, 2\right\},$$

$$r = 1, 2; \; 0 \leqslant \alpha < 1;$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = 1, \; \lambda_{22} = \frac{\psi(x_1, x_2)}{\tau + 1}.$$

Se esiste un punto $u_0 \in E$ per il quale la successione

$$u_0, \qquad u_n = f_1(u_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

ha gli elementi tutti diversi fra loro e

$$d(u_{n-1}, u_{n-1+p}) \in A \qquad (n, p = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito.

Dim. Oltre alla (3), consideriamo la successione

$$v_n = f_2(u_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

Si ha allora

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \; \overset{n-1}{\underset{s=0}{\forall}} \max \left\{\tau^{-k} d(u_{n-s}, f_r(u_{n-s+k})) : r = 1, 2; \; k = 0, 1, 2, \ldots, s\right\} \tag{1°}$$

$$\leqslant \alpha \max \left\{\tau^{-k} d(u_{n-s-1}, f_r(u_{n-s-1+k})) : r = 1, 2; \; k = 0, 1, 2, \ldots, s + 1\right\}.$$

Infatti, applicando la (2), tenendo presente (3) e (5) ed eliminando i termini superflui, cioè i termini ripetuti e quelli che non possono essere massimo (essendo anche $\alpha < 1$), si ottiene successivamente

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \; \overset{n-1}{\underset{s=0}{\forall}} \quad \max \left\{\tau^{-k} d(u_{n-s}, f_r(u_{n-s+k})) : r = 1, 2; \; k = 0, 1, 2, \ldots, s\right\}$$

$$= \max \left\{\tau^{-k} d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})) : r = 1, 2; \; k = 0, 1, 2, \ldots, s\right\}$$

$$\leqslant \alpha \max \left\{\tau^{-k} d(u_{n-s-1}, u_{n-s+k}), \tau^{-k-1} d(u_{n-s-1}, f_j(u_{n-s+k})),\right.$$

$$\tau^{-k-1} d(u_{n-s+k}, f_j(u_{n-s+k})), \; \tau^{-k} d(u_{n-s-1}, f_j(u_{n-s-1})),$$

$$\left.\tau^{-k} \lambda_{2j}(u_{n-s-1}, u_{n-s+k})\, d(u_{n-s+k}, f_j(u_{n-s-1})) : j = 1, 2; \; k = 0, 1, 2, \ldots, s\right\}$$

$$= \alpha \max \left\{\tau^{-k} d(u_{n-s-1}, u_{n-s+k}), \tau^{-s-1} d(u_{n-s-1}, u_{n+1}), \tau^{-k-1} d(u_{n-s-1}, v_{n-s+1+k}),\right.$$

$$\tau^{-k-1} d(u_{n-s+k}, u_{n-s+1+k}), \; \tau^{-k-1} d(u_{n-s+k}, v_{n-s+1+k}), \; d(u_{n-s-1}, v_{n-s}),$$

$$\left.\tau^{-k} \frac{\psi(u_{n-s-1}, u_{n-s+k})}{\tau + 1} d(u_{n-s+k}, v_{n-s}) : k = 0, 1, \ldots, s\right\}.$$

Da qui, potendosi applicare, per (4), la p.t.g. di (c) a $d(u_{n-s+k}, v_{n-s})$, e sfruttando sia la banale disuguaglianza

$$(6) \qquad a + \gamma b \leqslant (1+\gamma)\max\{a, b\} \qquad (a, b \in \mathscr{R},\ \gamma \geqslant 0)$$

che la definizione di ψ data da (1), si ha anche

$$(7) \qquad \overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}}\ \overset{n-1}{\underset{s=0}{\forall}} \max\{\tau^{-k} d(u_{n-s}, f_r(u_{n-s+k})) : r = 1, 2;\ k = 0, 1, \ldots, s\}$$
$$\leqslant \alpha \max\{\tau^{-k} d(u_{n-s-1+h}, f_r(u_{n-s-1+k})) : r = 1, 2;\ h = 0, k;$$
$$k = 0, 1, \ldots, s+1\};$$

cioè, considerando il massimo (dei massimi) a primo e a secondo membro,

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}}\ \overset{n-1}{\underset{j=0}{\forall}} \max\{\tau^{-k} d(u_{n-i}, f_r(u_{n-i+k})) : r = 1, 2;\ i = 0, 1, \ldots, j;\ k = 0, 1, \ldots, i\}$$
$$\leqslant \alpha \max\{\tau^{-k} d(u_{n-i-1+h}, f_r(u_{n-i-1+k})) : r = 1, 2;\ h = 0, k;$$
$$i = 0, 1, \ldots, j;\ k = 0, 1, \ldots, i+1\};$$

oppure, eliminando ancora i termini superflui,

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}}\ \overset{n-1}{\underset{j=0}{\forall}} \max\{\tau^{-k} d(u_{n-i}, f_r(u_{n-i+k})) : r = 1, 2;\ i = 0, 1, \ldots, j;\ k = 0, 1, \ldots, i\}$$
$$\leqslant \alpha \max\{\tau^{-k} d(u_{n-j-1}, f_r(u_{n-j-1+k})) : r = 1, 2;\ k = 0, 1, \ldots, j+1\}.$$

Quest'ultima disuguaglianza contiene, in particolare, l'asserto.

$$(2^\circ) \qquad \lim_{n\to+\infty} d(u_n, f_r(u_n)) = 0 \qquad (r = 1, 2).$$

Infatti da (1°) si ha subito ($r = 1, 2$)

