Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 151-160

CRISTINA REGGIANI (*)

Aggiunzioni doppie e diadi (**)

1 - Introduzione

È noto che se $F \dashv G$, allora GF è una monade. È noto altresì che in matematica ci sono numerosi esempi di funtori doppiamente aggiunti (1), cioè di funtori S e D per i quali esiste un funtore E tale che $S \dashv E \dashv D$. Poichè, a partire da una terna di funtori $S \dashv E \dashv D$, si individua una struttura costituita da una monade, ES, una comonade, ED, e da due trasformazioni naturali, sorge spontanea la questione se sia possibile assiomatizzare, mediante equazioni flessibili (cfr. [4]), la classe di queste strutture. Nel presente lavoro si risolve questo problema definendo il concetto di diade, come una struttura costituita da una monade, una comonade e due trasformazioni naturali soddisfacenti opportune equazioni flessibili. Dopo aver presentato diverse, ed equivalenti, assiomatizzazioni delle diadi, si dimostra che ogni doppia aggiunzione genera una diade. Successivamente, utilizzando una costruzione analoga a quella (di Eilenberg-Moore) delle algebre di una monade, si dimostra che per ogni diade esiste una doppia aggiunzione che la genera « in modo universale ».

2 - Diadi

In tutto il lavoro indicheremo con $\boldsymbol{A}$ una fissata categoria.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 8-XI-1982.

(1) Alcuni esempi di funtori doppiamente aggiunti sono citati in [3]. Un altro esempio notevole è fornito dalle coppie di quantori associati su un'algebra di Boole, o anche di Heyting (cfr. [1]).

Def. 1. Una *diade* $\mathcal{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$ in A è costituita da due endofuntori $H, J\colon A \to A$ e da sei trasformazioni naturali $\mu\colon HH \xrightarrow{\cdot} H$, $\nu\colon J \xrightarrow{\cdot} JJ$, $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_A \xrightarrow{\cdot} H$, $\eta\colon J \xrightarrow{\cdot} \mathrm{Id}_A$, $\sigma\colon H \xrightarrow{\cdot} JH$ e $\tau\colon HJ \xrightarrow{\cdot} J$ tali che siano commutativi i seguenti diagrammi

$$\begin{tikzcd}
HHH \arrow[r, "\mu H"] \arrow[d, "H\mu"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & HH \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "(2)\;(3)"] & H \arrow[l, "\varepsilon H"'] \arrow[d, "H\varepsilon"] \arrow[dl, equal] \\
HH \arrow[r, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "(7)"] & H \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "(8)"] & HH \arrow[l, "\mu"] \arrow[d, "H\sigma"] \\
H \arrow[u, equal] & JH \arrow[l, "\eta H"] & HJH \arrow[l, "\tau H"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
JJJ \arrow[dr, phantom, "(4)"] & JJ \arrow[l, "\nu J"'] \arrow[r, "J\eta"] \arrow[dr, phantom, "(5)\;(6)"] & J \\
JJ \arrow[u, "J\nu"] & J \arrow[l, "\nu"] \arrow[r, "\nu"'] \arrow[u, "\nu"] \arrow[ur, equal] \arrow[dl, equal] \arrow[dr, phantom, "(10)"] \arrow[dl, phantom, "(9)"] & JJ \arrow[u, "\eta J"'] \\
J \arrow[r, "\varepsilon J"'] & HJ \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "\sigma J"'] & JHJ \arrow[u, "J\tau"']
\end{tikzcd}$$

Oss. 1. Come è noto, gli assiomi (1)-(3) caratterizzano le monadi, mentre gli assiomi (4)-(6) caratterizzano le comonadi, quindi si potrebbe riformulare la Def. 1 dicendo che una diade è una struttura costituita da una monade, (H, μ, ε), da una comonade, (J, ν, η), e da due trasformazioni naturali, σ e τ, che verifichino gli assiomi (7)-(10).

