Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 131-136

Salvatore Antonucci (*)

Les multicolorations des graphes réguliers (**)

Introduction

Le problème des multicolorations d'un graphe, déjà résolu par l'Auteur [**1**]$_{2,3}$ pour les cliques, est ici pris en consideration de nouveau pour l'étudier pour les graphes réguliers.

Rappelons que, donné un graphe G, on a une *multicoloration* de G lorsque on associe à chaque sommet de G une couleur pour chacune des arêtes qui ont pour extremité le sommet (couleurs différentes pour arêtes différentes), de sorte que, si V e W sont deux sommets joints au moyen de l'arête s, les coleurs associées à l'arête s aient pour somme un élément préfixé de l'ensemble des coleurs $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, auquel on a donné la structure de groupe cyclique d'ordre p au moyen de l'opération $i \dot{+} j = r$, où r est le reste de la division de $j + j$ pour p. La multicoloration s'appelle d'espèce pair ([**1**]$_3$) lorsque l'élément préfixé est pair, impair au contraire.

Le problème de la possibilité (et, naturellement, de l'existence) d'une multicoloration d'espèce pair ou impair pour une clique a été pris en considération par l'Auteur en [**1**]$_2$ (où on prenait en considération les multicolorations pour les quelles l'élément préfixé était le zéro et, respectivement, l'élément $p-1$) et en [**1**]$_3$ et là résolu; d'après quelques travails de Berge [**2**] et de Petersen [**5**] il est possible étudier le même problème pour les graphes réguliers d'une classe assez étendue. Enfin, nous prendrons en consideration, dans ce travail, le problème susdit pour les graphes quelconques.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà d'Ingegneria, Via Claudio 21, 80125 Napoli, Italy.

(**) Le travail est executé dans le cadre des activités du G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) — Ricevuto: 27-X-1982.

1 - Multicolorations des graphes réguliers

Prenons en considerations un graphe régulier $R_{n,p}$, d'ordre n pair et de valence [1] p impair; observons que n et p ne peuvent pas être tous les deux impairs, parce que np est égal au double du nombre des arêtes de $R_{n,p}$. Soit $C=\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ un ensemble de couleurs au quel on a donné la structure de groupe cyclique au moyen de l'operation $i \dotplus j = r$, où r est le reste de la division de $i + j$ pour p.

Commençons par rechercher sur la possibilité de définir, pour le graphe considéré, une multicoloration d'espèce i, tel que, à savoir, on associe à chaque sommet V de $R_{n,p}$ les couleurs de C, pour chacune des arêtes qui ont une extrémité dans le sommet V, de sorte que, si V et W sont deux sommets de $R_{n,p}$ joints par l'arête s, les couleurs associées à V et à W, sur l'arête s, aient pour somme l'élément i du groupe C.

D'après [**2**] et [**5**], *on peut partitionner l'ensemble des arêtes d'un graphe régulier $R_{n,p}$, n pair et p impair, en $(p-1)/2$ facteurs disjoints et un couplage parfait si on a*

$$\min_{\substack{x \neq s \\ x \neq \phi}} m_G(S, X-S) \geqslant p-1 , \tag{1}$$

où X est l'ensemble de sommets de $R_{n,p}$ et où $m_G(S, X-S)$ est la cardinalité de l'ensemble des arêtes avec les extrémités en S et en $X-S$.

Nous dirons que un graphe $R_{n,p}$ vérifiant la condition (1) *est de la classe F.*

Remarquons, tout d'abord, que, pour chaque $y \in C$, existe seulement un $x \in C$ tel que

$$x \dotplus x = y , \tag{1}$$

si p est impair et, pour cela, $|C|$ est impair; précisement, si y est pair ou est le zéro, $x = y/2$, tandis que, si y est impair, $x = (y+p)/2$.

Alors, appelés $FT_1, FT_2, \ldots, FT_m$ $(m = (p-1)/2)$ les facteurs de $R_{n,p}$, supposé de la classe F, associons aux sommets du couplage parfait, pour chaque arête qui les joint, la coleur x qui vérifie la (1) et, successivement, aux sommets de chaque facteur FT_j, une des $(p-1)/2$ couples (z, t) de coleurs de C, où $z \neq t$, tels que

$$z \dotplus t = y , \tag{2}$$

[1] On appelle *valence* la degré de chaque sommet.

(couples différentes pour couleurs différentes) selon la règle suivante. Appelés $C_{j,1}$, $C_{j,2}$, ... les cycles disjoints dont il est composé le facteur FT_j et (z, t) la couple associée au facteur, prenons en consideration un des susdits cycles et appelons, simplement, $1, 2, \ldots$ ses sommets qui s'ensuivent, sur le cycle, selon un sense arbitraire de rotation; après, associons au sommet 1, sur l'arête $\{1, 2\}$, la couleur z, au sommet 2, sur l'arête $\{1, 2\}$, la couleur t et, sur l'arête $\{2, 3\}$, la couleur z, au sommet 3, sur l'arête $\{2, 3\}$, la couleur t, et ainsi de suite.