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}}\ d(u_n, f_r(u_n)) \leqslant \alpha \max\{\tau^{-k} d(u_{n-1}, f_j(u_{n-1+k})) : j = 1, 2;\ k = 0, 1\}$$
$$\leqslant \alpha^2 \max\{\tau^{-k} d(u_{n-2}, f_j(u_{n-2+k})) : j = 1, 2;\ k = 0, 1, 2\}$$
$$\leqslant \ldots \leqslant \alpha^n \max\{\tau^{-k} d(u_0, f_j(u_k)) : j = 1, 2;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ora o il massimo dell'insieme considerato nella riga precedente è $d(u_0, v_1)$, oppure no; se non lo è abbiamo (applicando anche, per (4), la p.t.g. di (c), e (1°))

$$\max\{\tau^{-k}d(u_0, f_j(u_k)):\ j=1,2;\ k=0,1,\dots,n\}$$

$$=\max\{d(u_0,u_1),\ \tau^{-k}d(u_0, f_j(u_k)):\ j=1,2;\ k=1,2,\dots,n\}$$

$$\leqslant \max\{\varphi[d(u_0,u_1)],\ \tau^{-k}\varphi[d(u_0,u_1)]+\tau^{-k+1}d(u_1, f_j(u_k)):\ j=1,2;$$

$$k=1,2,\dots,n\}$$

$$\leqslant \varphi[d(u_0,u_1)]+\alpha\max\{\tau^{-\nu}d(u_0, f_j(u_\nu)):\ j=1,2;\ \nu=0,1,\dots,n\};$$

in ogni caso quindi si ha $(r=1,2)$

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}}\quad d(u_n, f_r(u_n))\leqslant\alpha^n\Big(d(u_0, v_1)\vee\frac{\varphi[d(u_0,u_1)]}{1-\alpha}\Big),$$

da cui l'asserto.

Se ora si procede per induzione, tenendo conto di (2°) (con $r=1$), della (4) e della p.t.g. di (c), e del fatto che φ è infinitesima nello zero, si dimostra pure che

$$\overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}}\quad \lim_{n\to+\infty} d(u_n, f_1(u_{n+p-1}))=\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u_{n+p})=0\,.$$

Pertanto la successione (3) è di Cauchy, e, per l'ipotesi di completezza, converge in E: sia $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_*$ (1). Abbiamo allora

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_{n+1}, f_r(u_*))=0 \qquad (r=1,2)\,. \tag{8}$$

Infatti, per la (3), la (2) (2), la (4) e la p.t.g. di (c) [essendo anche da un certo indice n in poi $d(u_*, u_n)<a$ e quindi $d(u_*, u_n)\in A$], la (1) e la (6), possiamo

---

(1) Si noti che anche la successione (5) converge in E ad u_*. Infatti da un certo indice h in poi $d(u_h, u_*)<a$ cioè $d(u_h, u_*)\in A$; quindi $d(u_*, v_{h+1})\leqslant\varphi[d(u_*, u_h)] + \tau d(u_h, v_{h+1})=\varphi[d(u_*, u_h)]+\tau d(u_h, f_2(u_h))$.

(2) Si noti che tutti i termini della (3) sono fra loro diversi; pertanto u_* può al più essere uguale ad un determinato u_i: se ciò capita, per applicare la (2), si eliminano i primi $i+1$ termini.

scrivere successivamente ($r = 1, 2$)

$$d(u_{n+1}, f_r(u_*)) = d(f_1(u_n), f_r(u_*))$$

$$\leqslant \alpha \max \Big\{d(u_n, u_*), \frac{1}{\tau} d(u_n, f_j(u_*)), \frac{1}{\tau} d(u_*, f_j(u_*)), d(u_n, f_j(u_n)), d(u_*, f_1(u_n)),$$

$$\frac{\psi(u_n, u_*)}{\tau+1} d(u_*, f_2(u_n)) : j = 1, 2\Big\}$$

$$\leqslant \alpha \max \Big\{d(u_n, u_*), \frac{1}{\tau} \varphi[d(u_n, u_{n+1})] + d(u_{n+1}, f_j(u_*)), \frac{1}{\tau} \varphi[d(u_*, u_{n+1})]$$

$$+ d(u_{n+1}, f_j(u_*)), d(u_n, f_j(u_n)), d(u_*, f_1(u_n)) : j = 1, 2\Big\} ,$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}{}'' d(u_{n+1}, f_r(u_*)) \leqslant \alpha \max \Big\{ \lim_{n\to+\infty}{}'' d(u_{n+1}, f_j(u_*)) : j = 1, 2\Big\} \qquad (r = 1, 2),$$

il che implica

$$\lim_{n\to+\infty}{}'' d(u_{n+1}, f_r(u_*)) = 0 \qquad (r = 1, 2),$$

e quindi, appunto, la (8).

Essendo inoltre [da un certo n in poi e per la p.t.g. di (c)],

$$0 \leqslant d(u_*, f_r(u_*)) \leqslant \varphi[d(u_*, u_{n+1})] + \tau d(u_{n+1}, f_r(u_*)) \qquad (r = 1, 2),$$

con un passaggio al limite (per $n \to +\infty$) si conclude subito che $u_* = f_r(u_*)$ ($r = 1, 2$), e quindi u_* è un punto unito sia per f_1 che per f_2.