Lemma 1. *Sia $\mathcal{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$ una diade. Allora sono commutativi i seguenti diagrammi*

$$\begin{tikzcd}
HH \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\sigma H"'] \arrow[dr, phantom, "(11)"] & H \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "(12)"] & JH \arrow[d, "\nu H"] \\
JHH \arrow[r, "J\mu"'] & JH \arrow[r, "J\sigma"'] & JJH
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
HHJ \arrow[r, "H\tau"] \arrow[d, "\mu J"'] \arrow[dr, phantom, "(13)"] & HJ \arrow[r, "H\nu"] \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, phantom, "(14)"] & HJJ \arrow[d, "\tau J"] \\
HJ \arrow[r, "\tau"'] & J \arrow[r, "\nu"'] & JJ
\end{tikzcd}$$

Dim. Proviamo che il diagramma (11) è commutativo. Da (7) e (8) segue che $\mu = \eta H \cdot \tau H \cdot H\sigma$ (²), quindi si ha

$$J\mu \cdot \sigma H = J\eta H \cdot J\tau H \cdot JH\sigma \cdot \sigma H \,. \tag{15}$$

Poichè σ è naturale, è $JH\sigma \cdot \sigma H = \sigma JH \cdot H\sigma$, quindi da (15) segue

$$J\mu \cdot \sigma H = J\eta H \cdot J\tau H \cdot \sigma JH \cdot H\sigma \,. \tag{16}$$

(²) Indicheremo sempre con « $\beta \cdot \alpha$ » la composizione verticale delle trasformazioni naturali α e β.

Da (6) e (10) segue che $\tau = J\eta \cdot J\tau \cdot \sigma J$, perciò da (16) si deduce

$$J\mu \cdot \sigma H = \tau H \cdot H\sigma \,. \tag{17}$$

Da (17) e (8) si ha l'asserto.

Similmente, utilizzando gli assiomi (3), (8), (9) e (10), e la naturalezza di τ, si prova che il diagramma (14) è commutativo. Inoltre, da (3), (8) e (10) e dalla naturalezza di σ, segue la commutatività di (12), così come da (6), (8) e (10) e dalla naturalezza di τ, segue quella del diagramma (13).

La seguente proposizione ci assicura che una diade non risulta dalla mera giustapposizione di una monade ed una comonade.

Prop. 1. *Sia $\mathscr{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$ una diade (in $\boldsymbol{A}$). Allora $H \dashv J$. Precisamente, $(H, J, \gamma^{\mathscr{D}}, \delta^{\mathscr{D}})$ è un'aggiunzione* (3), *dove si è posto $\gamma^{\mathscr{D}} = \sigma \cdot \varepsilon$ e $\delta^{\mathscr{D}} = \eta \cdot \tau$; inoltre σ e τ sono le trasformate, mediante questa aggiunzione, di μ e ν rispettivamente, cioè valgono le relazioni seguenti: $\sigma = J\mu \cdot \gamma^{\mathscr{D}} H$ e $\tau = \delta^{\mathscr{D}} J \cdot H_{\nu}$.*

Dim. Per provare che $(H, J, \gamma^{\mathscr{D}}, \delta^{\mathscr{D}})$ è un'aggiunzione, sarà sufficiente dimostrare che $\delta^{\mathscr{D}} H \cdot H\gamma^{\mathscr{D}} = \mathrm{id}_H$ e $J\delta^{\mathscr{D}} \cdot \gamma^{\mathscr{D}} J = \mathrm{id}_J$. Usando (8), si ha

$$\delta^{\mathscr{D}} H \cdot H\gamma^{\mathscr{D}} = \eta H \cdot \tau H \cdot H\sigma \cdot H\varepsilon = \eta H \cdot \sigma \cdot \mu \cdot H\varepsilon \,.$$

Quindi, per (3) e (7), si ha $\delta^{\mathscr{D}} H \cdot H\gamma^{\mathscr{D}} = \mathrm{id}_H$. In modo perfettamente analogo, utilizzando (6), (9) e (10) si prova l'altra identità triangolare.

Inoltre, dalla definizione di $\gamma^{\mathscr{D}}$, per (2) e (11), segue che

$$J\mu \cdot \gamma^{\mathscr{D}} H = J\mu \cdot \sigma H \cdot \varepsilon H = \sigma \cdot \mu \cdot \varepsilon H = \sigma \,.$$

Similmente si prova che $\tau = \delta^{\mathscr{D}} J \cdot H\nu$.