Après que nous avons faite cette association pour chaque facteur FT_j, nous voyons facilement qu'elle réalise, pour le graphe $R_{n,p}$, une multicoloration d'espèce y; pour cela, en rappelant que dans les raisonnements précédents il n'y avait pas de limitations pour la couleur y choisie, on a le théorème suivant.

Théorème 1. *Chaque graphe régulier $R_{n,p}$, de la classe F, n pair et p impair, admet une multicoloration d'espèce quelconque.*

Considérons, maintenant, le cas p pair. Rappelons ($[\mathbf{1}]_4$) que un graphe régulier $R_{n,p}$, p pair, se réduit à $p/2$ facteurs, ou sens où, en enlevant de $R_{n,p}$ les facteurs susdits, on obtient un graphe totalement pas connexe. Prenons, alors, en consideration la possibilité de l'existence, pour un graphe de ce type-ci, d'une multicoloration d'espèce impair. Dans ce cas, observons, avant tout, que, dans une multicoloration d'espèce impair, n'existe aucune couleur x qui vérifie la (1), c'est pourquoi les couleurs de C se partagent à couples, en nombre de $p/2$, vérifiantes la (2).

Il y a, pour cela, autant de couples que de facteurs du graphe; en associant, alors, à chaque facteur une des couples, au moyen d'une correspondance $1 - 1$, et en suivant, pour la multicoloration, les mêmes modalités suivies pour démontrer le Théorème 1, on obtient une multicoloration d'espèce impair pour le graphe $R_{n,p}$.

Ce que nous avons dit consent d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 2. *Chaque graphe régulier $R_{n,p}$, p pair, admet une multicoloration d'espèce impair.*

Écoulons, alors, à considerer la possibilité de l'existence d'une multicoloration d'espèce pair, pour p pair. Considérons, tout d'abord, le cas n impair. À ce sujet, on démontre le théorème suivant.

Théorème 3. *Si n est impair et p est pair, aucun graphe régulier $R_{n,p}$ n'admet pas une multicoloration d'espèce pair.*

En effet, si y est l'espèce (pair) de la multicoloration, la couleur $y/2$ (et, comme cela, la couleur $(y+p)/2$) est associé à lui-même, c'est pourquoi la couleur $y/2$ (ou bien la couleur $(y+p)/2$) devrait paraître, du momet qu'elle est associé aux arêtes du graphe, un nombre pair de fois, tandis que, dès que l'ordre de $R_{n,p}$ est impair, la couleur $y/2$ (ou bien la couleur $(y+p)/2$) doit paraître un nombre impair de fois.

Dans ce domaine, il ne rest, alors, que de considérer le cas n pair, p pair, l'espèce de la multicoloration elle-même pair. Dans la logique qui a conduit à établir les théorèmes précédents il est possible insérer le théorème suivant.

Théorème 4. *Chaque graphe régulier $R_{n,p}$, n et p tous les deux pairs, qui admet un facteur pair (dont les cycles, c'est à dire, ont tous longueur pair), admet une multicoloration d'espèce pair.*

Avant de démontrer le théorème, observons explicitement que la logique susdite ne consent pas d'assurer la même chose pour graphes $R_{n,p}$, n et p tous les deux pairs, qui n'admettent pas facteurs pairs; il reste, pour cela, ouvert le problème d'établir s'il est impossible que un graphe $R_{n,p}$, n et p tous les deux pairs, admet une multicoloration pair, en suivant, naturellement, des méthodes différentes de ceux que nous avons employées pour démontrer les théorèmes précédents et ce dernier.

Observons, alors, pour la démonstration du Théorème 4, que dans une multicoloration d'espèce y pair, p pair, existent deux couleurs qui vérifient la (1), précisément la couleur $y/2$ et la couleur $(y+p)/2$; si nous appelons FT le facteur pair qui est dans $R_{n,p}$, associons aux cycles de FT, sur les arêtes (qui sont en nombre pair), alternativement les couples $(y/2, y/2)$ et $((y+p)/2, (y+p)/2)$, en suivant, comme d'habitude, pour chaque cycle, un sens de rotation arbitraire; les restantes couples (z, t) qui vérifient la (2) (et qui sont en nombre de $(p-1)/2$) sont associées aux restants facteurs (dans le même nombre) de $R_{n,p}$, en suivant les règles déjà abondamment décrites pendant la démonstration des théorèmes précédents.

Ce qui précède complète, naturellement, la démonstration du Théorème 4.

Observons, aussi, explicitement, que la règle suivie on ne peut pas l'appliquer dans le cas que chaque facteur de $R_{n,p}$ soit constitué par cycles pas tous pairs et que, pour cela, comme indiqué ci-dessus, l'existence d'une multicoloration d'espèce pair, même si, après les considerations développées, elle semble improbable, devra être assuré en suivant règles différentes, elles-mêmes, naturellement, pour la généralité du sujet, en quelque manière atténuée seulement de la investigation dévéloppée en **[1]**$_4$ (qui, d'ailleurs, a été amplement utilisé), d'improbable réalisation, en dehors de la susdite investigation.