Se $z \in E$ fosse un altro punto unito sia di f_1 che di f_2, diverso da u_*, si avrebbe ($r = 1, 2$)

$$d(z, u_*) = d(f_1(z), f_r(u_*))$$

$$\leqslant \alpha \max \Big\{d(z, u_*), \frac{1}{\tau} d(z, f_j(u_*)), \frac{1}{\tau} d(u_*, f_j(u_*)), d(z, f_j(z)),$$

$$\lambda_{2j}(z, u_*) d(u_*, f_j(z)) : j = 1, 2\Big\} ,$$

cioè $d(z, u_*) \leqslant \alpha d(z, u_*)$. Deve pertanto essere $u_* = z$. Il teorema è così completamente dimostrato.

Teorema 2. *Siano $f_1, f_2: E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$, si abbia*

$$(9) \qquad d(f_1(x_1), f_r(x_2))$$

$$\leqslant \alpha \max\left\{d(x_1, x_2), \frac{1}{\tau}\, d(x_i, f_j(x_2)), d(x_i, f_1(x_1)) : i, j = 1, 2\right\}, \quad r = 1, 2; \quad 0 \leqslant \alpha < 1.$$

Se esiste un punto $u_0 \in E$ per il quale la successione $u_0, u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ha gli elementi tutti diversi fra loro e

$$(10) \qquad d(u_{n-1}, u_n) \in A \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito, che è anche l'unico punto unito di f_1.

Dim. Se si considera, come nella dimostrazione del Teorema 1, la successione (5) di punti di E $v_n = f_2(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, si giunge alle proprietà (1°) e (2°) di cui alla detta dimostrazione, con la conseguente affermazione che $\lim_{n \to +\infty} u_n = u_* \in E$ (3). Si mostra poi anche qui la validità della (8), e si conclude che $u_* = f_r(u_*)$ $(r = 1, 2)$, cioè che u_* è un punto unito sia per f_1 che per f_2 (4).

Se ora supponiamo che anche $z \in E$, ma diverso da u_*, sia punto unito di f_1, abbiamo $(r = 1, 2)$

$$d(z, u_*) = d(f_1(z), f_r(u_*))$$

$$\leqslant \alpha \max\left\{d(z, u_*), \frac{1}{\tau}\, d(z, f_j(u_*)), \frac{1}{\tau}\, d(u_*, f_j(u_*)), d(z, f_1(z)), d(u_*, f_1(z)) : j = 1, 2\right\},$$

cioè $d(z, u_*) \leqslant \alpha d(z, u_*)$. Deve pertanto essere $u_* = z$, cioè f_1 ha un unico punto unito. Il teorema è allora così dimostrato.

Teorema 3. *Siano $f_1, f_2: E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli*

---

(3) E si può ripetere anche quanto affermato nell'annotazione (1).

(4) Il procedimento dimostrativo è del tutto analogo a quello del Teorema 1, ma alleggerito dal fatto che nella (9) mancano i due termini $d(x_1, f_2(x_1))$, $[\psi(x_1, x_2)/(\tau+1)] \cdot d(x_2, f_2(x_1))$ presenti nella (2): per questa ragione, anche, qui basta la (10) invece della (4).

$x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$, si abbia

$$(9)' \qquad d(f_h(x_1), f_k(x_2))$$
$$\leqslant \alpha \max \left\{d(x_1, x_2), \frac{1}{\tau} d(x_i, f_j(x_2)), d(x_i, f_j(x_1)) : i, j = 1, 2\right\}, \; h, k = 1, 2; \; 0 \leqslant \alpha < 1 .$$

Se esistono due punti $u_0, w_0 \in E$ per i quali le successioni $u_0, u_n = f_1(u_{n-1})$, $w_0, w_n = f_2(w_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ hanno rispettivamente gli elementi tutti diversi fra loro e $d(u_{n-1}, u_n) \in A$, $d(w_{n-1}, w_n) \in A$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito, che è anche l'unico punto unito di entrambe.

Dim. Segue immediatamente dal Teorema 2 e dalla banale osservazione che scambiando f_1 con f_2 nelle ipotesi del Teorema 2 allora f_1 ed f_2 hanno ancora in comune un solo punto unito, che, però, è anche l'unico punto unito di f_2.

Teorema 4. *Siano $f_1, f_2 : E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$, si abbia*

$$(11) \qquad d(f_1(x_1), f_r(x_s))$$
$$\leqslant \alpha \max \left\{d(x_1, x_2), \frac{1}{\tau} d(x_i, f_j(x_2)), d(x_i, f_j(x_1)) : i, j = 1, 2\right\}, \; r = 1, 2; \; s = 3 - r, 2;$$
$$0 \leqslant \alpha < 1 .$$

Se esiste un punto $u_0 \in E$ per il quale la successione

$$(12) \qquad u_0, u_n = f_1(u_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ha ogni elemento diverso dal successivo $(u_{n-1} \neq u_n, \; n = 1, 2, \ldots)$ e

$$(13) \qquad d(u_{n-1}, u_n) \in A \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito che è anche l'unico punto unito di entrambe.

Dim. Si consideri di nuovo la successione di punti di E $v_n = f_2(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ [cfr. (5), Teorema 1], e, dato $n \in \mathscr{N}$, qualunque sia $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, distinguamo il caso (a) $\overset{s}{\underset{k=1}{\forall}} u_{n-s+k} \neq u_{n-s-1}$, dal caso (b) $\overset{s}{\underset{k=1}{\exists}} u_{n-s+k} = u_{n-s-1}$; teniamo poi presente che, comunque, per ipotesi, deve essere $u_{n-s} \neq u_{n-s-1}$.