Indicheremo con $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ l'aggiunzione $(H, J, \gamma^{\mathscr{D}}, \delta^{\mathscr{D}})$, determinata da $\mathscr{D}$ secondo la Prop. 1.

Lemma 2. *Se $\mathscr{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$ e $\mathscr{D}' = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau')$ sono due diadi (in $\boldsymbol{A}$), allora $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$.*

Dim. Ovvia, perchè, essendo $\gamma^{\mathscr{D}} = \gamma^{\mathscr{D}'}$, è anche $\delta^{\mathscr{D}} = \delta^{\mathscr{D}'}$, quindi $\tau = \delta^{\mathscr{D}} J \cdot H\nu = \delta^{\mathscr{D}'} J \cdot H\nu = \tau'$.

---

(3) Ricordo che un'aggiunzione $(F, G, \alpha, \beta)\colon \boldsymbol{B} \rightharpoonup \boldsymbol{C}$ (cfr. [**2**]) è costituita da due funtori, $F\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ e $G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$, tali che $F \dashv G$, e da due trasformazioni naturali, $\alpha\colon \mathrm{Id}_{\boldsymbol{B}} \xrightarrow{\cdot} GF$ e $\beta\colon FG \xrightarrow{\cdot} \mathrm{Id}_{\boldsymbol{C}}$, dette rispettivamente unità e counità dell'aggiunzione.

Lemma 3. *Siano (H, μ, ε) una monade e (J, ν, η) una comonade (in $\boldsymbol{A}$); siano (H, J, γ, δ) un'aggiunzione e σ, τ due trasformazioni naturali tali che siano verificate le relazioni seguenti*

$$\sigma = J\mu\cdot\gamma H, \qquad \tau = \delta J\cdot H\nu\,. \tag{18}$$

Allora i seguenti diagrammi

$$\begin{tikzcd}
 & JH \arrow[d, "\eta H"] & \\
\mathrm{Id}_A \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[ur, phantom, "(19)"' near start, shift right=2ex] & H \arrow[r, "\gamma H"] \arrow[d, "H\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(20)"] & JHH \arrow[d, "J\mu"] \\
 & HJH \arrow[r, "\delta JH\cdot H\nu H"'] & JH
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & HJ \arrow[dl, "\delta"'] & \\
\mathrm{Id}_A \arrow[ur, phantom, "(21)"' near end, shift right=2ex] & J \arrow[l, "\eta"] \arrow[u, "\varepsilon J"'] & HJJ \arrow[l, "\delta J"'] \\
 & JHJ \arrow[u, "J\delta"] \arrow[ur, phantom, "(22)"] & HJ \arrow[l, "J\mu J\cdot\gamma HJ"] \arrow[u, "H\nu"']
\end{tikzcd}$$

sono commutativi se e solo se lo sono i diagrammi (7)-(10) *rispettivamente.*

Dim. Osserviamo prima di tutto che sono soddisfatti gli assiomi (1)-(6), perchè (H, μ, ε) è una monade e (J, ν, η) è una comonade.

Supponiamo che siano commutativi i diagrammi (19)-(22). Allora, da (18), (2) e (19), segue (7), perchè η è naturale. Infatti

$$\eta H\cdot\sigma = \eta H\cdot J\mu\cdot\gamma H = \mu\cdot\eta HH\cdot\gamma H = \mu\cdot\varepsilon H = \mathrm{id}_H\,.$$

Analogamente, da (18), (3), (21) e dalla naturalezza di ε, segue (9). Verifichiamo ora l'assioma (8). Dalla prima delle (18) e dalla naturalezza di τ, si ha

$$\tau H\cdot H\sigma = \tau H\cdot HJ\mu\cdot H\gamma H = J\mu\cdot\tau HH\cdot H\gamma H\,,$$

da cui, per (1) e (20), utilizzando la naturalezza di γ, si deduce l'asserto. Similmente, da (18), (4) e (22), utilizzando la naturalezza di σ e δ, si verifica (10).