2 - Multicolorations des graphes quelconques

Clôturons ces considérations en observant qu'il semble tout à fait naturel étendre le problème des multicolorations, désormais, pour ce que nous avons fait ici et dans $[\mathbf{1}]_2$ et $[\mathbf{1}]_3$, pour les cliques et pour les graphes réguliers déjà résolu, aux graphes quelconques.

Nous toucherons seulement ce problème, en le faisant rentrer, autant que possible, dans les considérations précédentes; bien entendu le chemin est ouvert à considérations qui ne se développent pas dans ce domaine.

Si G est un graphe quelconque et si p est le degré le plus grand des ses sommets, il semble tout a fait naturel exiger qu'on réalise une multicoloration de G seulement avec les couleurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$; tout a fait naturel il semble, alors, énoncer le théorème suivant, même s'il est trivial.

Théorème 5. *Si un graphe G d'ordre n, dont les sommets ont degré le plus grand p, peut être complété par un graphe régulier $R_{n,p}$, alors on a:*

(a) *G admet une multicoloration d'espèce quelconque si n est pair et p est impair si son complétement $R_{n,p}$ est de la classe F;*

(b) *G admet une multicoloration d'espèce impair, si p est pair;*

(c) *G n'admet pas une multicoloration d'espèce pair, si n est impair et p est pair;*

(d) *G admet une multicoloration d'espèce pair, si n et p sont tous les deux pairs et si son complètement $R_{n,p}$ admet un facteur pair.*

La démonstration du Théorème 5 s'ensuit des théorèmes 1, 2, 3, 4, lorsque on définit comme complètement de G le graphe régulier $R_{n,p}$ qui contient G, dont la valence soit égale au degré le plus grand des sommets de G.

Surgit, alors, le suivant problème ouvert que nous montrons: *dans quels cas un graphe G peut être complété par un graphe régulier*. À ce propos, observons que pas tous les graphes peuvent être complétés par un graphe régulier; en effet, le graphe dont les sommets $1, 2, \ldots, 8$ sont joints par les arêtes $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 7\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$, $\{5, 7\}$, $\{6,7\}$, $\{6,8\}$, $\{7,8\}$, a le sommet 8 de degré 2 tandis que tous les autres sommets ont degré 4; pour cela n'existe aucun graphe régulier de valence 4 qui le contient.

Bibliographie

[1] S. Antonucci: [•]$_1$ *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital (5) **15**-B (1978), 20-31; [•]$_2$ *Sur les colorations généralisées des hyperarbres et sur les multicolorations des graphes*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 235-242; [•]$_3$ *Simple and generalized colourings and multicolourings of the cliques without a certain number of hamiltonian cycles and of regular graphs*, Rapp. int. n. 4, Ist. Mat. Fac. Ing. Univ. Napoli (1981); [•]$_4$ *Struttura e colorazioni semplici e generalizzate dei grafi regolari*, Rapp. int. n. 21, Ist. Mat. Fac. Ing. Univ. Napoli (1982), sous presse.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

[3] G. Chartrand, D. P. Geller and S. Hedetniemi, *A generalization of the chromatic number*, Proc. Comb. Phill. Soc. **64** (1968), 265-271.

[4] M. Gionfriddo: [•]$_1$ *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **15**-A (1978) 444-454; [•]$_2$ *Automorfismi colorati e colorazioni $L(r, s)$ in un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **17**-B (1980), 1338-1349.

[5] J. Petersen, *Die Theorie der regulären Graphen*, Acta Math. **15** (1891), 193-220.

[6] G. Pica: [•]$_1$ *Sul minimo e massimo numero di coppie di vertici non accettabili in una colorazione equa d'un grafo*, Riv. Mat. Univ. Parma, (4) **8** (1982), 331-337; [•]$_2$ *Generalized chromatic numbers of some graphs*, Rapp. int. n. 11 Ist. Mat. Fac. Ing. Univ. Napoli (1981), Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983), 259-264.

[7] G. Pica, T. Pisanscki e A. G. S. Ventre, *Colorazioni degli spigoli di speciali tipi di grafi*, Rapp. int. n. 16, Ist. Mat. Fac. Ing. Univ. Napoli (1982), Boll. Un. Mat. Ital., sous presse.

[8] F. Speranza: [•]$_1$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital (4) **12** suppl. fasc. **3** (1975), 53-62; [•]$_2$ *Numero cromatico, omomorfismi e colorazioni d'un grafo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359-367; [•]$_3$ *Sur les sections des hypergraphes et sur leurs automorphismes*, Coll. Math. **27** (1973), 269-274; [•]$_4$ *Sur les colorations des graphes orientés*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-1 (1979), 517-522.

Summary

The problem of multicolorations, of any kind for regular graphs, is here faced and solved in almost all cases. A hint to the same problem for arbitrary graphs is given.

* * *