Nel primo caso per la (12) e con una banale maggiorazione si ha subito

$$
\begin{aligned}
(14) \qquad & \max\{\tau^{-k}d(u_{n-s}, f_r(u_{n-s+k})) : r = 1, 2;\ k = 0, 1, \dots, s\} \\
& \leq \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})), \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})) : \\
& \qquad r = 1, 2;\ k = 0, 1, \dots, s\},
\end{aligned}
$$

e, applicando la (11),

$$
\begin{aligned}
(14)' \qquad & \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})), \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})) : \\
& \qquad r = 1, 2;\ k = 0, 1, \dots, s\} \\
& \leq \alpha \max\{\tau^{-k}d(u_{n-s-1}, u_{n-s+k}), \tau^{-k-1}d(u_{n-s-1}, f_j(u_{n-s+k})), \\
& \tau^{-k-1}d(u_{n-s+k}, f_j(u_{n-s+k})), \tau^{-k}d(u_{n-s-1}, f_j(u_{n-s-1})), \tau^{-k}d(u_{n-s+k}, f_j(u_{n-s-1})) : \\
& \qquad j = 1, 2;\ k = 0, 1, \dots, s\},
\end{aligned}
$$

o anche, tenendo presente (12) e (5), ed eliminando al secondo membro i termini superflui (cioè i termini ripetuti e quelli che non possono essere massimo),

$$
\begin{aligned}
(14)'' \qquad & \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})), \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})) : r = 1, 2; \\
& \qquad k = 0, 1, \dots, s\} \\
& \leq \alpha \max\{\tau^{-k}d(u_{n-s-1}, u_{n-s+k}), \tau^{-s-1}d(u_{n-s-1}, u_{n+1}), \tau^{-k-1}d(u_{n-s-1}, v_{n-s+1+k}), \\
& \qquad \tau^{-k-1}d(u_{n-s+k}, u_{n-s+1+k}), \tau^{-k-1}d(u_{n-s+k}, v_{n-s+1+k}), \\
& \qquad d(u_{n-s-1}, v_{n-s}), \tau^{-k}d(u_{n-s+k}, v_{n-s}) : k = 0, 1, \dots, s\}.
\end{aligned}
$$

Di qui, applicando la (11) ai termini $\tau^{-k}d(u_{n-s+k}, v_{n-s}) = \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1+k}), f_2(u_{n-s-1}))$ $(k = 1, 2, \dots, s)$ [5], ed eliminando ancora i termini superflui nella formula che così si ottiene da (14)'', si ha

$$
\begin{aligned}
(15) \qquad & \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})), \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})) : \\
& \qquad r = 1, 2;\ k = 0, 1, \dots, s\} \\
& \leq \alpha \max\{\tau^{-k}d(u_{n-s-1+h}, f_r(u_{n-s-1+k})) : r = 1, 2;\ h = 0, k;\ k = 0, 1, \dots, s + 1\},
\end{aligned}
$$

da cui, per (14), la (7) della dimostrazione del Teorema 1, con la condizione restrittiva (a), nella quale ora ci troviamo.

---

[5] Il termine $d(u_{n-s}, v_{n-s})$ viene tolto, non potendo essere massimo del secondo membro di (14)''.

Nel secondo caso, essendo per la (12)

$$\max\{\tau^{-k}d(u_{n-s}, f_r(u_{n-s+k})) : r=1,2;\ k=0,1,\dots,s\} \tag{16}$$
$$= \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})) : r=1,2;\ k=0,1,\dots,s\},$$

si trova subito

$$\max\{\tau^{-k}d(u_{n-s}, f_r(u_{n-s+k})) : r=1,2;\ k=0,1,\dots,s\} \tag{16$'$}$$
$$= \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})) : r=1,2;\ k=0,1,\dots,\bar{k}\},$$

dove $\bar{k}\leqslant s$ è il primo numero naturale per il quale si ha $u_{n-s+\bar{k}}=u_{n-s-1}$. Infatti, se nel secondo membro di (16) cominciamo col considerare gli $s+2$ argomenti $u_{n-s-1+i}$ $(i=0,1,2,\dots,s+1)$ di f_1 e f_2, ci accorgiamo che (per quel $\bar{k}$) tali argomenti, in virtù di (12), ripetono tutti i valori dei primi $\bar{k}+1$ argomenti $u_{n-s-1+h}$ $(h=0,1,2,\dots,\bar{k})$ (6).

Pertanto nel secondo membro di (16) i valori delle distanze $d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k}))$ $(r=1,2;\ k=0,1,\dots,s)$, si ritrovano tutti, per (12) e (5), fra i valori di tutte e sole le distanze $d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k}))$ $(r=1,2;\ k=0,1,\dots,\bar{k})$ (7); e quindi [per (16)] essendo anche $\tau\geqslant 1$, si ha immediatamente (16)$'$.