Viceversa, supponiamo che siano soddisfatti gli assiomi (7)-(10). Si prova facilmente che, da (18), (3), (6) e dalla naturalezza di γ e δ, seguono le relazioni

$$\gamma = \sigma\cdot\varepsilon\,, \qquad \delta = \eta\cdot\tau\,. \tag{23}$$

Dunque, per le (23), da (7) e (9) seguono (19) e (21) rispettivamente. Inoltre, sempre per le (23), si ha

$$\delta JH\cdot H\nu H\cdot H\gamma = \eta JH\cdot\tau JH\cdot H\nu H\cdot H\sigma\cdot H\varepsilon\,. \tag{24}$$

Ma, in virtù del Lemma 1, il diagramma (14) è commutativo, quindi è $\tau J \cdot H\nu = \nu \cdot \tau$, dunque da (24) segue

$$\delta JH \cdot H\nu H \cdot H\gamma = \eta JH \cdot \nu H \cdot \tau H \cdot H\sigma \cdot H\varepsilon\,,$$

da cui, per (8), (5) e (3), si ha

$$\delta JH \cdot H\nu H \cdot H\gamma = \sigma\,. \tag{25}$$

Da (25), per (18), segue (20). Con analoghe considerazioni, utilizzando gli assiomi (2), (6) e (10), e la commutatività del diagramma (11), si prova che il diagramma (22) è commutativo.

Oss. 2. In virtù della Prop. 1 e del Lemma 3, si possono presentare le diadi come terne $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$ costituite da una monade, $\mathscr{M} = (H, \mu, \varepsilon)$, una comonade, $\mathscr{C} = (J, \nu, \eta)$, ed un'aggiunzione, $\mathscr{A} = (H, J, \gamma, \delta)$, tali che siano verificati gli assiomi (19)-(22). Infatti, data una terna siffatta, posto $\sigma = J\mu \cdot \gamma H$ e $\tau = \delta J \cdot H\nu$, segue immediatamente dal Lemma 3 che la struttura $\mathscr{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$ verifica gli assiomi (7)-(10); dunque, per l'Oss. 1, essa è una diade. D'altra parte, data una diade $\mathscr{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$, posto $\mathscr{M} = (H, \mu, \varepsilon)$ e $\mathscr{C} = (J, \nu, \eta)$, per la Prop. 1, le possiamo associare la terna $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A}_{\mathscr{D}})$ che, per l'Oss. 1 e il Lemma 3, verifica gli assiomi (19)-(22). Ora la Prop. 1 ci assicura che la diade che si può costruire nel modo descritto a partire dalla terna $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A}_{\mathscr{D}})$ è $\mathscr{D}$ stessa. Viceversa, se $\mathscr{D}$ è la diade ottenuta da una fissata terna, $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$, allora $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ coincide con $\mathscr{A}$, quindi $(\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A}_{\mathscr{D}}) = (\mathscr{M}, \mathscr{C}, \mathscr{A})$. Infatti, dalla definizione di $\gamma^{\mathscr{D}}$ e dalla naturalezza di γ, si ha

$$\gamma^{\mathscr{D}} = \sigma \cdot \varepsilon = J\mu \cdot \gamma H \cdot \varepsilon = J\mu \cdot JH\varepsilon \cdot \gamma\,, \tag{26}$$

quindi, da (3) e (26), segue $\gamma^{\mathscr{D}} = J(\mathrm{id}_H) \cdot \gamma = \gamma$.

Notazione. Data una diade $\mathscr{D}$, indicheremo con $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ e $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ la monade e la comonade sottogiacenti.

3 - Diadi generate da una doppia aggiunzione

In questo paragrafo proveremo che ogni terna di funtori S, E, D, tali che $S \dashv E \dashv D$, genera una diade nella categoria dominio di S e D. Premettiamo una definizione.

Def. 2. Siano $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ due categorie, e siano $\mathscr{A}_1 = (S, E, \varepsilon_1, \eta_1)\colon \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ ed $\mathscr{A}_2 = (E', D, \varepsilon_2, \eta_2)\colon \boldsymbol{B} \rightharpoonup \boldsymbol{A}$ due aggiunzioni. Diremo che la coppia $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ è una *doppia aggiunzione* da $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, in simboli $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)\colon \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$, se $E' = E$.

Teorema 1. *Ogni doppia aggiunzione da $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ genera una diade in $\boldsymbol{A}$. Precisamente, se $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)\colon \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$, dove $\mathscr{A}_1 = (S, E, \varepsilon_1, \eta_1)$ e $\mathscr{A}_2 = (E, D, \varepsilon_2, \eta_2)$, allora si ottiene una diade $\mathscr{D} = (H, J, \mu, \nu, \varepsilon, \eta, \sigma, \tau)$ in $\boldsymbol{A}$, ponendo $H = ES$, $J = ED$, $\mu = E\eta_1 S$, $\nu = E\varepsilon_2 D$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\eta = \eta_2$, $\sigma = E\varepsilon_2 S$ e $\tau = E\eta_1 D$.*

Dim. Come è noto, dall'ipotesi che $\mathscr{A}_1$ ed $\mathscr{A}_2$ siano aggiunzioni, segue che (H, μ, ε) è una monade (in $\boldsymbol{A}$) e che (J, ν, η) è una comonade (in $\boldsymbol{A}$), perciò $\mathscr{D}$ verifica gli assiomi (1)-(6). Inoltre, poichè $\mathscr{A}_2$ è un'aggiunzione, è $\eta_2 E \cdot E\varepsilon_2 = \mathrm{id}_E$, da cui si ha $\eta_2 ES \cdot E\varepsilon_2 S = \mathrm{id}_{ES}$, cioè (7). Analogamente, poichè $\mathscr{A}_1$ è un'aggiunzione, è $E\eta_1 \cdot \varepsilon_1 E = \mathrm{id}_E$, da cui segue (9). E poi, essendo η_1 naturale, è $\varepsilon_2 \cdot \eta_1 = \eta_1 DE \cdot SE\varepsilon_2$, da cui segue $E\varepsilon_2 S \cdot E\eta_1 S = E\eta_1 DES \cdot ESE\varepsilon_2 S$, quindi (8) è verificato. Similmente, dalla naturalezza di ε_2, segue che l'assioma (10) è soddisfatto.

Oss. 2. Si prova facilmente che se $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ è una doppia aggiunzione (come nel Teorema 1), allora $(ES, ED, E\varepsilon_2 S \cdot \varepsilon_1, \eta_2 \cdot E\eta_1 D)$ è un'aggiunzione. Inoltre si verifica immediatamente che $E\varepsilon_2 S = EDE\eta_1 S \cdot (E\varepsilon_2 S \cdot \varepsilon_1) ES$ e che $E\eta_1 D = (\eta_2 \cdot E\eta_1 D) ED \cdot ESE\varepsilon_2 D$. Si ritrova così, in modo più semplice, la Prop. 1, almeno per una diade che sia generata.

4 - Un teorema di rappresentazione

È noto che ogni monade (ed ogni comonade) è generata da una aggiunzione. In questo paragrafo dimostreremo che ogni diade è generata da una doppia aggiunzione, mediante una costruzione del tutto analoga a quella di Eilenberg-Moore per le monadi. A tale scopo, fissata una diade $\mathscr{D}$ (in $\boldsymbol{A}$), introdurremo i concetti di $\mathscr{D}$-algebra e di $\mathscr{D}$-morfismo fra $\mathscr{D}$-algebre, e dimostreremo che le $\mathscr{D}$-algebre e i $\mathscr{D}$-morfismi costituiscono una categoria (che indicheremo con $\boldsymbol{Alg}$). Successivamente definiremo una doppia aggiunzione da $\boldsymbol{A}$ ad $\boldsymbol{Alg}$ e proveremo che essa genera $\mathscr{D}$ «in modo universale».

Def. 3. Una *$\mathscr{D}$-algebra* è una terna (A, m, n) tale che (A, m) è un'algebra della monade $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$, (A, n) è una coalgebra della comonade $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$, ed n è il trasformato di m mediante l'aggiunzione $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$.

Date due $\mathscr{D}$-algebre, (A, m, n) ed (A', m', n'), diremo che $f\colon A \to A'$ è un *$\mathscr{D}$-morfismo* da (A, m, n) ad (A', m', n'), in simboli $f\colon (A, m, n) \to (A', m', n')$, se f è un morfismo sia delle algebre che delle coalgebre sottogiacenti.