Ora, se teniamo conto che $u_{n-s+\bar{k}}=u_{n-s-1}$, e ricordando ancora che $\tau\geqslant 1$, si ha successivamente

$$\max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})) : r=1,2;\ k=0,1,\dots,\bar{k}\} \tag{16$''$}$$
$$= \max\{\tau^{-\bar{k}}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})),\ \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})) :\ r=1,2;$$
$$k=0,1,\dots,\bar{k}-1\}$$
$$\leqslant \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})),\ \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})) :\ r=1,2;$$
$$k=0,1,\dots,\bar{k}-1\}$$

---

(6) Più precisamente, se indichiamo con $[x]$ la parte intera di x, e con R il resto della divisione fra $s+1$ e $\bar{k}+1$, di argomenti che per un dato h ripetono il valore di $u_{n-s-1+h}$ ce ne sono $[(s+1)/(\bar{k}+1)]$ se $h\leqslant R$, ce ne sono $[(s+1)/(\bar{k}+1)]-1$ se $h>R$. Inoltre tali argomenti sono, per ogni h, $u_{n-s-1+h+i(\bar{k}+1)}$, dove $i=1,2,\dots,[(s+1)/(\bar{k}+1)]$ se $h\leqslant R$, oppure $i=1,2,\dots,[(s+1)/(\bar{k}+1)]-1$ se $h>R$.

(7) Si noti che per $k=\bar{k}$ $d(f_1(u_{n-s-1}), f_1(u_{n-s+k}))=0$.

o anche, per la (11) [8],

$$(16)''' \quad \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_r(u_{n-s+k})), \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})) : \ r=1,2; \ k=0,1,\ldots,\bar{k}-1\}$$

$$\leqslant \alpha\max\{\tau^{-k}d(u_{n-s-1}, u_{n-s+k}), \tau^{-k-1}d(u_{n-s-1}, f_j(u_{n-s+k})),$$

$$\tau^{-k-1}d(u_{n-s+k}, f_j(u_{n-s+k})), \tau^{-k}d(u_{n-s-1}, f_j(u_{n-s-1})), \quad \tau^{-k}d(u_{n-s+k}, f_j(u_{n-s-1})) : \ j=1,2; \ k=0,1,\ldots,\bar{k}-1\}.$$

Ma la $(16)'''$ è la $(14)'$ dove al posto di s si metta $\bar{k}-1$. Pertanto con gli stessi passaggi fatti allora si perverrà alla (15) con $\bar{k}-1$ al posto di s; quindi per la $(16)''$, la $(16)'$, ed essendo $\bar{k}-1<s$, $\tau\geqslant 1$, si ha la (7) (della dimostrazione del Teorema 1) con la condizione restrittiva (b), nella quale ora ci troviamo.

Dunque vale la (7) in ogni caso. A questo punto, usando lo stesso procedimento dimostrativo di cui al Teorema 1, si arriva sia alla proprietà (1°) che alla proprietà (2°) della dimostrazione dello stesso teorema, con la conseguente affermazione che $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_* \in E$ [9]. Inoltre qui avremo

$$(17) \qquad \lim_{k\to+\infty} d(u_{\sigma(k)+1}, f_r(u_*)) = 0 \qquad (r=1,2),$$

essendo $u_{\sigma(k)}$, $(k=1,2,3,\ldots)$ una sottosuccessione della successione (12) *a punti tutti diversi da* u_* [10].

Infatti per (12), una banale maggiorazione, (11) (essendo $u_{\sigma(k)}\neq u_*$), (13) e la p.t.g. di (c) [essendo anche da un certo indice k in poi $d(u_*, u_{\sigma(k)+1})<a$ e quindi $d(u_*, u_{\sigma(k)+1})\in A$], possiamo scrivere successivamente, per $r=1,2$,

$$d(u_{\sigma(k)+1}, f_r(u_*)) = d(f_1(u_{\sigma(k)}), f_r(u_*))$$

$$\leqslant \max\{d(f_1(u_{\sigma(k)}), f_1(u_*)), d(f_1(u_{\sigma(k)}), f_2(u_*)), d(f_1(u_{\sigma(k)}), f_2(u_{\sigma(k)}))\}$$

$$\leqslant \alpha\max\{d(u_{\sigma(k)}, u_*), \frac{1}{\tau}d(u_{\sigma(k)}, f_j(u_*)), \frac{1}{\tau}d(u_*, f_j(u_*)), d(u_{\sigma(k)}, f_j(u_{\sigma(k)})), d(u_*, f_j(u_{\sigma(k)})) : \ j=1,2\}$$

$$\leqslant \alpha\max\{d(u_{\sigma(k)}, u_*), \frac{1}{\tau}\varphi[d(u_{\sigma(k)}, u_{\sigma(k)+1})] + d(u_{\sigma(k)+1}, f_j(u_*)),$$

$$\frac{1}{\tau}\varphi[d(u_*, u_{\sigma(k)+1})] + d(u_{\sigma(k)+1}, f_j(u_*)), d(u_{\sigma(k)}, f_j(u_{\sigma(k)})), d(u_*, f_j(u_{\sigma(k)})) : \ j=1,2\},$$

---

[8] Che possiamo applicare in quanto $\bar{k}\leqslant s$ è il primo numero naturale per cui si ha $u_{n-s+\bar{k}} = u_{n-s-1}$.

[9] Si veda anche l'annotazione [1].