Consideriamo i seguenti diagrammi

$$
\begin{tikzcd}
HH(A) \arrow[r, "H(m)"] \arrow[d, "\mu(A)"'] \arrow[dr, phantom, "(27)"] & H(A) \arrow[r, "H(n)"] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "(31)"] & HJ(A) \arrow[d, "\tau(A)"] \\
H(A) \arrow[r, "m"'] \arrow[d, "\sigma(A)"'] \arrow[dr, phantom, "(32)"] & A \arrow[r, "n"'] \arrow[d, "n"] \arrow[dr, phantom, "(28)"] & J(A) \arrow[d, "\nu(A)"] \\
JH(A) \arrow[r, "J(m)"'] & J(A) \arrow[r, "J(n)"'] & JJ(A)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon(A)"] \arrow[d, "n"'] \arrow[dr, equal] & H(A) \arrow[d, "m"] \arrow[dl, phantom, "(29)"] \\
J(A) \arrow[r, "\eta(A)"'] \arrow[ur, phantom, "(30)"] & A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "H(f)"'] \arrow[dr, phantom, "(33)"] & A \arrow[r, "n"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "(34)"] & J(A) \arrow[d, "J(f)"] \\
H(A') \arrow[r, "m'"'] & A' \arrow[r, "n'"'] & J(A')
\end{tikzcd}
$$

Prop. 2. *Siano A, A', m, m', n ed n' come nei diagrammi precedenti. Allora (A, m, n) è una $\mathscr{D}$-algebra se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni*

(i) $n = J(m)\gamma^{\mathscr{D}}(A)$, (ii) *sono commutativi i diagrammi* (27)-(30).

Dim. È un'ovvia conseguenza delle definizioni di algebra di una monade e coalgebra di una comonade.

Lemma 4. *Se due $\mathscr{D}$-algebre hanno la stessa algebra sottogiacente, allora sono uguali.*

Dim. Ovvia, per il punto (i) della Prop. 2.

Oss. 3. È noto che la condizione (i) della Prop. 2 è equivalente alla condizione

(iii) $m = \delta^{\mathscr{D}}(A)H(n)$.

Ne segue, attraverso semplici calcoli, che (i) è equivalente a ciascuna delle seguenti condizioni

(iv) *è commutativo il diagramma* (31), (v) *è commutativo il diagramma* (32).

Allora, in virtù della Prop. 2, possiamo riformulare la Def. 3, dicendo che una $\mathscr{D}$-algebra è una terna (A, m, n) che verifichi gli assiomi (27)-(30) e (31) (oppure gli assiomi (27)-(30) e (32)), e che un $\mathscr{D}$-morfismo da (A, m, n) ad (A', m', n') è un morfismo $f\colon A \to A'$ che verifichi gli assiomi (33) e (34).

È immediato verificare che se $f\colon (A, m, n) \to (A', m', n')$ e $g\colon (A', m', n') \to (A'', m'', n'')$, allora gf è un $\mathscr{D}$-morfismo da (A, m, n) ad (A'', m'', n''). Quindi le $\mathscr{D}$-algebre con i $\mathscr{D}$-morfismi costituiscono una categoria che indicheremo con ***Alg***.

Definiremo tra breve una doppia aggiunzione da $\boldsymbol{A}$ ad ***Alg***, ed in seguito proveremo che essa genera «universalmente» la diade $\mathscr{D}$. Notiamo prima di tutto che, dalla definizione di diade, dalla Prop. 1 e dal Lemma 1, segue che ogni $A \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$ dà luogo a due $\mathscr{D}$-algebre $\big(H(A), \mu(A), \sigma(A)\big)$ e $\big(J(A), \tau(A), \nu(A)\big)$. Inoltre, se $f\colon A \to A'$ è un morfismo di $\boldsymbol{A}$, allora, per la naturalezza di μ, ν, σ e τ, è $H(f)\colon \big(H(A), \mu(A), \sigma(A)\big) \to \big(H(A'), \mu(A'), \sigma(A')\big)$ e $J(f)\colon \big(J(A), \tau(A), \nu(A)\big) \to \big(J(A'), \tau(A'), \nu(A')\big)$. Quindi, poichè H e J sono funtori, restano definiti due funtori, $S^{\mathscr{D}}, D^{\mathscr{D}}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Alg}$, come segue