[10] Una tale sottosuccessione esiste in quanto dall'ipotesi $u_{n-1}\neq u_n$ $(n=1,2,\ldots,)$ discende che deve essere $u_{2k}\neq u_{2k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots,)$ e quindi basta prendere $u_{\sigma(k)} = u_{2k}$ se $u_{2k}\neq u_*$ oppure $u_{\sigma(k)} = u_{2k+1}$ se $u_{2k} = u_*$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

da cui ([11]), sempre per $r = 1, 2$,

$$\lim_{k\to+\infty}'' d(u_{\sigma(k)+1}, f_r(u_*)) \leqslant \alpha \max \{\lim_{k\to+\infty}'' d(u_{\sigma(k)+1}, f_j(u_*)) : j = 1, 2\},$$

il che implica

$$\lim_{k\to+\infty}'' d(u_{\sigma(k)+1}, f_r(u_*)) = 0 \qquad (r = 1, 2),$$

e quindi, appunto, le (17).

Essendo poi, da un certo indice k [p.t.g. di (c)], e per $r = 1, 2$,

$$0 \leqslant d(u_*, f_r(u_*)) \leqslant \varphi[d(u_*, u_{\sigma(k)+1})] + \tau\, d(u_{\sigma(k)+1}, f_r(u_*)),$$

con un passaggio al limite (per $k \to +\infty$) si conclude subito che $u_* = f_r(u_*)$ ($r=1, 2$), e quindi u_* è un punto unito sia per f_1 che per f_2. Se $z \in E$ fosse un altro punto unito di f_1, diverso da u_*, si avrebbe (ricordando anche che $\alpha < 1$)

$$\begin{aligned}
&\max \{d(z, u_*), d(z, f_2(z))\} \\
&= \max \{d(f_1(z), f_1(u_*)), d(f_1(z), f_2(z)), d(f_1(z), f_2(u_*))\} \\
&\leqslant \alpha \max \{d(z, u_*), d(u_*, f_2(z))\} \\
&\leqslant \alpha^2 \max \{d(z, u_*), \frac{1}{\tau} d(z, f_2(z))\},
\end{aligned}$$

cioè, essendo $\tau \geqslant 1$,

$$\max \{d(z, u_*), d(z, f_2(z))\} \leqslant \alpha^2 \max \{d(z, u_*), d(z, f_2(z))\}.$$

Deve pertanto essere $z = u_*$. Analogamente se $y \in E$ fosse un altro punto unito di f_2 diverso da u_*, si avrebbe $\max \{d(u_*, y), d(u_*, f_1(y))\} \leqslant \alpha \max\{d(u_*, y), d(y, f_1(y))\}$ e $d(y, f_1(y)) \leqslant \alpha \max \{d(u_*, y), d(u_*, f_1(y))\}$. Quindi deve essere $y = u_*$. Il teorema è così completamente dimostrato.

Teorema 5. *Siano $f_1, f_2 : E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$, si abbia*

$$\begin{aligned}
&d(f_r(x_s), f_h(x_1)) \\
&\leqslant \alpha \max \{d(x_1, x_2), \frac{1}{\tau} d(x_i, f_j(x_2)), d(x_i, f_j(x_1)) : i, j = 1, 2\}, \quad r = 1, 2; \\
&s = 3 - r, 2;\ h = 1, r \wedge s;\ 0 \leqslant \alpha < 1.
\end{aligned} \tag{18}$$

([11]) Tenendo anche presente (2°) e l'annotazione (9).

Se per ogni $x_1 \in E$ è $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$, allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito che è anche l'unico punto unito di entrambe.

Dim. Fissato $u_0 \in E$, consideriamo la successione di punti di E: u_0, $u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, e distinguiamo il caso che sia $u_{n-1} \neq u_n$ per ogni $n \in \mathcal{N}$, dal caso che sia $u_{n-1} = u_n$ per qualche $n \in \mathcal{N}$.

Nel primo caso, poichè dalla (18) segue la (11) del Teorema 4, e dall'ipotesi $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$ per ogni $x_1 \in E$, segue la (13) dello stesso Teorema, abbiamo immediatamente la nostra tesi.

Nel secondo caso u_{n-1} (almeno) è punto unito di f_1 [essendo per definizione $u_n = f_1(u_{n-1})$]. Se $z \in E$ fosse un altro punto unito di f_1 diverso da u_{n-1}, (cioè $f_1(z) = z \neq u_{n-1} = f_1(u_{n-1})$), usando (due volte) la (18), ed eliminando (due volte) i termini superflui (cioè i termini ripetuti e quelli che non possono essere massimo), ed essendo anche $\tau \geqslant 1$, si avrebbe

$$\begin{aligned}
&\max\{d(f_1(z), f_1(u_{n-1})), d(f_2(u_{n-1}), f_1(u_{n-1})), d(f_2(z), f_1(u_{n-1})), d(f_2(z), f_2(u_{n-1}))\}\\
&\leqslant \alpha \max\{d(u_{n-1}, z), d(z, f_2(z)), d(z, f_2(u_{n-1}))\}\\
&\leqslant \alpha \max\{d(f_1(u_{n-1}), f_1(z)), d(f_2(z), f_1(z)), d(f_2(u_{n-1}), f_1(z)), d(f_2(u_{n-1}), f_2(z))\}\\
&\leqslant \alpha^2 \max\{d(z, u_{n-1}), d(u_{n-1}, f_2(u_{n-1})), d(u_{n-1}, f_2(z))\},
\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}
&\max\{d(z, u_{n-1}), d(f_2(u_{n-1}), u_{n-1}), d(f_2(z), u_{n-1})\}\\
&\leqslant \alpha^2 \max\{d(z, u_{n-1}), d(f_2(u_{n-1}), u_{n-1}), d(f_2(z), u_{n-1})\}.
\end{aligned}$$

Deve pertanto essere $z = u_{n-1}$.