$$S^{\mathscr{D}}(A) = \big(H(A), \mu(A), \sigma(A)\big)\,, \qquad D^{\mathscr{D}}(A) = \big(J(A), \tau(A), \nu(A)\big)\,,$$

$$S^{\mathscr{D}}(f) \;= H(f)\,, \qquad\qquad D^{\mathscr{D}}(f) \;= J(f)\,.$$

Indicato con $E^{\mathscr{D}}\colon \boldsymbol{Alg} \to \boldsymbol{A}$ il funtore dimenticante, è evidente che sono verificate le relazioni seguenti

$$E^{\mathscr{D}} S^{\mathscr{D}} = H\,, \qquad E^{\mathscr{D}} D^{\mathscr{D}} = J\,.$$

Definiamo quindi due trasformazioni naturali, $\varepsilon_1^{\mathscr{D}}\colon \mathrm{Id}_{\boldsymbol{A}} \stackrel{\cdot}{\to} E^{\mathscr{D}} S^{\mathscr{D}}$ e $\eta_2^{\mathscr{D}}\colon E^{\mathscr{D}} D^{\mathscr{D}} \stackrel{\cdot}{\to} \mathrm{Id}_{\boldsymbol{A}}$, come segue

$$\varepsilon_1^{\mathscr{D}} = \varepsilon\,, \qquad \eta_2^{\mathscr{D}} = \eta\,.$$

Inoltre, se (A, m, n) è una $\mathscr{D}$-algebra, allora $m\colon S^{\mathscr{D}} E^{\mathscr{D}}(A, m, n) \to (A, m, n)$ per (27) e (32), mentre $n\colon (A, m, n) \to D^{\mathscr{D}} E^{\mathscr{D}}(A, m, n)$ per (28) e (31). Definiamo allora $\eta_1^{\mathscr{D}}\colon S^{\mathscr{D}} E^{\mathscr{D}} \to \mathrm{Id}_{\boldsymbol{Alg}}$ e $\varepsilon_2^{\mathscr{D}}\ \mathrm{Id}_{\boldsymbol{Alg}} \to D^{\mathscr{D}} E^{\mathscr{D}}$ come segue

$$\eta_1^{\mathscr{D}}(A, m, n) = m\,, \qquad \varepsilon_2^{\mathscr{D}}(A, m, n) = n\,.$$

È immediato verificare che $\eta_1^{\mathscr{D}}$ e $\varepsilon_2^{\mathscr{D}}$ sono trasformazioni naturali.

Siano ora $\mathscr{A}_1^{\mathscr{D}} = (S^{\mathscr{D}}, E^{\mathscr{D}}, \varepsilon_1^{\mathscr{D}}, \eta_1^{\mathscr{D}})$ e $\mathscr{A}_2^{\mathscr{D}} = (E^{\mathscr{D}}, D^{\mathscr{D}}, \varepsilon_2^{\mathscr{D}}, \eta_2^{\mathscr{D}})$. Utilizzando le notazioni introdotte, possiamo enunciare il seguente

Teorema 2. *$(\mathscr{A}_1^{\mathscr{D}}, \mathscr{A}_2^{\mathscr{D}})$ è una doppia aggiunzione da $\boldsymbol{A}$ ad* ***Alg*** *che genera la diade $\mathscr{D}$. Inoltre, per ogni categoria $\boldsymbol{B}$ e per ogni doppia aggiunzione $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ da $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, con $\mathscr{A}_1 = (S, E, \varepsilon_1, \eta_1)$ e $\mathscr{A}_2 = (E, D, \varepsilon_2, \eta_2)$, se $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ genera $\mathscr{D}$, allora esiste un unico funtore $L\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{Alg}$ tale che siano soddisfatte* *le relazioni seguenti*

$$LS = S^{\mathscr{D}}\,, \qquad E^{\mathscr{D}}L = E\,, \qquad LD = D^{\mathscr{D}}\,. \tag{35}$$

Dim. La prima parte del teorema è ovvia, tenendo presente il Teorema 1, paragrafo 2, capitolo 6 di [2] e il suo duale. Si noti infatti che, a meno dell'ovvio funtore dimenticante da $\boldsymbol{Alg}$ alla categoria delle algebre di $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$, la quaterna $\mathscr{A}_1^{\mathscr{D}} = (S^{\mathscr{D}}, E^{\mathscr{D}}, \varepsilon_1^{\mathscr{D}}, \eta_1^{\mathscr{D}})$ è proprio l'aggiunzione definita nel teorema ricordato. Ne segue che la monade e la comonade sottogiacenti alla diade generata da $(\mathscr{A}_1^{\mathscr{D}}, \mathscr{A}_2^{\mathscr{D}})$ coincidono con $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ e $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$. Dunque, per completare la dimostrazione, in virtù del Lemma 2, basterà dimostrare che $E^{\mathscr{D}}\varepsilon_2^{\mathscr{D}}S^{\mathscr{D}} = \sigma$. Preso $A \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$, si ha

$$(E^{\mathscr{D}}\varepsilon_2^{\mathscr{D}}S^{\mathscr{D}})(A) = E^{\mathscr{D}}\big(\varepsilon_2^{\mathscr{D}}(H(A), \mu(A), \sigma(A))\big) = E^{\mathscr{D}}\big(\sigma(A)\big) = \sigma(A)\,,$$

da cui, data l'arbitrarietà di A, segue l'eguaglianza cercata.

La seconda parte del teorema segue dal Teorema 1, paragrafo 3, capitolo 6 di [2] e dal suo duale. Infatti, se $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)\colon \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ genera $\mathscr{D}$, allora $\mathscr{A}_1$ genera $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ e $\mathscr{A}_2$ genera $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$. Inoltre, per il Lemma 4, ogni funtore $L\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{Alg}$ è determinato da ciascuna delle sue componenti K_1 e K_2, date da $K_1(B) = (A, m)$ e $K_2(B) = (A, n)$, se $L(B) = (A, m, n)$, e, come si prova facilmente, L soddisfa le (35) se e solo se K_1 soddisfa le (3) del Teorema 1, paragrafo 3 capitolo 6 di [2], e K_2 le duali. Dunque, dall'unicità di K_1, o di K_2, segue l'unicità di un L che soddisfi le (35). Dimostriamo ora che esiste un funtore L che verifichi le (35). Indichiamo con K_1 e K_2 i funtori di confronto da $\boldsymbol{B}$ alle categorie delle algebre di $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ e delle coalgebre di $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ rispettivamente. È noto che K_1 e K_2 sono definiti dalle reazioni

$$\begin{aligned} K_1(B) &= \big(E(B), E\eta_1(B)\big)\,, \qquad & K_2(B) &= \big(E(B), E\varepsilon_2(B)\big)\,, \\ K_1(f) &= E(f)\,, & K_2(f) &= E(f)\,, \qquad (B \xrightarrow{f} B')\,. \end{aligned}$$

Ora, ricordando che $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ genera $\mathscr{D}$, si prova facilmente che $E\varepsilon_2(B)$ è il trasformato, mediante $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$, di $E\eta_1(B)$, quindi K_1 e K_2 sono le componenti di un funtore $L\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{Alg}$ che, in virtù della osservazione precedente, verifica le (35).

Bibliografia

[1] G. Fischer Servi, *Un'algebrizzazione del calcolo intuizionista monadico*, Matematiche (Catania) **31** (1976), 262-276.

[2] S. Mac Lane, *Categorie nella pratica matematica*, Boringhieri, Torino 1977.

[3] C. Reggiani, *Doppie aggiunzioni e funtori biaggiunti*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983) (in corso di stampa).

[4] M. Servi, *Algebre categoriali ed equazioni flessibili (una generalizzazione dell'algebra universale)*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **50** (1980), 55-71.

Summary

A double adjunction $S \dashv E \dashv D$ gives rise to a structure made up of a monad, ES, a comonad, ED, and a suitable bound between them. We call such a structure a diad. After axiomatizing diads with soft equations, we prove a representation theorem (see the similar result due to Eilenberg and Moore for monads) to the effect that every diad is generated by a suitable double adjunction.

* * *