Mostriamo ora che u_{n-1} è punto unito anche per f_2. Se così non fosse, sarebbe $u_{n-1} \neq f_2(u_{n-1})$; quindi per la (18) si avrebbe

$$\begin{aligned}
&\max\{d(f_1(f_2(u_{n-1})), f_1(u_{n-1})), d(f_2(u_{n-1}), f_1(u_{n-1})), d(f_2(f_2(u_{n-1})), f_1(u_{n-1})),\\
&\qquad\qquad d(f_2(f_2(u_{n-1})), f_2(u_{n-1}))\}\\
&\leqslant \alpha \max\left\{d(u_{n-1}, f_2(u_{n-1})), \frac{1}{\tau} d(f_2(u_{n-1}), f_1(f_2(u_{n-1})))\right\},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\max\{d(f_1(u_{n-1}), f_1(f_2(u_{n-1}))), d(f_2(f_2(u_{n-1})), f_1(f_2(u_{n-1}))),\\
&\qquad\qquad d(f_2(u_{n-1}), f_1(f_2(u_{n-1}))), d(f_2(u_{n-1}), f_2(f_2(u_{n-1})))\}\\
&\leqslant \alpha \max\{d(f_2(u_{n-1}), u_{n-1}), d(u_{n-1}, f_2(f_2(u_{n-1})))\};
\end{aligned}$$

da cui, essendo anche $\alpha < 1$ e $1/\tau \leqslant 1$,

$$\max\{d(f_2(u_{n-1}), u_{n-1}),\ d(f_2(f_2(u_{n-1})), u_{n-1})\}$$
$$\leqslant \alpha \max\{d(f_2(u_{n-1}), u_{n-1}),\ d(f_2(f_2(u_{n-1})), u_{n-1})\}\ .$$

Deve pertanto essere $u_{n-1} = f_2(u_{n-1})$, cioè u_{n-1} è punto unito anche per f_2, ed è, ovviamente, l'unico comune ad f_1 ed f_2. Resta da dimostrare che u_{n-1} è l'unico punto unito di f_2. Se $z \in E$ fosse un altro punto unito di f_2, diverso da u_{n-1}, per la (18) (ricordando anche che $f_1(u_{n-1}) = u_{n-1}$), ed eliminando i termini superflui, si avrebbe $\max\{d(f_1(u_{n-1}), f_1(z)),\ d(f_2(z), f_1(z)),\ d(f_2(u_{n-1}), f_1(z)),\ d(f_2(u_{n-1}), f_2(z))\} \leqslant \alpha d(u_{n-1}, z)$, da cui, con una banale maggiorazione, $d(u_{n-1}, z) \leqslant \alpha d(u_{n-1}, z)$. Deve pertanto essere $u_{n-1} = z$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

3 - Un teorema con ipotesi di contrattività comune a variabili non necessariamente distinte

Teorema 6. *Siano* $f_1, f_2 \colon E \to E$ *due applicazioni tali che, per tutti gli* $x_1, x_2 \in E$, *si abbia*

$$d(f_1(x_1), f_r(x_2)) \tag{19}$$
$$\leqslant \alpha \max\{d(x_1, x_2),\ 1/\tau\ d(x_i, f_j(x_2)),\ d(x_i, f_j(x_1)) \colon i, j = 1, 2\},\quad r = 1, 2;\ \ 0 \leqslant \alpha < 1.$$

Se per ogni $x_1 \in E$ *è* $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$, *allora* f_1 *ed* f_2 *hanno in comune un solo punto unito che è anche l'unico punto unito di entrambe.*

Dim. Fissato $u_0 \in E$, consideriamo la successione di punti di E $u_0, u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, e distinguiamo il caso che sia $u_{n-1} \neq u_n$ per ogni $n \in \mathcal{N}$, dal caso che sia $u_{n-1} = u_n$ per qualche $n \in \mathcal{N}$.

Nel primo caso, poichè la (19) vale qualunque siano $x_1, x_2 \in E$, si ha, per $x_1 = x_2$, $d(f_1(x_1), f_2(x_1)) \leqslant \alpha \max\{d(x_1, f_j(x_1)) \colon j = 1, 2\}$ $0 \leqslant \alpha < 1$: e questo vale banalmente anche per $x_1 \neq x_2$! Da ciò e dalla (19) considerata per $x_1 \neq x_2$ si ha la (11) del Teorema 4. Inoltre dal fatto che sia $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$ per ogni $x_1 \in E$, segue la (13) dello stesso teorema: pertanto si ha subito la nostra tesi.

Nel secondo caso, u_{n-1}, che è sicuramente punto unito di f_1, è anche punto unito di f_2. Infatti, per la (19) si ha $d(u_{n-1}, f_2(u_{n-1})) \leqslant \alpha \max\{d(u_{n-1}, f_j(u_{n-1})) \colon j = 1, 2\} = \alpha d(u_{n-1}, f_2(u_{n-1}))$, e quindi $u_{n-1} = f_2(u_{n-1})$. Se ora $z \in E$ fosse un altro punto unito di f_1 diverso da u_{n-1}, esso lo sarebbe banalmente anche per f_2 (si ripetono i passaggi fatti relativamente a u_{n-1}); inoltre dalla (19) si avrebbe $d(f_1(u_{n-1}), f_1(z)) \leqslant \alpha \max \{d(u_{n-1}, z), (1/\tau)d(u_{n-1}, f_j(z)), (1/\tau)d(z, f_j(z)), d(u_{n-1}, f_j(u_{n-1})), d(z, f_j(u_{n-1})) : j = 1, 2\} = \alpha d(u_{n-1}, z)$, cioè $d(u_{n-1}, z) \leqslant \alpha d(u_{n-1}, z)$, e quindi $z = u_{n-1}$.

Infine, la funzione f_2 non può avere altri punti uniti diversi da u_{n-1}; infatti se fosse $\bar{u} = f_2(\bar{u})$, $\bar{u} \in E$, per la (19) si avrebbe $d(\bar{u}, f_1(\bar{u})) = d(f_2(\bar{u}), f_1(\bar{u})) \leqslant \alpha d(\bar{u}, f_1(\bar{u}))$ e quindi $\bar{u}$ sarebbe punto unito anche per f_1. Deve pertanto essere $\bar{u} = u_{n-1}$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

4 - Alcune considerazioni finali

(a) *Notiamo che per* $f_1 = f_2$ *il Teorema* 6 *diventa esattamente il Teorema* 1 *di* [**1**]$_3$. Poichè (come abbiamo ricordato nell'Introduzione) gli spazi metrici sono H-spazi particolari, *il Teorema* 6 considerato *negli spazi metrici diventa, per* $f_1 = f_2$, *il teorema* 1(a) e (b) di [**3**]$_1$ (*o il teorema di* [**6**]). Anche da questo punto di vista, pertanto, questo Teorema 6 è, a quanto ci consta, una novità.

(b) Come diciamo all'inizio, nei teoremi di questo lavoro seguiamo la via, che riteniamo naturale, di aumentare al massimo il numero delle distanze considerate al secondo membro delle ipotesi di contrattività e di ridurre il più possibile quello delle distanze a primo membro delle stesse ipotesi. È chiaro che in questo modo il Teorema 2 e i Corollari relativi di [**1**]$_3$ diventano casi particolari di alcuni dei teoremi presenti qui solo se si fanno le evidenti ipotesi aggiuntive che un confronto fra le due situazioni impone. Da questa angolazione allora i teoremi noti negli spazi metrici, già citati come casi particolari del Teorema 2 e dei Corollari relativi di [**1**]$_3$, *possono diventare* anche casi particolari di quelli di questo lavoro (citiamo soltanto, per brevità, i teoremi 1 di [**2**], 1 di [**4**], 3 di [**5**], 14 di [**7**], 2.1 di [**9**], 1 di [**10**]); e così pure lo possono diventare sia il Teorema 2.2 di [**9**], sia il Teorema 9 di [**8**], la cui prima parte è proprio, nel caso metrico, il Teorema 2 di [**1**]$_3$ ([12]).

(c) Alla fine del lavoro [**3**]$_2$ viene posta la domanda:

Se (F, T) sono due applicazioni di uno spazio metrico M completo in sè soddisfacenti la condizione $d(Fx, Ty) \leqslant q \max \{d(x, y), d(x, Fx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Fx)\}$ per qualche $q < 1$, F e T hanno un punto unito comune?

Ebbene, l'esempio 5 di [**8**] dà risposta negativa alla domanda così posta.

([12]) Quando abbiamo scritto [**1**]$_3$, non era ancora a nostra conoscenza il lavoro [**8**].

Osserviamo però che il nostro Teorema 6 può servire a dare una risposta affermativa se nella domanda stessa si aggiunge l'ipotesi $d(Fx, Fy) \leqslant q \max\{d(x, y), d(x, Fx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Fx)\}$.

Bibliografia

[1] P. Azzimondi e C. Scaravelli: $[\cdot]_1$ *Un teorema del punto unito in spazi metrici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 773-780; $[\cdot]_2$ *Un'osservazione su un teorema del punto unito in spazi metrici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 507-508; $[\cdot]_3$ *Teoremi di punto unito per applicazioni in spazi metrici generalizzati*, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste **15** (1983), 39-49.

[2] S. K. Chatterjea, *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **25** (1972), 727-730.

[3] Lj. B. Ćirić: $[\cdot]_1$ *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 267-273; $[\cdot]_2$ *On common fixed points in uniform spaces*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) (38) **24** (1978), 39-43.

[4] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc. **60** (1968), 71-76.

[5] M. S. Khan, *Ćirić's fixed point theorem*, Mat. Vesnik (28) **3** (1976), 393-398.

[6] S. Massa, *Generalized contractions in metric spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 689-694.

[7] B. E. Rhoades, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **226** (1977), 257-290.

[8] K. P. R. Sastry and S. V. R. Naidu, *Fixed point theorems for generalized contraction mappings*, Yokohama Math. J. **28** (1980), 15-29.

[9] M. Sen Gupta, *On common fixed point of operators*, Bull. Calcutta Math. Soc. **66** (1974), 149-153.

[10] C. S. Wong, *Fixed point theorems for generalized non-expansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **18** (1974), 265-276.

Summary

We give some common fixed point theorems for mappings $f_1, f_2 : E \to E$, *where* (E, d) *is a complete generalized metric space previously introduced, taking advantage of very general common contractivity hypotheses, that we think to be natural hypotheses; from this point of view such theorems are of a certain interest.*

* * *